6 INTEGRALES

PRIMITIVA E INTEGRAL INDEFINIDA

Sea f una función continua definida en el intervalo I

a) Una primitiva de f es una función F que cumple $F' = f$ en I.

b) Al proceso por el que se obtiene F a partir de f se le llama integración.

c) Cualquier primitiva de $y = f(x)$ es de la forma $y = F(x) + C$ donde C es una constante cualquiera.

d) Esto se expresa con la notación de Leibnitz:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

y se dice que la integral indefinida de $y = f(x)$ es $y = F(x) + C$.

LINEALIDAD

Si f y g son funciones continuas definidas en el intervalo I, para todo par de números α y β es:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

TABLA INTEGRALES (SIMPLES)

$$\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

TABLA DE INTEGRALES COMPUESTAS

De la Regla de la Cadena se deduce:

$$\int u'(x)\,u(x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}u(x)^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|u(x)| + C$$

$$\int u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{u(x)} + C$$

$$\int u'(x)\,\cos u(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} u(x) + C$$

$$\int u'(x)\,\operatorname{sen} u(x)\,\mathrm{d}x = -\cos u(x) + C$$

REGLA DE BARROW

Si es f una función continua en el intervalo $[a\,,b]$ y F es una primitiva suya, entonces es:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

PROPIEDADES BÁSICAS

Aditividad respecto del intervalo

Si es f continua en el intervalo $[a\,,b]$ y c es un punto de este intervalo:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Linealidad respecto del integrando

Si f y g son funciones continuas en $[a\,,b]$ y α y β son constantes, entonces

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

CÁLCULO DE ÁREAS

Sea $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a\,,b]$ y consideremos el recinto $\mathscr{R}$ delimitado por la gráfica de f y el eje de abscisas entre $x = a$ y $x = b$.

Si $f \geq 0$ en $[a\,,b]$ entonces

$$a(\mathscr{R}) = \int_a^b f$$

Si $f \leq 0$ en $[a\,,b]$ entonces

$$a(\mathscr{R}) = -\int_a^b f$$

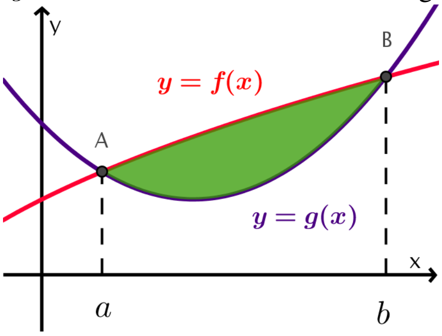
Si $f \geq 0$ en $[a\,,c]$ y $f \leq 0$ en $[c\,,b]$ entonces:

$$a(\mathscr{R}) = \int_a^c f - \int_c^b f$$

6 INTEGRALES

ÁREA ENTRE DOS CURVAS

Sean f y g funciones continuas como en la gráfica:



El área del recinto dibujado, que se forma entre los puntos de corte de ambas gráficas, viene dada por

$$a(\mathscr{R}) = \int_a^b (f - g)$$