Nombre: ____ **Curso 2º** ___	
Análisis – Mates Aplicadas II – 27/05/2006	

✗ Ejercicio 1: Una compañía que fabrica bolígrafos lanza al mercado un nuevo producto. Se supone que la relación entre el precio por unidad, x (céntimos), del nuevo bolígrafo y el beneficio en miles de euros, $b(x)$, viene dado por la función

$$b(x) = -x^2 + 130x - 3000$$

a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada bolígrafo a 50 cents.?

b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada bolígrafo para obtener un beneficio positivo?

c) Calcule a qué precio debe vender cada bolígrafo para que el beneficio sea máximo.

✗ Ejercicio 2: La gráfica de la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $(1,0)$ y tiene un extremo relativo en el punto $(0,4)$.

a) Halla los coeficientes a, b y c.

b) Averigua si es un máximo o es un mínimo.

✗ Ejercicio 3: Dada la función $g(x) = x^3 - 6x^2 + 20$:

a) Obtenga sus puntos máximos y los mínimos.

b) Halla la ecuación de la recta tangente en su punto de inflexión.

✗ Ejercicio 4: Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<2 \\ x^2-8x+17 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Represéntela gráficamente y estudie su continuidad y derivabilidad.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos.

c) Los extremos hallados anteriormente, ¿son puntos donde $f'(x)=0$?

✗ Ejercicio 5: Determine los valores que han de tomar "*a*" y "*b*" para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4x+b & \text{si } x<1 \\ ax^2+6x-7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea derivable.

✗ <u>Ejercicio 1</u>:

a) Sustituimos $x = 50$ en la fórmula:La media y la desviación típica poblaciones son, respectivamente:

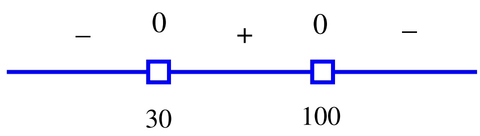
$$x=50 \to b(50)=-50^2+130\cdot 50-3000=1\,000$$

Como está miles de euros, resulta que el beneficio es de 1 000 000 de euros.

b) Estudiemos el signo de $b(x)$: si es positivo habrá beneficios y si es negativo habrá pérdidas:

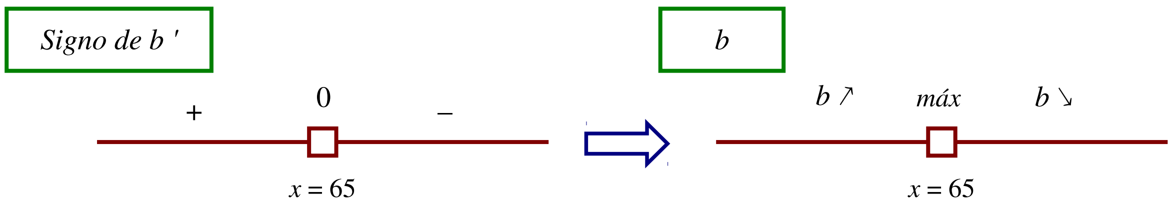
CEROS: $-x^2+130x-3000=0 \to x=\dfrac{-130\pm 70}{-2} \to x=30,\ x=100$

I. DE SIGNO:



Vemos que debe vender cada bolígrafo entre 30 y 100 céntimos (un ero) para obtener beneficios.

c) Vamos a estudiar el signo de la derivada y a obtener su máximo:



Vemos que el beneficio toma su valor máximo para una precio de venta de 65 céntimos.

✗ <u>Ejercicio 2</u>: Es $f(x)=x^3+ax^2+bx+c \xrightarrow{D} f'(x)=3x^2+2ax+b$

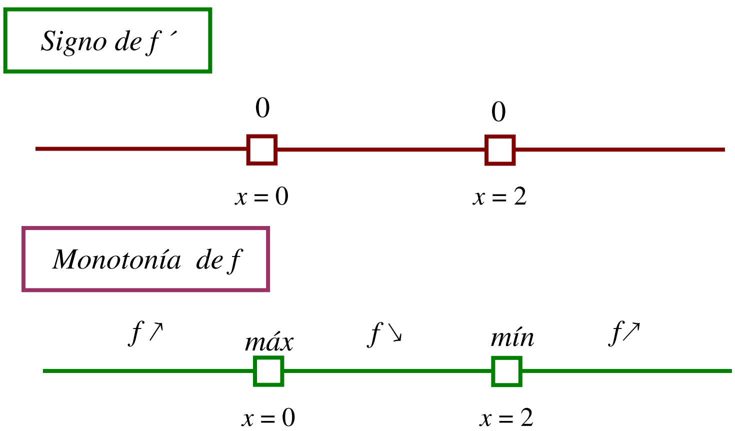
a) Pasa por el punto $(1,0)$ ⇨ debe ser $f(1)=0$ ⇨ $1+a+b+c=0$

Pasa por el punto $(0,4)$ ⇨ debe ser $f(0)=4$ ⇨ $c=4$

Tiene un extremo en $(0,4)$ ⇨ debe ser $f'(0)=0$ ⇨ $b=0$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos por fin $a=-5$

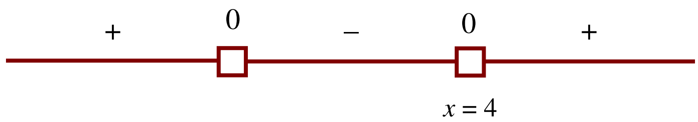
b) Es $f(x)=x^3-5x^2+4 \xrightarrow{D} f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$:



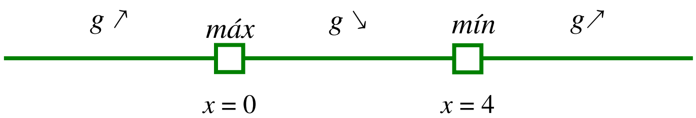
Vemos que $(0,4)$ es un máximo relativo.

✗ Ejercicio 3: $g(x)=x^3-6x^2+20 \xrightarrow[x=0]{D} g'(x)=3x^2-12x \xrightarrow{D} g''(x)=6x-12$

Signo de g´



Monotonía de g

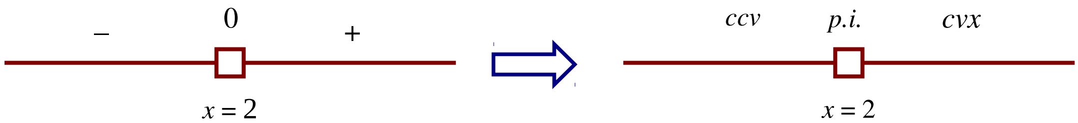


a) Para averiguar dónde están sus extremos estudiamos el signo de su derivada primera :

Deducimos que $(0,20)$ es un máximo relativo y que $(4,-12)$ es su mínimo relativo.

b) Para averiguar dónde está su punto de inflexión estudiamos el signo de su derivada segunda:

Signo de g'' *g*

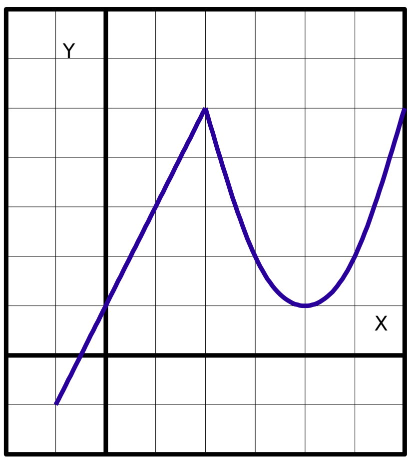


La ecuación de la recta tangente en su punto de inflexión ($a = 2$) es:

$$y-g(2)=g'(2)(x-2) \rightarrow y-4=-12(x-2) \rightarrow y=-12x+28$$

✗ Ejercicio 4:

a) La gráfica está formada por un trozo de parábola + trozo de recta:



Apreciamos en la gráfica que es continua en todo punto, y derivable para todo valor salvo para $x = 2$, donde vemos un punto anguloso. No obstante, vamos a estudiar su continuidad y su derivabilidad algebraicamente:

Continuidad: f sólo puede ser discontinua para $x = 2$:

$\boxed{x=2}$

VALOR:

si $x=2$ es $y=5$

TENDENCIAS:

$$\begin{cases} \text{si } x\to 2- \text{ es } y=2x+1\to 5 \\ \text{si } x\to 2+ \text{ es } y=x^2-8x+17\to 5 \end{cases}$$

Concluimos que es continua en $x = 2$.

Derivabilidad: directamente

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x<2 \\ 2x-8 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente

$\boxed{x=2}$

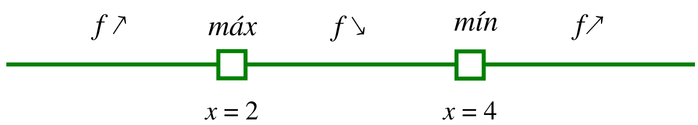
Como f es continua, puede ser derivable:

DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 2- \quad \text{es} \quad y'=2\to 2 \\ \text{si} \quad x\to 2+ \quad \text{es} \quad y'=2x-8\to -4 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que es no es derivable en este valor (es un *punto anguloso*).

b) A partir de la gráfica construimos el siguiente esquema que muestra la monotonía y los extremos:

Monotonía de f



c) En $x = 2$ la derivada no puede ser nula porque, como es un punto anguloso, no hay derivada.

En $x = 4$ la derivada sí es cero: $f'(4)=2\cdot 4-8=0$

✗ Ejercicio 5: Directamente:

$$f(x)=\begin{cases} 4x+b & \text{si} \quad x\le 1 \\ ax^2+6x-7 & \text{si} \quad x>1 \end{cases} \quad \overset{D}{\to} \quad f'(x)=\begin{cases} 4 & \text{si} \quad x<1 \\ 2ax+6 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Continuidad: f es continua en $x = 1$:

VALOR: si $x=1$ es $y=4+b$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 1- \quad \text{es} \quad y=4x+b\to 4+b \\ \text{si} \quad x\to 1+ \quad \text{es} \quad y=ax^2+6x-7\to a+6-7 \end{cases}$

Concluimos que debe ser $a-1=4+b$ (*)

Derivabilidad: f es derivable en $x = 1$:

DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 1- \quad \text{es} \quad y'=4\to 4 \\ \text{si} \quad x\to 1+ \quad \text{es} \quad y'=2a+6\to 2a+6 \end{cases}$

Concluimos que debe ser $2a+6=4$ (**)

Reuniendo (*) y (**): $a=-1$ y $b=-6$