2 Matrices y Determinantes

Generalidades

Una **matriz** es una **tabla numérica** de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m\,1} & \cdots & a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

- Se dice que es una matriz de **dimensiones** $m \times n$, ya que tiene m **filas** y n **columnas**.
- Al elemento que ocupa la fila i y la columna j se le designa por $a_{i\,j}$.

Dos matrices son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y coinciden los términos que ocupan el mismo lugar en ambas.

La **traspuesta** de la matriz A $(m \times n)$ es la matriz A^t $(n \times m)$ que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas.

Algunos tipos de matrices:

- **Matriz fila**: aquella que tiene una única fila.
- **Matriz columna**: aquella con una sola columna.
- **Matriz nula** : la que tiene todos sus elementos igual a cero.
- **Matriz cuadrada** : la que tiene igual número de filas y columnas.
- **Matriz unidad**: matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal son todos unos y los restantes son todos ceros. Se la designa I_n.

Suma y Producto Por Escalares

La **suma** de las matrices A y B , con las mismas dimensiones, es otra matriz C de la misma dimensión con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Dicha matriz se designa por $A + B$.

La **opuesta** de $A = (a_{ij})$ es $-A = (-a_{ij})$.

La **resta** de las matrices A y B, con las mismas dimensiones, es $A - B = A + (-B)$.

El **producto del número** real k **por una matriz** A es otra matriz de iguales dimensiones, que se obtiene al multiplicar cada elemento de A por dicho número.

Producto de Matrices

Si A una matriz de dimensiones $m \times p$ y B es de dimensiones $p \times n$, la **matriz producto** $C = A \cdot B$ es la de dimensiones $m \times n$ con

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

Importante recordar:

1. En un producto el número de columnas de la primera es el número de filas de la segunda.
2. El producto de matrices **no es conmutativo**.

Matriz Inversa

Sean A y B cuadradas de orden n. Se dice que B es inversa de A si

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Dicha inversa es única y se escribe $B = A^{-1}$.

1. Sólo las matrices cuadradas pueden tener inversa.
2. No toda matriz $A \neq \mathrm{O}$ tiene inversa.

Determinantes

El **determinante** de una matriz cuadrada es un **número** que se halla a través de una fórmula.

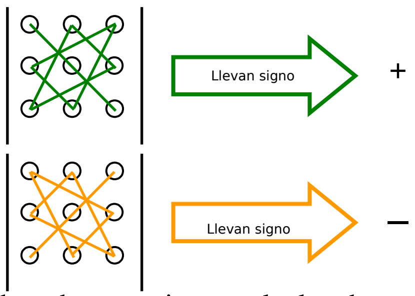
- Determinantes de orden 1:

$$\det(\alpha) = \alpha$$

- Determinantes de **orden 2**:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

- Para los de **orden 3** recordemos la regla de **Sarrus**:



- Los de orden superior se calculan desarrollando por una línea.

Inversa: Cálculo con Determinantes

Sea A una matriz cuadrada.

El **adjunto** del elemento $a_{i\,j}$, designado por A_{ij}, es el producto del número $(-1)^{i+j}$ por el determinante que se obtiene al eliminar en A la fila i y la columna j.

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

- A es invertible siempre y cuando es $\det(A) \neq 0$.
- Si $\det(A) \neq 0$ la inversa de A es la matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\mathrm{Adj}\ A)^t$$

con $\mathrm{Adj}(A) = (A_{i\,j})$ la matriz de los adjuntos de A

2 MATRICES Y DETERMINANTES

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.
2. El determinante de la matriz producto es igual al producto de los determinantes de los factores.
3. Un determinante cambia de signo al permutar dos líneas paralelas.
4. Si multiplicamos una línea de un determinante Δ por un número k obtenemos un determinante cuyo valor es igual a Δ multiplicado por k.
5. Un determinante no cambia si a una línea añadimos una combinación lineal de otras paralelas.
6. Consecuencias: un determinante es cero cuando alguna de sus líneas es combinación lineal de otras paralelas. En particular, si tiene una línea de ceros, dos líneas paralelas idénticas o proporcionales.

DESARROLLO POR UNA LÍNEA

Un determinante es igual a la suma de los elementos de una línea cualquiera multiplicados por sus correspondientes adjuntos.

SISTEMAS: RESOLUCIÓN MATRICIAL

La **expresión matricial** de un sistema lineal es:

$$C \cdot X = B$$

donde C es la matriz de coeficientes, X la de las incógnitas y B la de los términos independientes.

Si la matriz C de los coeficientes es cuadrada e invertible, es posible **resolver** el sistema **matricialmente**, usando la matriz inversa de la siguiente forma:

$$CX = B \to C^{-1}CX = C^{-1}B \to X = C^{-1}B$$

SISTEMAS: REGLA DE CRAMER

Sea S el sistema de n ecuaciones con n incógnitas

Si el determinante de los coeficientes es distinto de cero, entonces el sistema es compatible determinado.

La solución viene dada por

$$x_k = \frac{\det(C_{x_k})}{\det(C)} \quad , \quad k = 1, \ldots, n$$

donde C_{x_k} es a la matriz que se obtiene al sustituir en C la columna k por los términos independientes.

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Las transformaciones elementales de Gauss en una matriz son:

- Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
- Añadir a una fila una combinación lineal de otras.
- Permutar filas.

El método de Gauss es un procedimiento que basa en aplicarlas hasta llegar a una meta: resolver sistemas, hallar la inversa de una matriz, calcular rangos,...

INVERSA (CÁLCULO POR GAUSS)

Para calcular la inversa de la matriz cuadrada A:

1. Colocamos la matriz A junto a la matriz identidad:
$$\left(\; A \mid \mathrm{I} \; \right)$$
2. Sometemos las **filas** a transformaciones elementales hasta A se transforme en la identidad:
$$\left(\; A \mid \mathrm{I} \; \right) \to \left(\; \mathrm{I} \mid B \; \right)$$
3. La matriz B en que se vuelve I es la inversa de A:
$$B = A^{-1}$$

Las transformaciones elementales válidas son:

- Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
- Añadir a una fila una combinación lineal de otras.
- Permutar filas.

Cuidado: si en algún momento una de las filas de A se transforma en una línea de ceros, entonces la matriz no tiene inversa.

RANGO (CÁLCULO POR GAUSS)

Se llama rango de una matriz al número de filas no nulas que aparecen al escalonarla aplicando las transformaciones elementales de Gauss.

Por ejemplo:

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Propiedad básica del rango:

Sometiendo una matriz a una transformación elemental de Gauss obtendremos otra de igual rango.