| *Nombre:* ______________________________________________ *Curso 2º* ___ | |
| --- | --- |
| Análisis – Mates Aplicadas II – 27/05/2006 | |

✗ Ejercicio 1: Un agricultor comprueba que si el precio al que vende cada caja de fresas es "*x*" euros, su beneficio diario, en euros, será:

$$B(x) = -10x^2 + 100x - 210$$

a) Represente la función precio–beneficio.

b) Indique a qué precio debe vender cada caja de fresas para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál será ese beneficio máximo?

c) Determine a qué precios de la caja obtiene pérdidas el agricultor.

✗ Ejercicio 2: Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2$ en su punto de inflexión.

✗ Ejercicio 3: Dada la función $f(x) = x^3 + ax + b$ , calcule $a$ y $b$ para que $f$ tenga un extremo relativo en $(1, -2)$ . Averigua si es un máximo o es un mínimo.

✗ Ejercicio 4: Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^2 - 8x + 17 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Represéntela gráficamente y estudie su continuidad y derivabilidad.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos.

c) Los extremos hallados anteriormente, ¿son puntos donde $f'(x) = 0$ ?

✗ Ejercicio 5: Se sabe que la función

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

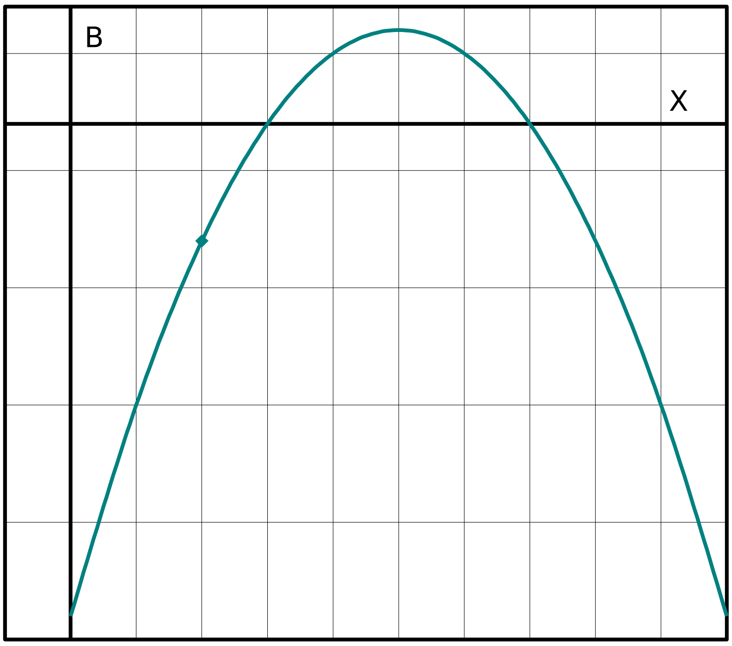
es continua en todo punto.

a) Averigua el valor de $a$.

b) Halla la derivada de *f*.

✗ Ejercicio 1:

a) Se trata de una parábola con vértice en $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{-20} = 50$ . Con una tabla de valores alrededor del vértice tenemos:



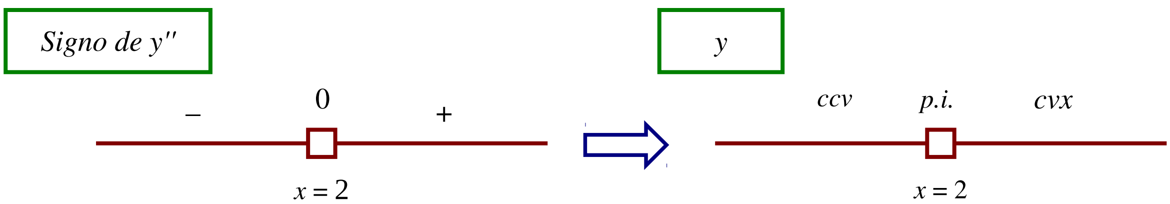

b) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$$B_{max} = 40\,€ \quad \text{para} \quad x = 5\,€$$

c) Hay beneficios cuando B > 0 (sobre el eje X) y pérdidas cuando B < 0 (bajo el eje X). De la gráfica tenemos entonces que obtiene pérdidas cuando el precio es menor de 3 € o mayor de 7 €.

✗ Ejercicio 2: Es $y = x^3 - 3x^2 \;\rightarrow\; y' = 3x^2 - 6x \;\rightarrow\; y'' = 6x - 6$

Para averiguar dónde está su punto de inflexión estudiamos el signo de su derivada segunda:




La ecuación de la recta tangente en su punto de inflexión ( $a = 2$ ) es:

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \;\rightarrow\; y + 2 = -3(x-2) \;\rightarrow\; y = -3x + 1$$

✗ Ejercicio 3: Es $f(x) = x^3 + ax + b \;\xrightarrow{D}\; f'(x) = 3x^2 + a$

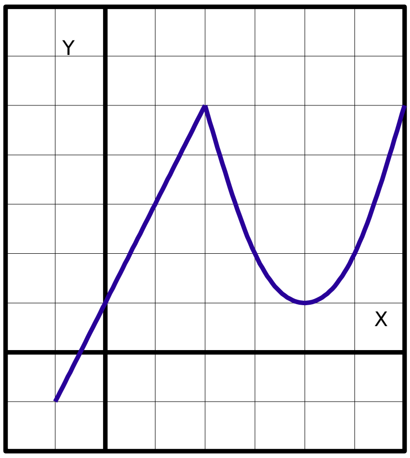
Pasa por el punto $(1, -2)$ ⇨ debe ser $f(1) = -2$ ⇨ $1 + a + b = -2$

Tiene un extremo en $(1, -2)$ ⇨ debe ser $f'(1) = 0$ ⇨ $3 + a = 0$

Resolviendo las ecuaciones: $a = -3$ , $b = 0$

✗ Ejercicio 4:

a) La gráfica está formada por un trozo de parábola + trozo de recta:




Apreciamos en la gráfica que es continua en todo punto, y derivable para todo valor salvo para $x = 2$, donde vemos un punto anguloso. Aún así estudiemos su continuidad y su derivabilidad algebraicamente:

Continuidad: $f$ sólo puede ser discontinua para $x = 2$:

$\boxed{x=2}$

VALOR: si $x=2$ es $y=5$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x \to 2- \quad \text{es} \quad y=2x+1 \to 5 \\ \text{si} \quad x \to 2+ \quad \text{es} \quad y=x^2-8x+17 \to 5 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x = 2$.

Derivabilidad: directamente

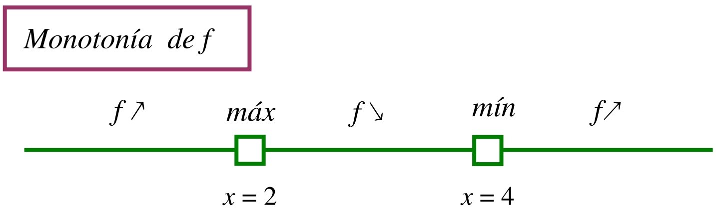
Veamos ahora detenidamente

Como $f$ es continua, puede ser derivable:

DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x \to 2- \quad \text{es} \quad y'=2 \to 2 \\ \text{si} \quad x \to 2+ \quad \text{es} \quad y'=2x-8 \to -4 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que es no es derivable en este valor (es un *punto anguloso*).

b) A partir de la gráfica construimos el siguiente esquema que muestra la monotonía y los extremos:




c) En $x = 2$ la derivada no puede ser nula porque, como es un punto anguloso, no hay derivada.

En $x = 4$ la derivada sí es cero: $f'(4)=2 \cdot 4-8=0$

✗ Ejercicio 5:

a) Tenemos que, en particular, $f$ es continua en $x = 2$:

VALOR: si $x=2$ es $y=2+a$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x \to 2- \quad \text{es} \quad y=x+a \to 2+a \\ \text{si} \quad x \to 2+ \quad \text{es} \quad y=\ln(x-1) \to \ln 1=0 \end{cases}$

Concluimos que debe ser $2+a=0 \quad \to \quad a=-2$ .

b) Directamente:

$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si} \quad x \le 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x>2 \end{cases} \quad \xrightarrow{D} \quad f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x<2 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Como $f$ es continua en $x = 2$ , puede ser derivable en este valor. Veamos

DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x \to 2- \quad \text{es} \quad y'=1 \to 1 \\ \text{si} \quad x \to 2+ \quad \text{es} \quad y'=\dfrac{1}{x-1} \to 1 \end{cases}$

Concluimos que $f$ es derivable con $f''(2)=1$ .

Queda, pues:

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$