Nombre: ______________________________ ***Curso 2º***	
Matemáticas Aplicadas II – Matrices y Determinantes – 09/nov/2011	

✗ Ejercicio 1: Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}5\\ -y\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix}y & x\end{pmatrix}$$

a) [2] Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A+2I=3A^t$.

b) [1] Obtenga la matriz A^{1500}.

c) [1,5] Halle x e y sabiendo que $B^t\cdot A=C$.

✗ Ejercicio 2: Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & x & -3\\ 4 & 1 & x\end{pmatrix}$$

a) [1,5] ¿Para qué valor de x no existe la inversa de A ?

b) [1] Para $x=-2$ compruebe que la inversa de A es la matriz

$$\begin{pmatrix}-7 & 1 & 2\\ 12 & -2 & -3\\ -8 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

✗ Ejercicio 3: Consideremos el sistema

$$S\equiv\begin{cases} x-z & = & 7\\ a\,y-3z & = & 0\\ 4x+y-2z & = & a+3\end{cases}$$

a) [1] Averigüe para qué valores de a es compatible determinado.

b) [0,5] Resuelva el sistema para $a=1$

c) [1,5] Resuelva matricialmente el sistema anterior cuando es $a=-2$.

✗ Ejercicio 1:

a) Observemos que la matriz A es cuadrada y que tiene inversa:

$$det\,A=1 \;\rightarrow\; A^{-1}=\frac{1}{det\,A}\cdot(Adj\,A)^{t}=1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por ello para obtener X despejamos como sigue:

$$X\cdot A+2I=3A^{t} \;\rightarrow\; X\cdot A=3A^{t}-2I \;\rightarrow\; X=(3A^{t}-2I)\cdot A^{-1}$$

Operando:

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 6 & -11\end{pmatrix}$$

b) Calculemos las primeras potencias:

$$A^{1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \;,\; A^{2}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix} \;,\; A^{3}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix} \;,\; A^{4}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 0 & 1\end{pmatrix} \;,\; \cdots$$

Por inducción obtenemos que es:

$$A^{n}=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix} \;,\; \forall n\geq 1$$

En particular, para $n = 1500$:

$$A^{500}=\begin{pmatrix}1 & 3000\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

c) Vamos a efectuar las operaciones con las matrices y a igualar.

$$B^{t}\cdot A=A \;\rightarrow\; (5 \quad -y)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(y \quad x) \;\rightarrow\; (5 \quad 10-y)=(y \quad x) \;\underset{igualando}{\rightarrow}\; \begin{cases}5=y\\ 10-y=x \;\rightarrow\; 5=x\end{cases}$$

✗ Ejercicio 2:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero:

$$det\,A=x^{2}+4x+3=0 \;\rightarrow\; x=-1,-4$$

Resulta así:

$$x=-1 \text{ ó } x=-4 \;\rightarrow\; det\,A=0 \;\rightarrow\; \text{No existe } A^{-1}$$
$$x\neq-1 \text{ y } x\neq-4 \;\rightarrow\; det\,A\neq0 \;\rightarrow\; \text{Sí existe } A^{-1}$$

b) Colocamos $x = -2$ y multiplicamos la matriz A por la que nos dicen que es su inversa:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & -3\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7 & 2 & 2\\ 12 & -2 & -3\\ -8 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$$

En efecto, obtenemos la matriz identidad, luego esa matriz es la inversa de la matriz A cuando colocamos $x = -2$.

✗ Ejercicio 3:

a) Usaremos la Regla de Cramer:

$$\det C=\det\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & a & -3\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}=-2a+3$$

Veamos cuándo es cero:

$$2a+3=0 \rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

Tenemos así:

$$a\neq-\frac{3}{2} \rightarrow \det C\neq 0 \rightarrow S \text{ es compatible determinado}$$
$$a=-\frac{3}{2} \rightarrow \det C=0 \rightarrow S \text{ no es compatible determinado}$$

b) Usaremos la Regla de Cramer

$$a=1 \rightarrow \det C=5$$

Las soluciones son:

$$x=\frac{\det\begin{pmatrix}7 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -3\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}}{5}=\frac{11}{5} \quad , \quad y=\frac{\det\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 0 & 0 & -3\\ 4 & 4 & -2\end{pmatrix}}{5}=-\frac{72}{5} \quad , \quad z=\frac{\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}}{5}=-\frac{24}{5}$$

c) El sistema expresado matricialmente es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{pmatrix}}_{C}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}7\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{B}$$

Observamos que la matriz de los coeficientes es la del apartado (b) del ejercicio anterior. Despejamos:

$$C\cdot X=B \rightarrow X=C^{-1}\cdot B$$

Realizando las operaciones:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 1 & 2\\ 12 & -2 & -3\\ -8 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-47\\ 81\\ -54\end{pmatrix}$$