4a Funciones, Gráficas y Operaciones

Conceptos Básicos

Una **función** real *f* es una transformación que a cada número x le hace corresponder exactamente un número designado por $y = f(x)$: $x \xrightarrow{f} y$

El número x es llamado **original**, y se llama **dominio** de la función al conjunto de todos los originales.

Al número y se le llama "transformado o **imagen**", siendo el **recorrido** el conjunto de todas las imágenes

Una función queda definida por una fórmula, una tabla de valores (tal vez indefinida) o una gráfica.

Un ejemplo de función es

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

Aquí $x = 1$ no está en su dominio($\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{1\}$).

Una función $y = f(x)$ forma parejas de números $(x\,,y)$ que podemos colocar en tablas de valores.

Si dibujamos esas parejas en plano cartesiano XY aparece una línea que es la gráfica de la función: cada punto de la gráfica es una pareja de la tabla.

Gráficas de Funciones Elementales

Función afín: es $y = mx + n$ una recta. El número *m* es llamado pendiente de la recta.

Función cuadrática: es $y = ax^2 + bx + c$ una parábola de eje vertical con vértice para $x_v = \dfrac{-b}{2a}$.

Función valor absoluto: es $y = |f(x)|$. La gráfica puede construirse a partir de $y = f(x)$ reflejando respecto del eje X la parte negativa (bajo el eje).

Función a trozos: su gráfica está construida tomando partes de varias funciones. Por ejemplo, la de

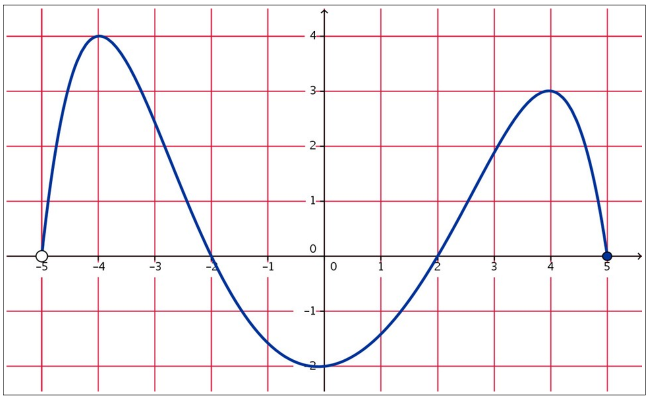
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

es el "trozo de parábola" $y = x^2 + 2x$ para $x < 1$ y el "trozo de recta" $y = 2x + 1$ para $x \geq 1$.

A la hora de dibujarla manualmente hemos de construir tantas tablas de valores como trozos y en ellas deben aparecer siempre los **separa-fórmulas** (incluidos-cerrados ó excluidos-abiertos).

Características Básicas de una Gráfica

Destacamos en la gráfica:



<u>Dominio</u> (conjunto de valores *x* donde hay gráfica):

$$\mathbb{D} = (-5\,,+5]$$

<u>Recorrido</u>: (conjunto de valores *y* donde hay gráfica):

$$R = [-2\,,+4]$$

<u>Continuidad</u> (¿podemos dibujar con un solo trazo -continua- o presenta agujeros, roturas, saltos,... -discontinua-?):

Es continua para todos los valores de su dominio. Ahora bien, hay una singularidad: para $x = -5$ hay agujero en el inicio de la gráfica (es denominado discontinuidad evitable).

<u>Signo</u>:

- Ceros (cortes con el eje X): $x = -2\,,2\,,5$
- Positiva (sobre el eje X): $(-5\,,-2) \cup (2\,,5)$
- Negativa (bajo el eje X): $(-2\,,2)$

<u>Monotonía</u> (crecimiento / decrecimiento):

f ↗ en $(-5\,,-4]$ y en $[0\,,4]$

f ↘ en $(-5\,,-4]$ y en $[0\,,4]$

<u>Acotación</u>: vemos que la función está acotada. Tanto superiormente ($y = 5$ es cota superior) y acotada inferiormente ($y = -3$) es cota inferior.

<u>Extremos</u> (máximos y mínimos):

Máx. relativos: $A = (-4\,,4)$ (absoluto) y $C = (4\,,3)$.

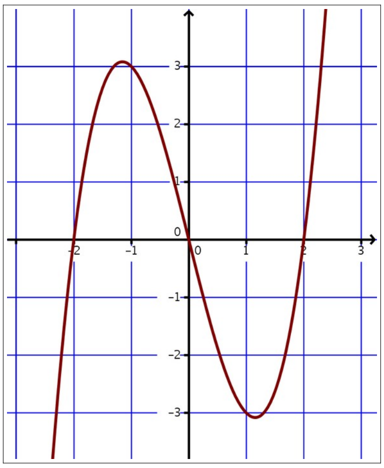
Mín. relativos: $B = (0\,,-2)$ (absoluto) y $D = (6\,,0)$

No hay <u>asíntotas</u> ni es <u>periódica</u>.

4a FUNCIONES, GRÁFICAS Y OPERACIONES

FUNCIONES POLINÓMICAS

Aquí dibujada la curva de tercer grado $y = x^3 - 4x$:



Está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$. En esas curvas destacamos los extremos relativos y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

Tendencias de prolongación: ramas izquierda-abajo y derecha-arriba. Simbólicamente se expresa

Si $x \to -\infty$ es $y \to -\infty$, Si $x \to +\infty$ es $y \to +\infty$

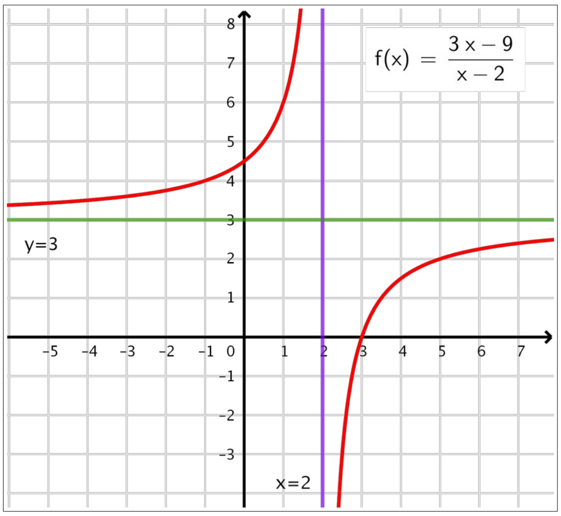
HIPÉRBOLAS BÁSICAS

Las **hipérbolas** básicas son las gráficas de fórmula

$$y = \frac{bx + c}{x - a}$$

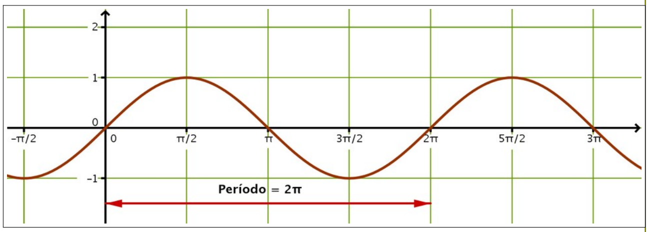
Tienen dos ramas inconexas situadas entre dos rectas llamadas asíntotas, vertical $x = a$ y horizontal $y = b$, que sirven de guías de prolongación.

Presentan una "discontinuidad de salto infinito".



ONDAS TRIGONOMÉTRICAS

Aquí representada usando Geogebra la función seno:

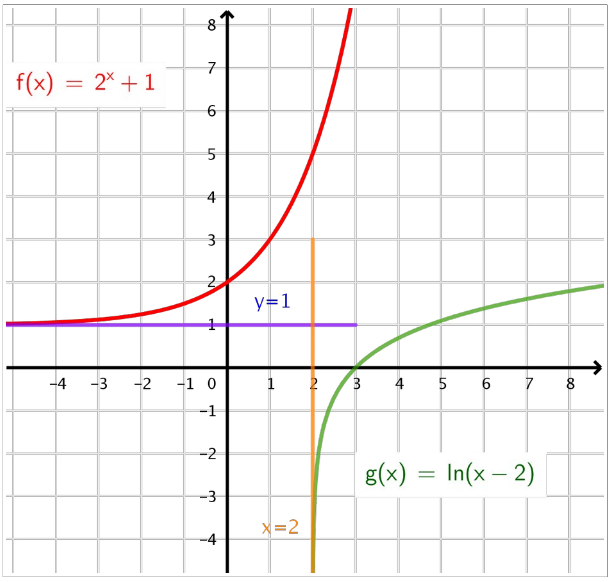


La línea obtenida se denomina curva **sinusoidal**. Está definida y es continua en toda la recta real. Observa su forma de onda y un aspecto fundamental: su periodicidad. Es una función 2π-periódica. Varía entre $y = -1$ e $y = +1$.

La del coseno está desplazada $\pi/2$: pasa por $P(0\,,1)$.

EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Se han dibujado dos gráficas con Geogebra:



La **exponencial** está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$. Su prolongación es muy diferente a izquierda y derecha.

La dibujada tiene una asíntota horizontal.

La **logarítmica** sólo está definida cuando el argumento del logaritmo es positivo:

$$x - 2 > 0 \to x > 2 \to \mathbb{D} = (2\,, +\infty)$$

Y tiene una asíntota vertical cuando el argumento del logaritmo es cero.

4a FUNCIONES, GRÁFICAS Y OPERACIONES

OPERACIONES

Dadas f y g, para x común a sus dominios, se define:

- La suma $f+g$ como $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
- La resta $f-g$ como $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$
- El producto $f\cdot g$ como $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$
- El cociente $\dfrac{f}{g}$ como $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

En este caso, observa que deberá ser $g(x) \neq 0$.

La composición $f\circ g$ de las dos funciones f y g se define mediante:

$$(f\circ g)(x) = f\,[g(x)]$$

La función f actúa sobre el resultado de la función g:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & g(x) \arrow[r, "f"] & (f\circ g)(x) \end{tikzcd}$$

Por ejemplo, si

$$f(x) = 3x+1\,,\; h(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+2 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

es:

$(f\circ h)(-1) = f\,[h(-1)] = f(-4) = -11$

$(h\circ f)(-1) = h\,[f(-1)] = h(-2) = -5$

FUNCIÓN INVERSA

Si f asocia a cada $x\in\mathbb{D}$ un único $y\in\mathbb{I}$, la inversa es la función f^{-1} que a cada imagen $y\in\mathbb{I}$ le asocia su original $x\in\mathbb{D}$.

Para calcular su fórmula:

$$y = f(x) \xrightarrow[x]{despejando} x = f^{-1}(y)$$

Por ejemplo , para calcular la inversa de la función dada por $f(x) = \sqrt[5]{3x-2}$, hacemos:

$$y = \sqrt[5]{3x-2} \;\rightarrow\; 3x-2 = y^5 \;\rightarrow\; x = \frac{y^5+2}{3}$$

Luego

$$f^{-1}(y) = \frac{y^5+2}{3}$$