Sea la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 28 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determine para qué valores de λ tiene inversa la matriz $F = \lambda \mathrm{I} - E$.

b) [1] Obtenga la inversa de F para $\lambda = 1$.

c) [0,75] Estudie el rango de F según los valores de λ.

Bollullos 24 febrero 2021.

a) Calculamos F.

$$F = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - E = \boxed{\begin{pmatrix} \lambda-7 & -1 & +2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -28 & -4 & \lambda+8 \end{pmatrix}} \leftarrow F$$

Calculamos $\det(F) = \lambda(\lambda^2+8\lambda-7\lambda-56) + 56\lambda = \lambda(\lambda^2+\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$

Igualamos a cero:

$$\lambda^2(\lambda+1) = 0 \begin{cases} \lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda = 0 \\ \lambda+1 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \end{cases}$$

Aclaramos:

Si $\lambda = 0$ ó $\lambda = -1 \Rightarrow \det(F) = 0 \Rightarrow$ F no tiene inversa.

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1 \Rightarrow \det(F) \neq 0 \Rightarrow$ F sí tiene inversa.

b) $\lambda = 1 \rightarrow$ $F = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -28 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

$F^{-1} = \dfrac{1}{\det(F)} \cdot \mathrm{Adj}(F)^t =$

$\det(F) = 1^2 \cdot (1+1) = 2$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 28 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = 9 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -28 & -4 \end{vmatrix} = +28$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -28 & 9 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -28 & -4 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

c)

$$F = \begin{bmatrix} \lambda-7 & -1 & 2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -28 & -4 & \lambda+8 \end{bmatrix} \qquad \det(F) = \lambda^2(\lambda+1) = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

ⓐ Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1 \Rightarrow \Delta_3 = \det(F) \neq 0 \Rightarrow rg(F) = 3$

ⓑ Si $\boxed{\lambda = 0} \longrightarrow \Delta_3 = \det(F) = 0$

$$F = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -28 & -4 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Todos los } \Delta_2 = 0$$

$\Big\}\ rg(F) = 1$

ⓒ Si $\lambda = -1 \longrightarrow \Delta_3 = \det(F) = 0$

$$F = \begin{bmatrix} -8 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -28 & -4 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{En } \Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Big\}\ rg(F) = 2$

Discute el rango de la siguiente matriz, según los valores de x:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{matrix}} & x \\ x+2 & & 2 \\ 4 & x-2 \quad 5 & x+2 \end{pmatrix}$$

Bollullos a 25 febrero de 2021

Encontramos $\Delta_1 = -2 \neq 0$

Y encontramos $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.$

Orlamos:

$$\Delta_3^1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & x \\ 1 & 5 & 2 \\ x-2 & 5 & x+2 \end{vmatrix} = -\cancel{10x} - \cancel{20} + 5x - 5x^2 + \cancel{10x} + \cancel{20}$$

$$= -5x^2 + 5x = 5x(-x+1) = 0 \begin{cases} 5x = 0 \to x = 0 \\ -x+1 = 0 \to x = 1 \end{cases}$$

$$\Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ x+2 & 1 & 5 \\ 4 & x-2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 40 - 5x + 10 + 10x + 20 = 5x - 5 = 0$$

$$\downarrow$$

$$x = 1$$

Si $x \neq 1 \longrightarrow \Delta_3^2 \neq 0 \longrightarrow rg(G) = 3$

Si $x = 1 \longrightarrow \left.\begin{matrix} \Delta_3^2 = 0 \text{ y } \Delta_3^1 = 0 \\ \Delta_2 \neq 0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow rg(G) = 2$

? $D = (A-B) \cdot C^t$ existe y C es 2×3 y D tiene 4 filas. ¿ Dimensiones de todas?

Dimensiones de todas las matrices.

- C^t es 3×2
- A es 4×3
- B es 4×3
- D es 4×2

$\underline{(A-B)} \cdot \underline{C^t} \leftarrow \underline{4}$ filas

$4 \times \boxed{3} \quad 3 \times 2$