Nombre: ____ **_Curso 2º_** ___	
Mates Aplicadas II – Septiembre 2006	

✗ Ejercicio 1: Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) [0'5] ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A?

b) [1'75] Calcule la inversa de la matriz B.

c) [0'75] Halle la matriz X tal que $X+B=C^t\cdot C$

✗ Ejercicio 2: Consideremos el recinto del plano delimitado por las siguientes inecuaciones:

$$x\geq -1 \ , \ y\leq 5 \ , \ 6x-5y+1\leq 0$$

a) [2] Dibuje dicha región y determine sus vértices.

b) [1] Calcule el mínimo de la función $f(x,\ y) = 2x+3y$ en el recinto anterior.

✗ Ejercicio 3: Dada la función f definida por $f(x)=\begin{cases} -2x+3 & \text{si} \quad x\leq -1 \\ x^2-4x & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$.

a) [2] Estudie algebraicamente la continuidad y la derivabilidad de f.

b) [1] Represente la gráfica de la función.

✗ Ejercicio 4: La curva $y = x^4+ax^2+b$ presenta un extremo relativo en el punto $P=(1,\ 1)$.

a) [1'5] Obtén los valores de a y de b.

b) [1'5] Obtén los puntos de inflexión de esa curva..

✗ Ejercicio 5: Una empresa utiliza dos servidores para conectarse a Internet. El primero lo utiliza el 45% de las veces y el segundo el resto. El primer servidor se bloquea el 5 % de las veces y el segundo el 8%.

a) [1] Halle la probabilidad de que la empresa se conecte a través del primer servidor y que éste no se bloquee.

b) [1] Si un cierto día un servidor se queda bloqueado halle la probabilidad de que haya sido el primero.

✗ Ejercicio 6: La vida de un automóvil sigue una distribución normal con desviación típica 12 meses.

a) [1] ¿Cuál debe ser el tamaño de una muestra de automóviles para tener una confianza del 95% de que el error de estimación de la vida media de un automóvil no supere los 3 meses?

b) [1] En un estudio se determina que la vida media es de 6 años. Halla la probabilidad de que en una muestra de 25 vehículos nos encontremos con una vida media superior a los 6 años y medio.

Opción A: 1 + 3 + 5 + 6
Opción B: 2 + 4 + 5 + 6

✗ Ejercicio 1:

a) La matriz A es cuadrada: sólo tiene inversa cuando su determinante no es cero. Veamos:

$$\det A = 2\cdot 5 - 2\cdot a = 10 - 2a \rightarrow 10 - 2a = 0 \rightarrow a = 5$$

Así: $\begin{array}{l} a = 5 \rightarrow A \text{ } no \text{ tiene inversa} \\ a \neq 5 \rightarrow A \text{ } sí \text{ tiene inversa} \end{array}$

b) Veamos primero su determinante, aplicando la "Regla de Sarrus":

$$\det B = 0+0+0-2-2-0 = -4$$

B tiene inversa y viene dada por la fórmula $\qquad B^{-1} = \dfrac{1}{\det B}(AdjB)^t$

Calculando los adjuntos:

$$B^{-1} = \frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $X = CC^t - B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

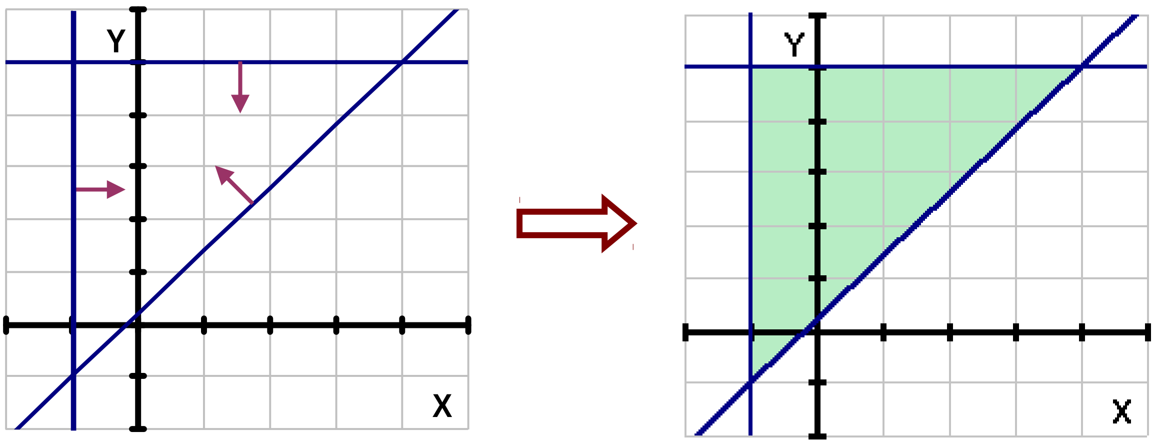
✗ EJERCICIO 2: Consideremos el recinto del plano delimitado por las siguientes inecuaciones:

$$x \geq -1 \ , \ y \leq 5 \ , \ 6x - 5y + 1 \leq 0$$

a) Veamos cuáles son los límites del recinto:

Inecuación	$x \geq -1$	$y \leq 5$	$y \geq \dfrac{6x+1}{5}$
Recta	$x = -1$ (vertical)	$y = 5$ (horizontal)	$y = \dfrac{6x+1}{5}$
Semiplano	derecho	inferior	superior

En unos ejes de coordenadas:



Los vértices se aprecian claramente y pueden obtenerse fácilmente cortando las tres rectas dos a dos:

$$A = (-1,\ 5) \ , \ B = (-1, -1) \ , \ C = (4,\ 5)$$

b) Como el conjunto factible es un polígono convexo y la función que debe optimizarse es una lineal, la función alcanza un mínimo en el recinto, y lo hace en uno de sus vértices. Veamos:

$$\begin{array}{l} A \rightarrow f(A) = 2\cdot(-1)+3\cdot 5 = 13 \\ B \rightarrow f(B) = 2\cdot(-1)+3\cdot(-1) = -5 \\ C \rightarrow f(C) = 2\cdot 4+3\cdot 5 = 23 \end{array}$$

Resulta claro que el mínimo de f en la región es –5, y que se alcanza en el vértice B.

✗ EJERCICIO 3: Dada la función f definida por $f(x)=\begin{cases} -2x+3 & \text{si} \quad x\leq -1 \\ x^2-4x & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$.

a) Continuidad:

La función, al ser polinómica a trozos, sólo puede ser discontinua en $x = -1$, que es el punto en que cambia la fórmula. Veamos en él:

$$\begin{array}{l} \text{si } x=-1 \quad \text{es } y=2+3=5 \\ \text{si } x \rightarrow -1- \text{ es } y=-2x+3 \rightarrow 5 \\ \text{si } x \rightarrow -1+ \text{ es } y=x^2-4x \rightarrow 5 \end{array}$$

Tenemos que es continua para x = –1, y por tanto en todo número punto

b) Derivabilidad

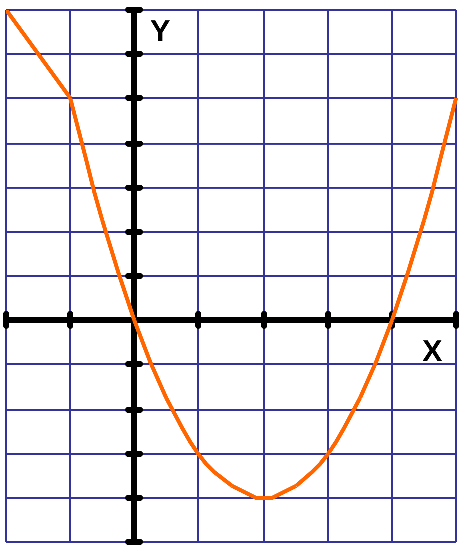
Directamente derivamos los polinomios: $f(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad x<-1 \\ 2x-4 & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$

Para $x = -1$ hemos de obtener las derivadas laterales:

$$\begin{array}{l} \text{si } x \rightarrow -1- \text{ es } y' = -2 \rightarrow -2 \\ \text{si } x \rightarrow -1+ \text{ es } y' = 2x-4 \rightarrow -6 \end{array}$$

Como no coinciden, tenemos que f no es derivable para $x = -1$ (es un *punto anguloso*).

c) Formada por una semirrecta $y=-2x+3 \;\; si \;\; x\leq -1$ y un trozo de parábola $y=x^2-4x \;\; si \;\; x>-1$:



✗ <u>EJERCICIO 4</u>: La curva $y = x^4 + ax^2 + b$ presenta un extremo relativo en el punto $P = (1,\ 1)$.

Necesitaremos la derivada de la función así:

$$y = x^4 + ax^2 + b \Rightarrow y' = 4x^3 + 2ax$$

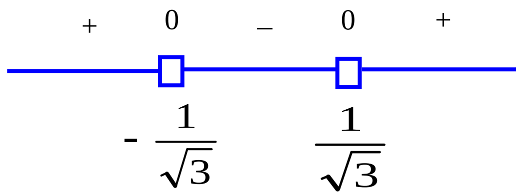
Observemos que la curva pasa por el punto P y que para $x = 1$ la derivada se anula al ser un extremo (máximo o mínimo):

$$si\ \ x = 1\ \ es\ \ y = 1 \xrightarrow{sustituyendo} 1 + a + b = 1 \rightarrow b = -a$$
$$si\ \ x = 1\ \ es\ \ y' = 0 \xrightarrow{sustituyendo} 4 + 2a = 0 \rightarrow a = -2 \rightarrow b = 2$$

Los puntos de inflexión son aquellos en los que la curva cambia de convexidad. Para hallarlos realizamos un estudio de signo de la derivada segunda y vemos en qué ceros cambia de signo:

$$y = x^4 - 2x^2 + 2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y'' = 12x^2 - 4$$

Ahora obtenemos sus ceros y realizamos un estudio de signo, obteniendo:



Así, la cura presenta dos puntos de inflexión: para $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

✗ <u>EJERCICIO 5</u>: Consideramos los sucesos:

S_1 = "conectarse usando el servidor 1"

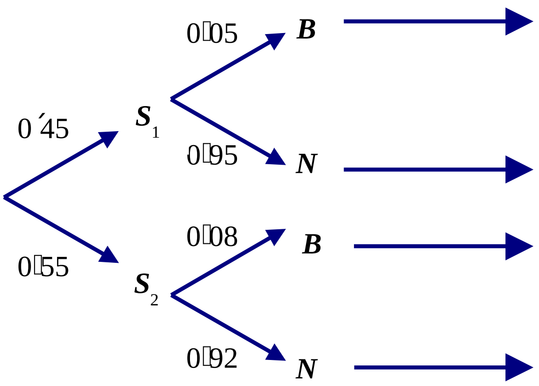
S_2 = "conectarse usando el servidor 2"

B = "se bloqueó la conexión"

N = "no se bloqueó la conexión"

Lo consideramos un experimento compuesto de dos fases. En la primera se elige el servidor para la conexión y en la segunda observamos si hay un bloqueo o no. Son fases dependientes, ya que la probabilidades de la segunda fase dependen del servidor con el que se realiza el acceso.

El siguiente diagrama de árbol expresa las diferentes posibilidades con sus respectivas probabilidades:



$p(S_1 \cap B) = 0'45 \cdot 0'05 = 0'0225$

$p(S_1 \cap N) = 0'45 \cdot 0'95 = 0'4275$

$p(S_2 \cap B) = 0'55 \cdot 0'08 = 0'044$

$p(S_2 \cap N) = 0'55 \cdot 0'92 = 0'506$

a) La probabilidad la tenemos en el árbol. Es:

$$p\left(S_1 \cap N\right) = 0'045 \cdot 0'095 = 0'4275$$

b) Es una probabilidad condicionada y "a posteriori":

$$p\left(S_1 / B\right) = \frac{p\left(S_1 \cap B\right)}{p(B)} = \frac{0'0225}{0'0225 + 0'044} \approx 0'3383$$

✗ <u>EJERCICIO 6</u>: La v. a. X = "vida de un automóvil" es normal con $\begin{array}{l} \mu = ¿? \\ \sigma = 12 \ \ meses \end{array}$

Muestra de tamaño: $n = ¿?$

Nivel de confianza: $p = 1 - \alpha \ = 0'95$ → Valor crítico: $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Error máximo admisible $E_{\text{máx}} = 3 \ \ meses$

Del error máximo obtendremos n:

$$E_{\text{máx}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 1'96 \cdot \frac{12}{\sqrt{n}} = 3 \rightarrow \sqrt{n} = \frac{1'96 \cdot 12}{3} = 7'84 \rightarrow n = 61'4\ldots$$

Tenemos así que n debe ser mayor que 61.

Ahora sabemos que la v. a. X es normal con $\begin{array}{l} \mu = 6 \ \ años \\ \sigma = 12 \ \ meses = 1 \ \ año \end{array}$.

Así, la distribución de medias muestrales $\overline{X}$ es normal con $\begin{array}{l} \bar{\mu} = 6 \ \ años \\ \bar{\sigma} = \dfrac{1}{\sqrt{25}} = 0'2 \ \ años \end{array}$

Tenemos así (tipificando y buscando en la tabla):

$$p\left(\overline{X} > 7\right) = p\left(Z > \frac{6'5 - 6}{0'2}\right) = p\left(Z > 2'5\right) = 1 - \varphi\left(2'5\right) = 1 - 0'9938 = 0'0062$$