$$X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}}$$

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^5 = \{\text{Vemos que es}\} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

n impar $\longrightarrow A^n = \begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{2017} = \begin{pmatrix} -1 & 2017 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

n par $\longrightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{2016} = \begin{pmatrix} 1 & -2016 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por induuuuuccción

EJERCICIO 3

Sea la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 28 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determine para qué valores de λ tiene inversa la matriz $\boxed{F = \lambda I - E}$.

b) [1] Obtenga la inversa de F para $\lambda = 1$.

c) [0,75] Estudie el rango de F según los valores de λ.

a)

$$\lambda \cdot I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow F = \lambda \cdot I - E = \begin{bmatrix} \lambda-7 & -1 & 2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -28 & -4 & \lambda+8 \end{bmatrix}$$

$$\det(F) = \lambda \cdot (\lambda^2 + 8\lambda - 7\lambda - 56) + 56\lambda = \lambda(\lambda^2 + \lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda + 1)$$

$\det(F) = 0$:

- $\lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda = 0$
- $\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

Aclaramos: Si $\lambda = 0$ ó $\lambda = -1 \Rightarrow \det(F) = 0 \Rightarrow F$ no tiene inversa

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1 \Rightarrow \det(F) \neq 0 \Rightarrow F$ sí tiene inversa

(b) $\lambda = 1 \longrightarrow F = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -28 & -4 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow F^{-1} = \frac{1}{\det(F)} \cdot Adj(F)^t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 28 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

$\det(F) = 1^2 \cdot (1+1) = 1 \cdot 2 = 2$

$F_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = 9$ $\quad F_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -28 & 9 \end{vmatrix} = 0$ $\quad F_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -28 & -4 \end{vmatrix} = 28$

$F_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = 1$ $\quad F_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -28 & 9 \end{vmatrix} = 2$ $\quad F_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -28 & -4 \end{vmatrix} = 4$

$F_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$ $\quad F_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad F_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -6$

c)

$F = \begin{bmatrix} \lambda-7 & -1 & 2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -28 & -4 & \lambda+8 \end{bmatrix}$ $\qquad \det(F) = \lambda^2(\lambda+1) = 0 < \begin{matrix} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{matrix}$

Caso1 : Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1 \Rightarrow \Delta_3 = \det(F) \neq 0 \Rightarrow rg(F) = 3$

Caso 2: Si $\lambda = 0 \longrightarrow F = \begin{bmatrix} -7 & -1 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -28 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \Delta_3 = |F| = 0 \\ \cdot\ \Delta_2 = 0 \quad (\text{todos}) \\ \cdot\ \Delta_1 = 2 \neq 0 \end{array}\right\} rg(F) = 1$

Caso 3: Si $\lambda = -1 \longrightarrow F = \begin{bmatrix} -8 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -28 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \Delta_3 = |F| = 0 \\ \cdot\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right\} rg(F) = 2$

EJERCICIO 2

Sea D una matriz cuadrada con determinante -3 y cuyas respectivas filas son f_1, f_2, f_3 y designemos a la matriz identidad de orden 3 por I.

a) [1] Obtén razonadamente el determinante de las matrices $2D$ y D^{-1}.

b) [0,75] Averigüe el valor del determinante cuyas filas son

$$3f_1\ ,\ 2f_3 - f_1\ ,\ f_2$$

c) [0,75] Demuestra que no puede existir una matriz Y que cumpla $Y^t \cdot D \cdot Y = 3\mathrm{I}$.

$\det(D) = -3$

$D = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$

a) $\det(2D) = \det \begin{bmatrix} 2f_1 \\ 2f_2 \\ 2f_3 \end{bmatrix} \overset{*}{=}$