Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & c & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Halle los valores de a, b y c para que se verifique $B \cdot C^t + 4A = O$.

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - A^2 = 3I$.

c) [0,75] Obtén razonadamente A^{2016} y A^{2017}.

Bollullos 22 febrero 2021.

a)

$$B \cdot C^t = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & c & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 & -4 \\ -b+c+1 & -2b+2 \end{pmatrix}$$

$$4A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C^t + 4A = \begin{pmatrix} a-6 & 0 \\ -b+c+1 & -2b-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a-6=0 \rightarrow \boxed{a=6} \\ -b+c+1=0 \;\; > c = b-1 \rightarrow \boxed{c=-2} \\ \quad 0 = 0 \\ -2b-2=0 \rightarrow \boxed{b=-1} \end{cases}$$

b)

$$X \cdot A - A^2 = 3I$$

$$X \cdot A = 3I + A^2$$

$$X = (3I + A^2) \cdot A^{-1} \longrightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = (-1)\cdot(-1) - 0 \cdot 1 = 1$$

$A_{11} = (-1)^2 \cdot (-1) = -1$	$A_{12} = (-1)^3 \cdot 0 = 0$
$A_{21} = (-1)^3 \cdot 1 = -1$	$A_{22} = (-1)^4 \cdot (-1) = -1$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) $A^1=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Por inducción:

n par $\longrightarrow A^n=\begin{pmatrix}1 & -n\\ 0 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{A^{2018}=\begin{pmatrix}1 & -2018\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

n impar $\longrightarrow A^n=\begin{pmatrix}-1 & n\\ 0 & -1\end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{A^{2017}=\begin{pmatrix}-1 & 2017\\ 0 & -1\end{pmatrix}}$

Sea D una matriz cuadrada con determinante -3 y cuyas respectivas filas son f_1, f_2, f_3 y designemos a la matriz identidad de orden 3 por I.

a) [1] Obtén razonadamente el determinante de las matrices $2D$ y D^{-1}.

b) [0,75] Averigüe el valor del determinante cuyas filas son

$$3f_1\ ,\ 2f_3-f_1\ ,\ f_2$$

c) [0,75] Demuestra que no puede existir una matriz Y que cumpla $Y^t\cdot D\cdot Y=3\mathrm{I}$.

$D=\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{bmatrix}$ $\quad \det(D)=-3$

a) $\det(2D)=\det\begin{bmatrix}2f_1\\ 2f_2\\ 2f_3\end{bmatrix}=2\cdot 2\cdot 2\cdot \underbrace{\det\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{bmatrix}}_{-3}=\boxed{-24.}$

$D\cdot D^{-1}=I \longrightarrow \underbrace{\det(D)}_{-3}\cdot\det(D^{-1})=\underbrace{\det(I)}_{1}\longrightarrow \boxed{\det(D^{-1})=\frac{1}{-3}}$

b) $\det\begin{bmatrix}3f_1\\ 2f_3-f_1\\ f_2\end{bmatrix}=3\cdot\det\begin{bmatrix}f_1\\ 2f_3-f_1\\ f_2\end{bmatrix}=3\cdot\det\begin{bmatrix}f_1\\ 2f_3\\ f_2\end{bmatrix}=6\cdot\det\begin{bmatrix}f_1\\ f_3\\ f_2\end{bmatrix}=-6\cdot(-3)=18$

F_2+F_1 $\quad F_2\leftrightarrow F_3$

c) $Y^t\cdot D\cdot Y=3I \rightarrow |Y^t|\cdot|D|\cdot|Y|=|3I|\longrightarrow$

$$\rightarrow \underbrace{|Y|}\cdot\underbrace{|D|}\cdot\underbrace{|Y|} = \underbrace{|3I|} \longrightarrow |Y|^2\cdot(-3) = 27 \longrightarrow |Y|^2 = \frac{27}{-3} \rightarrow$$

$$\rightarrow |Y|^2 = -9 \rightarrow$$ NO, IMPOSIBLE.