8 CÁLCULO DE PROBABILIDADES

EXPERIENCIAS ALEATORIAS – SUCESOS

Se llama **experiencia aleatoria** a aquella en la que, bajo condiciones fijas, pueden ocurrir un número concreto de resultados, pero no es posible predecir cuál sucederá.

En una experiencia aleatoria se denomina:

- **Espacio muestral** –*E*– al conjunto de todos los posibles resultados.
- **Suceso** a cualquier subconjunto de *E*.
- **Suceso elemental** al formado por un único elemento de *E*.
- Entre los sucesos nos encontramos al **suceso imposible** $\emptyset$ y al **suceso seguro** *E*.

Los sucesos pueden definirse por **comprensión**, a través de una propiedad característica que lo determina, o por **extensión**, señalando cada uno de sus elementos.

OPERACIONES CON SUCESOS

Dados dos sucesos A y B, llamamos:

- Suceso **unión** $(A \cup B)$ al formado por la reunión de los resultados, los que están en A o en B y sucede cuando ocurre alguno de ellos.
- Suceso **intersección** $(A \cap B)$ al formado por los resultados comunes, los que están en A y en B y sucede cuando ocurren ambos.
- Suceso **diferencia** $(A \setminus B)$ al formado por los elementos de A y que no están en B.

El **contrario** del suceso A es el formado por los resultados que no están en A, esto es: $\overline{A} = E \setminus A$.

Diremos que los sucesos A y B son **incompatibles** cuando $A \cap B = \varnothing$.

Contrarios unión e intersección (Leyes de Morgan):

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad , \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

LA PROBABILIDAD COMO FRECUENCIA

Si realizamos n veces una experiencia aleatoria y un suceso A se verifica en $n(A)$ ocasiones, se llama **frecuencia relativa** de *A* al número

$$f(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Cuando $n \to \infty$ se tiene que $f(A)$ se estabiliza hacia cierto valor $\mathrm{p}(A)$, que llamaremos **probabilidad** del suceso *A*.

REGLA DE LAPLACE

Si el espacio muestral de una experiencia consta de un número **finito** de resultados que están en igualdad de condiciones de suceder (son **equiprobables**), la probabilidad de un suceso *A* es:

$$\mathrm{p}(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles}}$$

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

En todo experimento aleatorio se verifican estas propiedades elementales:

- La probabilidad es un número comprendido entre 0 y 1, de modo que $\mathrm{p}(\emptyset) = 0$ y $\mathrm{p}(E) = 1$.
- La probabilidad del suceso contrario cumple:
$$\mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(\overline{A}) = 1$$
- Las probabilidades de la unión y de la intersección están relacionadas por:
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA. INDEPENDENCIA

Si A y B son sucesos, se llama "probabilidad de B **condicionada** por A" o la "probabilidad de que ocurra B supuesto que ha sucedido A" a

$$\mathrm{p}(B/A) = \frac{\mathrm{p}(A \cap B)}{\mathrm{p}(A)}$$

donde $\mathrm{p}(A) \neq 0$.

Puede despejarse la probabilidad de la intersección:

$$\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B/A)$$

Decimos que A y B son **independientes** si el hecho de que uno ocurra no afecta a la probabilidad del otro:

$$\mathrm{p}(B/A) = \mathrm{p}(B)$$

Y esto sucede precisamente cuando

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

BY-NC-SA

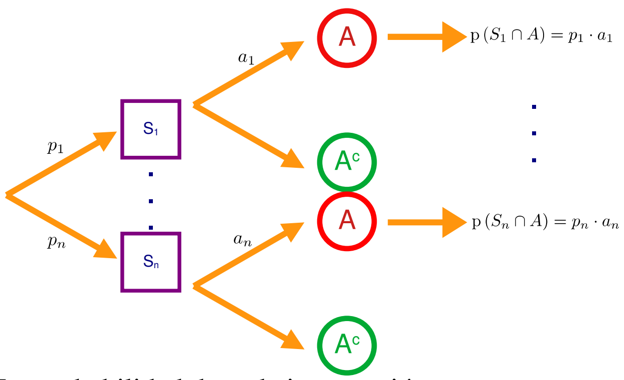
8 Cálculo de Probabilidades

Experimentos Compuestos

Hay experimentos aleatorios que pueden considerarse como la concatenación de varios experiencias "más simples". En ese caso se dice que cada uno de éstos es una **fase** o etapa, y que estamos ante un **experimento compuesto**.

En ellos normalmente encontramos un conjunto de sucesos incompatibles dos a dos que cubren todos los resultados posibles S_1, S_2, … , S_n (sistema completo de sucesos) y es fácil obtener las probabilidades de que ocurra un suceso A supuesto que han sucedido cada uno de ellos.

Es útil construir un diagrama de árbol y colocar en cada rama las probabilidades.



La probabilidad de cada intersección

$$\mathrm{p}\left(S \cap A\right) = \mathrm{p}\left(S\right) \cdot \mathrm{p}\left(A/S\right)$$

es el producto de las que nos encontramos en el camino.

Probabilidad Total

La probabilidad de A es el total de la suma de las probabilidades de los caminos que concluyen en él. Formulísticamente

$$\mathrm{p}\left(A\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{p}\left(S_k\right) \cdot \mathrm{p}\left(A/S_k\right)$$

Fórmula de Bayes

Cuando un suceso A ocurre al finalizar el experimento y nos interesamos por un suceso S_i que ocurrió previamente se dice que estamos ante una "probabilidad condicionada **a posteriori**".

Y a la fórmula de la probabilidad condicionada se la denomina de **Fórmula de Bayes**:

$$\mathrm{p}\left(S_i/A\right) = \frac{\mathrm{p}\left(S_i \cap A\right)}{\mathrm{p}\left(A\right)}$$

Y que es la siguiente bestiajo-fórmula que habitualmente vemos en los libros:

$$\mathrm{p}\left(S_i/A\right) = \frac{\mathrm{p}\left(S_i\right) \cdot \mathrm{p}\left(A/S_i\right)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{p}\left(S_k\right) \cdot \mathrm{p}\left(A/S_k\right)}$$

(cc) BY-NC-SA