Nombre: ____ ***Curso 2º*** ___ Matemáticas Aplicadas II – Matrices y Determinantes – 01/Dic/2005	

✗ Ejercicio 1: Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

a) [2] Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X+B^t=2C$.

b) [1] Ídem. $A^2-Y=C\,B$.

c) [1] Razona si existe alguna matriz que conmute con B.

d) [1] Calcule la matriz A^{1000}.

✗ Ejercicio 2: Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

a) [1] ¿Para qué valores de a la matriz tiene inversa?

b) [2] Halle la matriz inversa de A para $a = 0$.

✗ Ejercicio 3: Consideremos el sistema

$$S\equiv\begin{cases}3x-y+z=7\\ x+ay+z=0\\ 2x-y+z=a+3\end{cases}$$

a) [1] Resuelve matricialmente el sistema anterior cuando es $a = 0$.

b) [1] Averigua si es compatible indeterminado para algún valor de a.

José Álvarez Fajardo

✗ Ejercicio 1:

a) Observemos que la matriz A es cuadrada y que tiene inversa:

$$det\,A=1 \;\rightarrow\; A^{-1}=\frac{1}{det\,A}\cdot\left(Adj\,A\right)t=1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por ello para obtener X despejamos como sigue:

$$A\cdot X+B^t=2\,C \;\rightarrow\; A\cdot X=2\,C-B^t \;\rightarrow\; X=A^{-1}\cdot\left(2\,C-B^t\right)$$

Operando:

$$X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -3 & -1\\ -2 & 7 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -17 & -7\\ -2 & 7 & 3\end{pmatrix}$$

b) Es muy fácil despejar Y: $A^2-Y=CB \;\rightarrow\; Y=A^2-CB$.

Efectuando obtenemos su valor:

$$Y=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -4\\ 11 & 17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -11 & -16\end{pmatrix}$$

c) Buscamos una matriz M matriz que cumpla $BM=MB$.

Para que exista $B{\cdot}M$ debe tener M dos filas y para que exista $M{\cdot}B$ debe tener M tres columnas. De donde deducimos que M debe ser una matriz 2×3

De ahí resulta que $B{\cdot}M$ es 3×3 y $M{\cdot}B$ es 2×2 . Al no tener las mismas dimensiones no pueden ser iguales.

Concluimos que no existe ninguna matriz que conmute con B.

d) Calculemos las primeras potencias:

$$A^1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\; A^2=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix},\; A^3=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix},\; A^4=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 0 & 1\end{pmatrix},\; A^5=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix},\;\cdots$$

Por inducción obtenemos que es:

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 2\,n\\ 0 & 1\end{pmatrix},\; \forall\, n\geq 1$$

En particular, para $n = 1000$:

$$A^{1000}=\begin{pmatrix}1 & 2000\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

✗ Ejercicio 2:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero:

$$det\,A=3\,a-1-2-2\,a+3+1=a+1 \quad \left(a+1=0 \;\rightarrow\; a=-1\right)$$

Resulta así:

$a=-1 \;\rightarrow\; det\,A=0 \;\rightarrow\;$ No existe A^{-1}

$a\neq -1 \;\rightarrow\; det\,A\neq 0 \;\rightarrow\;$ Sí existe A^{-1}

b) $a=0 \rightarrow det\,A=1 \rightarrow$ Sí existe A^{-1}

Calculando los adjuntos: $Adj\,A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

De donde: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

✗ <u>Ejercicio 3</u>:

a) El sistema podemos expresarlo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (C \cdot X = B)$$

La matriz de los coeficientes es la misma del ejercicio anterior, así:

$$CX=B \rightarrow C^{-1}CX=C^{-1}B \rightarrow X=C^{-1}B$$

Operando obtenemos la solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b) Es $det\,C=a+1$

Por la Regla de Cramer tenemos que:

$$a \neq -1 \rightarrow det\,C \neq 0 \rightarrow S \text{ es compatible determinado}$$
$$a=-1 \rightarrow det\,C=0 \rightarrow S \text{ no es compatible determinado}$$

Veamos cómo es en este último caso resolviendo el sistema por el método de Gauss:

$$S: \left| e_2 \leftrightarrow e_1 \right\rangle \begin{cases} x-y+z=0 \\ 3x-y+z=7 \\ 2x-y+z=2 \end{cases} \begin{vmatrix} e_2-3e_1 \\ e_3-2e_1 \end{vmatrix}\rangle \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2y-2z=7 \\ y-z=2 \end{cases} \left| e_2 : 2 \right\rangle \begin{cases} x-y+z=0 \\ y-z=3'5 \\ y-z=2 \end{cases}$$

Como vemos, las dos últimas ecuaciones son incompatibles.

Conclusión: S no es compatible indeterminado para ningún valor de a.