OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea el recinto definido por las inecuaciones siguientes:

$$x+y\leq 15\ ;\quad x\leq 2y\ ;\ 0\leq y\leq 6\ ;\ x\geq 0$$

a) [1] Represente gráficamente dicho recinto.

b) [1] Calcule sus vértices.

c) [0,5] Determine el máximo valor de la función $f(x,y)=8x+5y$ en el recinto anterior y dónde se alcanza.

EJERCICIO 2

Sea la función

$$f(x)=2x^2-\frac{1}{3}x^3$$

a) [1] Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) [1] Calcule las coordenadas de los extremos relativos.

c) [0,5] Halle el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica es 4.

EJERCICIO 3

Un alumno va a la Facultad en autobús el 80% de los días y el resto en coche. Cuando va en autobús llega tarde el 20% de las veces y cuando va en coche llega a tiempo sólo el 10% de las veces. Elegido un día cualquiera al azar, determine:

a) [0,75] La probabilidad de que llegue a tiempo a clase y haya ido en autobús.

b) [0,75] La probabilidad de que llegue tarde a clase.

c) [1] Si ha llegado a tiempo a clase, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido en autobús?

EJERCICIO 4

Una empresa consultora quiere estudiar algunos aspectos de la vida laboral de los trabajadores de una ciudad. Para ello selecciona una muestra aleatoria de 500 trabajadores, de los que 118 afirman residir en otra ciudad. Con un nivel de confianza del 93% :

a) [1,75] Obtenga un intervalo de confianza para la proporción de trabajadores que residen fuera.

b) [0,75] Calcule el error cometido en el intervalo anterior.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

a) [1] Calcule $A^t\cdot B-A\cdot B^t$.

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $A\,X+B\,A=B$.

EJERCICIO 2

Calcule las derivadas de las siguientes funcones:

a) [0,8] $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{1+x^2}$

b) [0,8] $g(x)=\ln\{x(1+3x^2)\}$

c) [0,9] $h(x)=2^{5x}+\dfrac{1}{x^2}$

EJERCICIO 3

De las 180 personas que asisten a un congreso médico, 100 son mujeres. Observando las especialidades de los congresistas, vemos que de las 60 personas que son pediatras 20 son mujeres. Se elije al azar a una persona asistente al congreso.

a) [0,75] ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y pediatra?

b) [0,75] ¿Cuál es la probabilidad de que ni sea hombre ni sea pediatra?

c) [1] ¿Cuál es la probabilidad de que sea pediatra?

EJERCICIO 4

Un agricultor piensa que la producción media por naranjo, en su finca, es de 88 kg o más. Para confirmar su creencia selecciona, al azar, 10 de sus naranjos, pesa su producción y obtiene como resultado, en kilogramos, para cada uno de ellos:

80 , 83 , 87 , 95 , 86 , 92 , 85 , 83 , 84 , 95

Se acepta que la producción de un naranjo sigue una distribución Normal con desviación típica 5 kg.

a) [1,5] Plantee el contraste de hipótesis unilateral que responda a las condiciones del problema y determine la región crítica para un nivel de aceptación $\alpha = 0{,}05$.

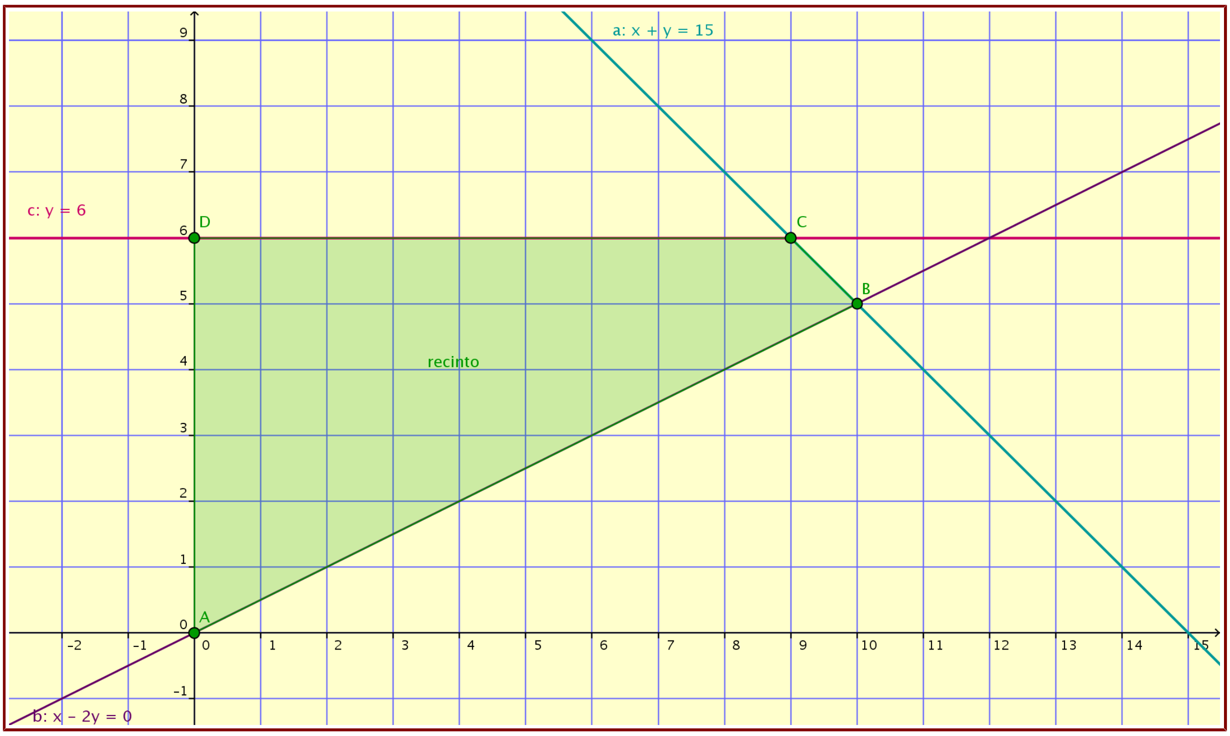
b) [1] Con los datos de esta muestra, ¿qué conclusión debe obtener el agricultor sobre la producción media por naranjo de su finca utilizando se nivel de significación?

OPCIÓN A - EJERCICIO 1

a) Veamos los semiplanos correspondientes:

$$\begin{cases} x+y\leq 15 & \rightarrow \text{ semiplano inferior para la recta } & y=15-x \\ x\leq 2y & \rightarrow \text{ semiplano izquierdo para la recta } & x=2y \\ y\leq 6 & \rightarrow \text{ semiplano inferior para la recta } & y=6 \\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0 & \rightarrow \text{ primer cuadrante} & \end{cases}$$

Ahora dibujamos las rectas que delimitan el recinto y elegimos los semiplanos arriba indicados. Aquí tenemos el gráfico (realizado con GeoGebra) que nos muestra el recinto. Es un cuadrilátero:



b) Apreciamos claramente en el dibujo las coordenadas de los vértices de la solución del sistema de inecuaciones:

$$A=(0,0)\ ,\ B=(10,5)\ ,\ C=(9,6)\ \text{ y }\ D=(0,6)$$

c) Observemos ahora que al ser

$$F(x,y)=8x+5y$$

una función lineal y R un recinto convexo y acotado, los valores extremos se alcanzarán en sus vértices:

$$\begin{array}{lll} A=(0,0) & \rightarrow & f(A)=8\cdot 0+5\cdot 0=0 \\ B=(10,5) & \rightarrow & f(B)=8\cdot 10+5\cdot 5=105 \\ C=(9,6) & \rightarrow & f(C)=8\cdot 9+5\cdot 6=102 \\ D=(0,6) & \rightarrow & f(D)=8\cdot 0+5\cdot 6=30 \end{array}$$

Concluimos:

$$max\ F=105\ \text{ y se alcanza en }\ B=(10,5)$$

OPCIÓN A – EJERCICIO 2

a) Para determinar los intervalos de monotonía calculamos la derivada $f'(x)=4x-\frac{1}{3}\cdot 3x^2=4x-x^2$ y estudiamos su signo:

Ceros de la derivada: $4x-x^2 \rightarrow x\cdot(4-x)=0 \rightarrow x=0\ ,\ x=4$

Intervalos de signo de la derivada:

–	0	+	0	–
	0		4	

De ahí deducimos los intervalos de monotonía de la función:

$f\searrow$	m	$f\nearrow$	M	$f\searrow$
	0		4	

b) Del estudio de la monotonía sacamos dónde están los extremos relativos (el mínimo es el punto donde se pasa de bajar a subir y el máximo el punto donde se pasa de subir a bajar). Para hallar las coordenadas, sustituimos los valores de la x en la fórmula de la función para obtener las y:

Mínimo: $x=0 \rightarrow y=2\cdot 0^2-\frac{1}{3}0^3=0 \rightarrow A=(0,0)$

Máximo: $x=4 \rightarrow y=2\cdot 4^2-\frac{1}{3}4^3=\frac{32}{3} \rightarrow B=(4,\frac{32}{3})$

c) Recordemos que la pendiente de la recta tangente (m) es la derivada (y'). Así:

$$m=4 \rightarrow y'=4 \rightarrow 4x-x^2=4 \rightarrow 0=x^2-4x+4 \rightarrow x=2$$

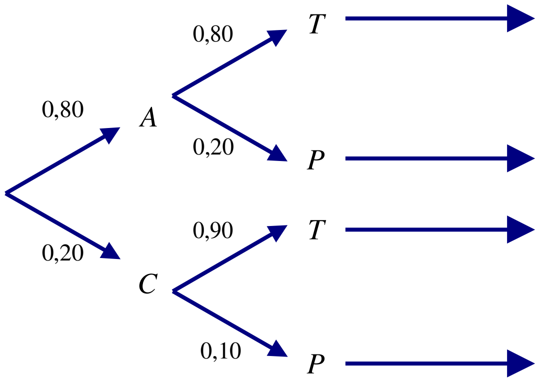
Concluimos que para $x_0=2$ la curva tiene una recta tangente con pendiente m = 4.

OPCIÓN A – EJERCICIO 3

Llamaremos A = "ir en autobús" T = "llegar tarde"

C = "ir en coche" P = "llegar a tiempo, puntual"

El siguiente diagrama de árbol nos muestra la estructura de la experiencia y las probabilidades:



$p(A\cap T)=0{,}80\cdot 0{,}80=0{,}64$

$p(A\cap P)=0{,}80\cdot 0{,}20=0{,}16$

$p(C\cap T)=0{,}20\cdot 0{,}90=0{,}18$

$p(C\cap P)=0{,}20\cdot 0{,}10=0{,}02$

a) La probabilidad está en el árbol:

$$p(A\cap P)=0{,}16$$

b) Es una probabilidad total:

$$p(T)=p(A\cap T)+p(C\cap T)=0{,}64+0{,}18=0{,}82$$

c) Es una probabilidad condicionada "a posteriori":

$$p(A/P)=\frac{p(A\cap P)}{p(P)}=\frac{0{,}16}{0{,}18}=0{,}\overline{8}$$

OPCIÓN A – EJERCICIO 4

Estudiamos la característica C = "ser un trabajador que reside en otra ciudad"

Tamaño muestral: $n = 500$

Proporción muestral: $\tilde{p}=\frac{118}{500}=0{,}236 \quad\rightarrow\quad \tilde{q}=1-\tilde{p}=0{,}764$

Nivel de confianza: $p=1-\alpha=0{,}93 \quad\rightarrow$ Valor crítico: $z_{\alpha/2}=1{,}81$

a) El intervalo de confianza para la proporción es:

$$I=\left(\tilde{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\tilde{p}\cdot\tilde{q}}{n}}\ ,\ \tilde{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\tilde{p}\cdot\tilde{q}}{n}}\right)=(0{,}236-0{,}0344\,,0{,}236+0{,}0344)=(0{,}2016\,,0{,}2704)$$

b) El error máximo cometido es el número que restamos y sumamos en el intervalo

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\tilde{p}\cdot\tilde{q}}{n}}\ \approx\ 0{,}0344$$

OPCIÓN B – EJERCICIO 1

a) $$A^t\cdot B-A\cdot B^t=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-2\\5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&6\\-5&5\end{pmatrix}$$

b) Por ello para obtener X despejamos como sigue:

$$A\cdot X+B\,A=B\ \rightarrow\ A\cdot X=B-B\,A\ \rightarrow\ X=A^{-1}\cdot(B-B\,A)$$

Calculemos la inversa de A:

$$A^{-1}=\frac{1}{det\ A}\cdot(Adj\ A)^t=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&-3\\-1&2\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}$$

Calculemos ahora:

$$B-B\,A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&3\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

Por fin, operando, sacaremos X:

$$X=A^{-1}\cdot(B-B\,A)=\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&2\\-23&-5\end{pmatrix}$$

OPCIÓN B – EJERCICIO 2

a) $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{1+x^2} \rightarrow f'(x)=\dfrac{e^{3x}\cdot 3\cdot(1+x^2)-2x\cdot e^{3x}}{(1+x^2)^2}=\dfrac{e^{3x}(3+3x^2-2x)}{(1+x^2)^2}$

b) $g(x)=\ln\left[x(1+3x^2)\right]=\ln(x+3x^3) \rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{x+3x^3}\cdot(1+9x^2)=\dfrac{1+9x^2}{x+3x^3}$

c) $h(x)=2^{5x}+\dfrac{1}{x^2} \rightarrow h'(x)=2^{5x}\cdot 5\cdot\ln(2)+\dfrac{0\cdot x^2-2x\cdot 1}{x^4}=2^{5x}\cdot 5\cdot\ln(2)-\dfrac{2}{x^3}$

OPCIÓN B – EJERCICIO 3

Llamamos M = “ser mujer” , H= “ser hombre” , P = “ser pediatra”.

Organizamos los datos en una tabla (en verde los números deducidos por nosotros). Luego, bastará mirar la tabla y aplicar la Regla de Laplace.

	P	***P^c***	
M	20	80	100
H	40	40	80
	60	120	180

a) $p(M\cap P)=\dfrac{20}{180}=\dfrac{1}{9}$

b) $p(\overline{H}\cap\overline{P})=p(M\cap\overline{P})=\dfrac{80}{180}=\dfrac{4}{9}$

c) $p(P)=\dfrac{60}{180}=\dfrac{1}{3}$

OPCIÓN B – EJERCICIO 4

a) En el contexto del problema, queremos saber si “la producción media por naranjo es de 88 kg o más”.

Hipótesis: $H_0: \mu\geq 88=\mu_0 \quad [\sigma=5]$

Es unilateral sobre la media.

Muestra y estadístico: Tamaño muestral: n = 10

Media muestral: $\overline{x}=\dfrac{870}{10}=87$

Significación y nivel crítico: Significación: $\alpha=0{,}05$ ➞Valor crítico: $z_\alpha\approx 1{,}645$

$p(z>z_\alpha)=0{,}05 \rightarrow p(z<z_\alpha)=0{,}95 \rightarrow z_\alpha=1{,}645$

Intervalo de aceptación: $I=\left(\mu_0-z_\alpha\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ +\infty\right)=\left(88-1{,}645\cdot\dfrac{5}{\sqrt{10}}\ ,\ +\infty\right)=(85{,}4\ ,\ +\infty)$

b) Conclusión: $\overline{x}\in I \rightarrow$ Aceptamos H_0

A la vista de los datos, no podemos rechazar que la producción media por naranjo es de 88 kg o más, con el nivel de significación dado.