TEMA 8

EL ESPACIO EUCLÍDEO

Contenidos	Criterios de Evaluación
1. Producto escalar. 2. Producto vectorial. 3. Producto mixto. 4. Perpendicularidad. 5. Distancias. 6. Ángulos Tiempo estimado 16 sesiones	1. Conocer el producto escalar de dos vectores, sus propiedades e interpretación geométrica. 2. Conocer el producto vectorial de dos vectores y saber aplicarlo para determinar un vector perpendicular a otros dos, y para calcular áreas de triángulos y paralelogramos. 3. Conocer el producto mixto de tres vectores y saber aplicarlo para calcular el volumen de un tetraedro y de un paralelepípedo. 4. Saber plantear y resolver razonadamente problemas métricos, angulares y de perpendicularidad (por ejemplo: distancias entre puntos, rectas y planos, simetrías axiales, ángulos entre rectas y planos, vectores normales a un plano, perpendicular común a dos rectas, etc.).

1.Producto escalar

❑ Definición y operaciones.

Para el estudio con ángulos o distancias se introduce el producto escalar:

Se llama producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ de los vectores $\vec{u}=(u_1\,,u_2\,,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1\,,v_2\,,v_3)$ al número dado por:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

Importante: el producto escalar de dos vectores es un número (no un vector).

☞ Ejemplo: el producto de escalar de $\vec{u}=(-3\,,1\,,4)$ y $\vec{v}=(4\,,0\,,3)$ es:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot(-3)+1\cdot 4=-5$$

Aquí tenemos recogidas las propiedades más importantes:

Conmutatividad:	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
Asociatividad mixta:	$\vec{u}\cdot(t\vec{v})=(t\vec{u})\cdot\vec{v}=t(\vec{u}\cdot\vec{v})$
Distributividad:	$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
Positividad:	$\vec{u}\cdot\vec{u}>0$ si $\vec{u}\neq\vec{0}$.

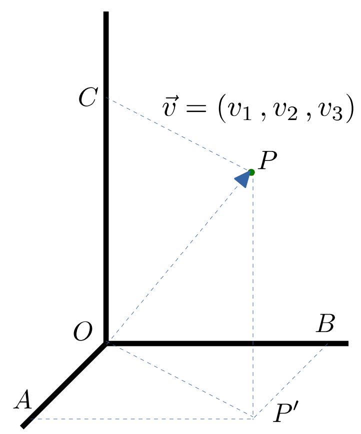
- Prueba: veamos la última. Si es $\vec{u}=(u_1\,,u_2\,,u_3)\neq(0\,,0\,,0)$ entonces

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=u_1u_1+u_2u_2+u_3u_3=u_1^2+u_2^2+u_3^2>0$$

❑ Módulo y producto escalar.

El módulo del vector $\vec{v}=(v_1\,,v_2\,,v_3)$ es el número dado por

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$



¿Qué mide ese número? Observemos el vector $\vec{v}=(v_1\,,v_2\,,v_3)$ dibujado al margen. Por el Teorema de Pitágoras (aplicado dos veces) es:

$$\overline{OP}^2=\overline{OP'}^2+\overline{PP'}^2=\overline{BP'}^2+\overline{OB}^2+\overline{PP'}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2$$

O lo que es igual:

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

☞ Nota: observemos que es

$$|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

☞ Ejemplo: demos un vector unitario con igual dirección que $\vec{v}=(3\,,4\,,0)$.

Si dividimos el vector por su longitud, el resultado será un vector con módulo 1 (**unitario**) y tendrá igual dirección al ser un múltiplo suyo.

Así, hay dos vectores unitarios con igual dirección que $\vec{v}$:

$$\pm\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}=\pm\frac{1}{5}\vec{v}\to\begin{cases}\vec{u}&=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right)\quad\text{con igual sentido}\\-\vec{u}&=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5},0\right)\quad\text{con sentido contrario}\end{cases}$$

Recuerda: se dice que un vector es unitario cuando su longitud o módulo es 1.

Ángulo y producto escalar.

Recordemos la fórmula que ya estudiamos el curso pasado:

El ángulo φ que forman los vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el que verifica

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Se toma como ángulo φ entre dos vectores el menor que determinan, por ello, es $0 \leq \varphi \leq \pi$.

☞ Ejemplo: obtengamos el ángulo formado por $\vec{u} = (-3\,,1\,,4)$ y $\vec{v} = (4\,,0\,,3)$:

$$\cos\varphi = \frac{-3\cdot 4 + 1\cdot 0 + 4\cdot 3}{\sqrt{(-3)^2+1^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+0^2+3^2}} = \frac{0}{5\sqrt{26}} = 0$$

Luego:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

☞ Observación: Si el producto escalar de dos vectores no nulos es cero, ambos son perpendiculares (se dice también que son **ortogonales**):

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

Recordemos que cuando el producto escalar de dos vectores da cero se dice que son vectores ortogonales.

2.Producto vectorial

Definición.

Se llama producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$ de los vectores $\vec{u} = (u_1\,,u_2\,,u_3)$ y $\vec{v} = (v_1\,,v_2\,,v_3)$ al vector dado, simbólicamente, por:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Importante: observemos que el producto vectorial es un vector, a diferencia del escalar que es un número.

☞ Nota: si desarrollamos por la primera línea obtenemos:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

☞ Ejemplo: obtengamos el producto vectorial de $\vec{u} = (-1\,,2\,,3)$ y $\vec{v} = (0\,,-5\,,2)$.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 19\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 5\vec{k} = (19\,,2\,,5)$$

☞ Ejemplo: multipliquemos vectorialmente $\vec{u} = (-1\,,5\,,-2)$ por sí mismo:

$$\vec{u}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (0\,,0\,,0) = \vec{0}$$

Sorprendente propiedad: es claro que el producto vectorial de un vector por sí mismo siempre es cero.

En las cuestiones puedes ver más.

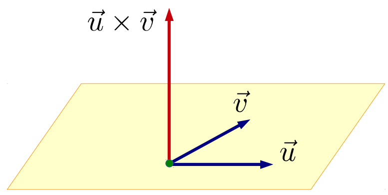
❑ Propiedades fundamentales.

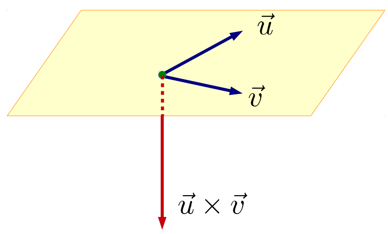
Dados dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ tiene:

a) módulo: el dado por $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}\right)$.

b) dirección: perpendicular a la de $\vec{u}$ y a la de $\vec{v}$.

c) sentido: el de un tornillo perpendicular a ambos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.





☞ Ejemplo: obtengamos un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{x} = (-1\,,0\,,3)$ e $\vec{y} = (2\,,1\,,0)$.

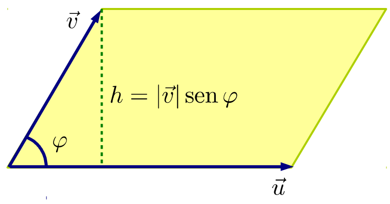
$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - \vec{k} = (-3\,,6\,,-1)$$

En las cuestiones están señaladas propiedades adicionales.

❑ Aplicación al cálculo de áreas.

Teniendo en cuenta cuál es el módulo del producto vectorial, es fácil deducir

Dados dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el área del paralelogramo que determinan es igual al módulo de su producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.



$$\begin{aligned} S &= b \cdot h \\ &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \operatorname{sen}\varphi \\ &= |\vec{u} \times \vec{v}| \end{aligned}$$

☞ Ejemplo: Hallemos el área del triángulo de vértices

$$A = (-1\,,0\,,1)\ ,\ B = (2\,,1\,,1)\ ,\ C = (1\,,2\,,0)$$

El área del triángulo es la mitad de la del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Calculamos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k} = (-1\,,3\,,4)$$

Así:

$$\mathscr{A}\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Si el producto vectorial de dos vectores no nulos es cero, entonces el "paralelogramo" que determinan tiene área cero. ¿Qué interpretación tendrá esto?

3.Producto mixto

Se llama producto mixto $[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}]$ de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ al número dado por:

$$[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Observa que el producto mixto es un número, pues se trata de un producto escalar.

Para calcularlo, lo mejor es obtener su sencilla expresión analítica:

Dados $\vec{u} = (u_1\,,u_2\,,u_3)$, $\vec{v} = (v_1\,,v_2\,,v_3)$ y $\vec{w} = (w_1\,,w_2\,,w_3)$, es:

$$[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

La comprobación es "simple". Observemos que estamos desarrollando el último determinante por la primera fila:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$
$$= (u_1,u_2,u_3)\cdot\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\right)$$
$$= u_1\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3\end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3\end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2\end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$

❑ Aplicación al cálculo de volúmenes.

Teniendo en cuenta cuál es el módulo del producto vectorial, es fácil deducir

Dados tres vectores no nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, el volumen del paralelepípedo que determinan es igual al valor absoluto de su producto mixto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

Recuerda que el volumen de un paralelepípedo es igual a la superficie de la base por la altura.

☞ Ejemplo: Hallemos el volumen del paralelepípedo determinado por

$$\vec{a} = (-1,0,3)\ ,\ \vec{b} = (0,1,2)\ ,\ \vec{c} = (1,1,1)$$

El producto mixto de esos vectores es

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = -2$$

Luego

$$\mathscr{V}\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = 2$$

Si el producto mixto de tres vectores no nulos nos da cero, entonces el "paralelepípedo" que determinan tiene volumen cero. ¿Qué interpretación tendrá esto?

4. Perpendicularidad

❑ Vectores perpendiculares

Recordemos que dos vectores no nulos son perpendiculares cuando su producto escalar es cero: se trata de dos vectores ortogonales.

☞ Ejemplo: Dados $A = (-2,-1,0)$ y $B = (1,1,0)$, obtengamos un punto C del eje Z de modo que AC sea perpendicular a BC.

Será

$$C = (0,0,t)$$

Queremos

$$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}\ \rightarrow\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = (2,1,t)\cdot(-1,-1,t) = -3+t^2 = 0$$

Luego hay dos soluciones:

$$C_1 = \left(0,0,-\sqrt{3}\right)\ ,\ C_2 = \left(0,0,+\sqrt{3}\right)$$

❑ Vector normal a un plano

Recordemos la ecuación general de un plano:

$$\pi : ax + by + cz + d = 0 \; [*]$$

Si $A = (x_0\,, y_0\,, z_0)$ es un punto determinado del plano, entonces:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d_0 = 0 \; [**]$$

Restando [*] y [**] obtenemos:

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0$$

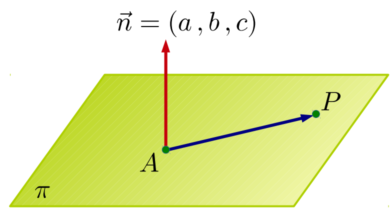
o, lo que es igual:

$$(a\,, b\,, c) \cdot (x - x_0\,, y - y_0\,, z - z_0) = 0$$

eso quiere decir que el vector

$$\vec{n} = (a\,, b\,, c)$$

es perpendicular a cualquier vector contenido en el plano.



La ecuación
$a\,(x\text{-}x_0) + b\,(y\text{-}y_0) + c\,(z\text{-}z_0) = 0$
es muy usada en la práctica. La llamaremos ecuación normal.

El vector $\vec{n} = (a\,, b\,, c)$ es un vector normal al plano de ecuación

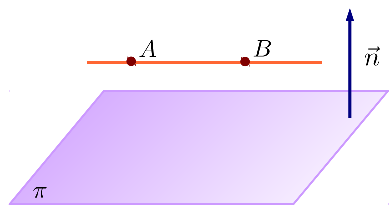
$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

☞ Ejemplo: Dados los puntos $A = (0\,, 2\,, -1)$ y $B = (a\,, 1\,, 2)$, obtengamos el valor de a para el que la recta AB es paralela al plano $\pi : 3x - y = 5$.

La recta será paralela si su vector director $\overrightarrow{AB} = (a\,, -1\,, 3)$ es perpendicular al vector normal $\vec{n} = (3\,, -1\,, 0)$ al plano:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \to a \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = 0 \to a = -\frac{1}{3}$$

Debemos observar que la recta no está contenida en el plano pues $A \notin \pi$.



☞ Nota: Tenemos aquí una interpretación geométrica a la condición de paralelismo que estudiamos en la lección anterior: si la recta r con vector director $\vec{v}_r = (v_1\,, v_2\,, v_3)$ es paralela al plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ entonces

$$\vec{v}_r \perp \vec{n} \;\to\; av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$$

❑ Recta y plano perpendiculares

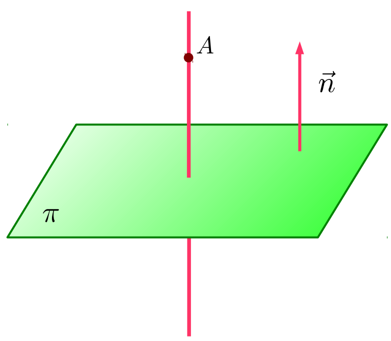
Es muy sencillo observar que si una recta r es perpendicular a un plano π, entonces cualquier vector director de la recta es normal al plano.

☞ Ejemplo: Obtengamos la ecuación de la recta r perpendicular al plano

$$\pi : 2x - y + 3z + 1 = 0$$

por el punto $A = (-1\,, 0\,, 3)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Punto:} & A = (-1\,, 0\,, 3) \\ \text{Vector director:} & \vec{n} = (2\,, -1\,, 3) \end{array}\right\} \to r : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{3}$$

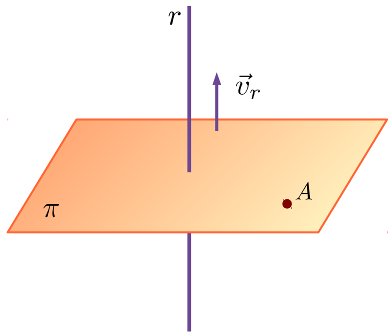


☞ <u>Ejemplo</u>: Obtengamos la ecuación del plano que pasa por el punto $A = (0\,,-2\,,1)$ y es perpendicular a la recta

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - z = -2 \end{cases}$$

Como son perpendiculares, un vector director de la recta es normal al plano:

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - z = -2 \end{cases} \xrightarrow{x=\lambda} \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (1\,,-1\,,2)$$



Tenemos así que conocemos un punto y un vector normal:

$$1 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (y + 2) + 2 \cdot (z - 1) = 0$$

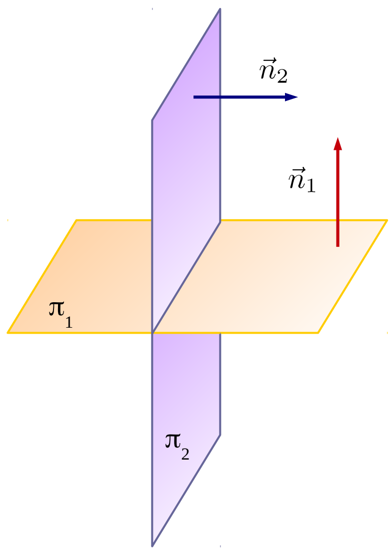
Simplificando:

$$\pi : x - y + 2z - 4 = 0$$

❑ Planos perpendiculares

Es fácil observar que si dos planos son perpendiculares, cualesquiera dos vectores normales a ellos son también perpendiculares.

$$\boxed{\pi \perp \pi' \iff \vec{n} \perp \vec{n}'}$$



☞ <u>Ejemplo</u>: obtengamos a para que sean perpendiculares los planos

$$\pi_1 : -2x + y + 3z = 0 \quad , \quad \pi_2 : ax + 3y - 5z + 1 = 0$$

Deben ser perpendiculares $\vec{n}_1 = (-2\,,1\,,3)$ y $\vec{n}_1 = (a\,,3\,,-5)$:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -2 \cdot a + 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) = -2a - 12 = 0 \rightarrow a = -6$$

☞ <u>Ejemplo</u>: obtengamos la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-1}$$

y es perpendicular al plano $\pi : x - y + 3z - 1 = 0$.

De la recta sacamos un punto y un vector director para el plano:

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-1} \rightarrow \begin{cases} P_r = (1\,,2\,,0) \\ \vec{v}_r = (3\,,4\,,-1) \end{cases}$$

Y el vector normal al plano dado es otro vector director para el plano:

$$\pi : x - y + 3z - 1 = 0 \rightarrow \vec{n} = (1\,,-1\,,3)$$

Así el plano pedido tiene de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda + \mu \\ y = 2 + 4\lambda - \mu \\ z = -\lambda + 3\mu \end{cases}$$

Observemos que si los planos pi y pi' son perpendiculares, entonces el vector normal de pi' es un vector de dirección para pi.

❑ Rectas perpendiculares

Es evidente que dos rectas son perpendiculares si lo son cualesquiera dos respectivos vectores directores:

$$\boxed{r \perp s \Longleftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_s}$$

☞ Ejemplo: hallemos el valor de a para el que son perpendiculares las rectas

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{5} \ , \ s : \begin{cases} x - ay = -1 \\ 2y + z = \ \ 3 \end{cases}$$

Es claro que un vector director de r es $\vec{v}_r = (2\,,-4\,,5)$.

Saquemos un vector director de s:

$$s : \begin{cases} x - ay = -1 \\ 2y + z = \ \ 3 \end{cases} \xrightarrow{y=\lambda} \begin{cases} x = -1 + a\lambda \\ y = \qquad \lambda \\ z = \ \ 3 - 2\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (a\,,1\,,-2)$$

Debe ser

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 2a - 14 = 0 \rightarrow a = 7$$

5. Distancias

❑ Distancia entre dos puntos.

El cálculo de las distancias entre puntos no reviste ninguna dificultad:

Se define la distancia entre los puntos A y B del plano por:

$$\mathrm{d}\,(A\,,B) \stackrel{def}{=} |\overrightarrow{AB}|$$

☞ Ejemplo: la distancia entre $A = (2\,,2\,,-1)$ y $B = (4\,,5\,,-2)$ es:

$$\mathrm{d}\,(A\,,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} \ \rightarrow \ \mathrm{d}\,(A\,,B) = \sqrt{14}$$

☞ Ejemplo: averigüemos cuál es el punto P del eje Y que dista 5 unidades del punto $Q = (0\,,2\,,4)$.

Pongamos $P = (0\,,\lambda\,,0)$:

$$\mathrm{d}\,(P\,,Q) \rightarrow \sqrt{(2-\lambda)^2 + 4^2} = 5 \rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = \ \ 5 \end{array} \right.$$

Hay dos soluciones: $P_1 = (0\,,-1\,,0)$ y $P_2 = (0\,,5\,,0)$.

Distancia de un punto a un plano.

Se demuestra

Dado un punto P y un plano π , existe un punto Q en π tal que

$$\mathrm{d}\,(P\,,Q) = \min\,\{\mathrm{d}\,(P\,,Q_i) : Q_i \in \pi\}$$

A dicho punto Q se le llama proyección ortogonal de P en π y se llama distancia entre ambos a la distancia de P a Q:

$$\mathrm{d}\,(P\,,\pi) \stackrel{def}{=} \mathrm{d}\,(P\,,Q)$$

Se demuestra, además, que

si $P \in \pi$ es $Q = P$, en cuyo caso $\mathrm{d}\,(P\,,r) = 0$

si $P \notin \pi$, entonces Q es el punto de π tal que $PQ \perp \pi$.

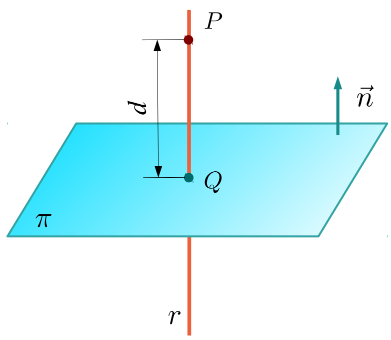
☞ Ejemplo: calculemos la distancia de $P = (-1\,,0\,,1)$ al plano dado por

$$\pi : 3x + 4z + 1 = 0$$

Observamos, en primer lugar, que el punto no está en el plano (al sustituir no cumple las igualdades).

Calculamos la recta que pasa por P y es perpendicular a π:

$$\left\{\begin{aligned} x &= -1 + 3\lambda \\ y &= \quad 0 \\ z &= \quad 1 + 4\lambda \end{aligned}\right.$$



El punto proyección Q es la intersección de r con π:

$$3\,(-1 + 3\lambda) + 4\,(1 + 4\lambda) + 1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -\frac{2}{25}$$

Tenemos así que $Q = \left(-\frac{31}{25}\,,0\,,\frac{17}{25}\right)$ y $\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{6}{25}\,,0\,,-\frac{8}{25}\right)$.

Luego la distancia del punto al plano recta es:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\left(-\frac{6}{25}\right)^2 + \left(-\frac{8}{25}\right)^2} = \frac{2}{5}$$

☞ Nota 1: observemos que además, el procedimiento anterior nos permite hallar el punto P' simétrico de P respecto de r, pues:

$$\frac{P + P'}{2} = Q \;\rightarrow\; P' = 2Q - P \;\rightarrow\; P' = \left(-\frac{37}{25}\,,0\,,\frac{9}{25}\right)$$

Existe una sencilla fórmula que permite obtener la distancia y que se usa cuando aplicar el procedimiento anterior es demasiado complejo:

Si $P = (x_0\,,y_0\,,z_0)$ y $\pi : ax + by + cz + d = 0$ entonces:

$$\mathrm{d}\,(P\,,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

☞ Ejemplo: comprueba la fórmula con el estudio anterior.

Distancia de un punto a una recta

Se demuestra

Dado un punto P y una recta r, existe un punto Q en r tal que

$$d(P,Q) = \min\{d(P,Q_i) : Q_i \in r\}$$

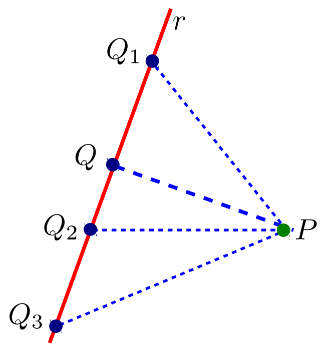
A dicho punto Q se le llama proyección ortogonal de P en r y se llama distancia de P a r a la distancia entre ambos:

$$d(P,r) \overset{def}{=} d(P,Q)$$

Se demuestra, además, que

si $P \in r$ es $Q = P$, en cuyo caso $d(P,r) = 0$,

si $P \notin r$, entonces Q es el punto de r tal que $PQ \perp r$.



☞ Ejemplo: Obtengamos la distancia del punto $P = (1,2,-1)$ a la recta definida por

$$r : \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Observamos, en primer lugar, que el punto no está en la recta (al sustituir no cumple las igualdades).

Expresamos Q en función de un parámetro:

$$r : \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 4 \end{cases} \xrightarrow{y=\lambda} \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases} \to Q = (2-\lambda, \lambda, 4)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_r$:

$$(-\lambda + 1, \lambda - 2, 5) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \to 2\lambda - 3 = 0 \to \lambda = \frac{3}{2}$$

Tenemos así que $Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 4\right)$ y $\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 5\right)$.

Luego la distancia del punto a la recta es:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5^2} = \frac{\sqrt{102}}{2}$$

☞ Nota 1. Observemos que además, el procedimiento anterior nos proporciona la ecuación de la secante perpendicular s desde el punto P:

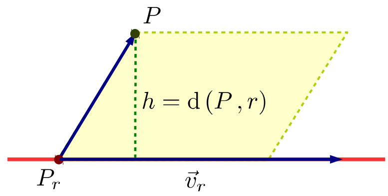
$$s : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{10}$$

y nos permite hallar el punto P' simétrico de P respecto de r, pues:

$$\frac{P + P'}{2} = Q \to P' = 2Q - P \to P' = (0,1,9)$$

☞ Nota 2. Otro modo de obtener Q: si calculamos la ecuación del plano π que pasa por P y es perpendicular a r tenemos que es $Q = r \cap \pi$.

Existe una fórmula que permite obtener directamente la distancia y que se basa en la interpretación geométrica del módulo del producto vectorial:



$$\mathrm{d}\,(P\,,r) = \frac{Superficie}{base} = \frac{|\overrightarrow{P_rP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$$

La distancia del punto P a la recta r viene dada por:

$$\mathrm{d}\,(P\,,r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$$

donde son P_r un punto y $\vec{v}_r$ un vector director de la recta.

☞ Ejemplo: comprobemos la fórmula con el estudio anterior. Para ello primero calculamos el producto vectorial

$$\overrightarrow{P_rP} \times \vec{v}_r = (-1\,,2\,,-5) \times (-1\,,1\,,0) = (-5\,,-5\,,1)$$

Y aplicando la fórmula:

$$\mathrm{d}\,(P\,,r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|} = \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{102}}{2}$$

❑ Distancia entre dos planos

Se llama distancia entre dos planos a la menor que hay entre dos respectivos puntos cualesquiera de ellos.

Si son planos secantes es evidente que dicha distancia es cero.

Si son paralelos, la distancia es la obtenida al calcular la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro plano.

❑ Distancia entre recta y plano

Se llama distancia entre recta y plano a la menor que hay entre dos respectivos puntos cualesquiera de ellos.

Si son secantes o si la recta está contenida en el plano es evidente que dicha distancia es cero.

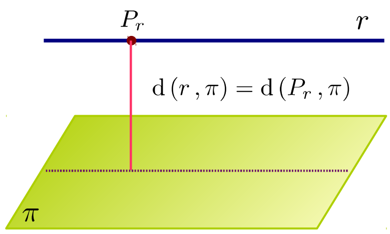
Si son paralelos, la distancia es la obtenida al calcular la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

☞ Ejemplo: Obtengamos la distancia de la recta r al plano π, siendo:

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = z \quad , \quad \pi : -x + y + z = 5$$

Veamos primero la posición relativa. Como

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} \;\rightarrow\; 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$



la recta o está contenida en el plano o es secante con él. Pero al ser

$$P_r = (1\,,-1\,,0) \mapsto \pi : -1 + (-1) + 0 \neq 5 \rightarrow P_r \notin \pi$$

Tenemos que es paralela. Así:

$$\mathrm{d}\,(r\,,\pi) = \mathrm{d}\,(P_r\,,\pi) = \frac{|-1-1-5|}{\sqrt{(-1)^2+1+1}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

Distancia entre dos rectas

Si r y s son dos rectas distintas, se llama distancia entre ambas a la menor que hay entre dos respectivos puntos cualesquiera de ellas.

Si las rectas son secantes, entonces la distancia entre ambas es cero.

Si las rectas son paralelas, la distancia que las separa es la obtenida al calcular la distancia de un punto cualquiera de una a la otra recta.

Si las rectas se cruzan, el caso es más complejo.

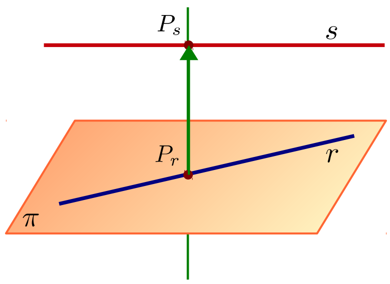
☞ Ejemplo: Obtengamos la distancia entre las rectas

$$r : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+2}{3} \quad , \quad s : \begin{cases} x = 2+2\mu \\ y = \mu \\ z = 1 \end{cases}$$

Observemos que no son paralelas pues $\vec{v}_r = (2\,,1\,,-3)$ y $\vec{v}_s = (2\,,1\,,0)$ no son dependientes.

Ahora obtenemos un punto genérico de la recta r y otro genérico de s, así como el vector va de uno al otro:

$$\left.\begin{array}{l} P_r = (1+2\lambda\,,\lambda\,,-2+3\lambda) \\ P_s = (2+2\mu\,,\mu\,,1) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{P_rP_s} = (1-2\lambda+2\mu\,,-\lambda+\mu\,,3-3\lambda)$$



La distancia mínima se obtiene cuando $\overrightarrow{P_rP_s} \perp \vec{v}_r$ y $\overrightarrow{P_rP_s} \perp \vec{v}_s$, así:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_rP_s}\cdot\vec{v}_r = -14\lambda+5\mu+11 = 0 \\ \overrightarrow{P_rP_s}\cdot\vec{v}_s = -5\lambda+5\mu+2 = 0 \end{array}\right\} \to \lambda = 1\,,\ \mu = \frac{3}{5}$$

Tenemos así que

$$P_r = (3\,,1\,,1)\ ,\ P_s = \left(\frac{16}{5}\,,\frac{3}{5}\,,1\right)\ ,\ \overrightarrow{P_rP_s} = \left(\frac{1}{5}\,,-\frac{2}{5}\,,0\right)$$

$$\mathrm{d}\,(r\,,s) = |\overrightarrow{P_rP_s}|$$

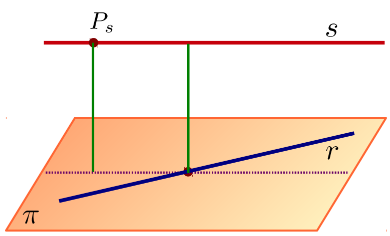
Luego la distancia entre las dos rectas es :

$$\mathrm{d}\,(r\,,s) = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

☞ Nota 1. Observemos que además, el procedimiento anterior nos proporciona la ecuación de la recta que corta a ambas y es perpendicular a ambas a la vez. Es la llamada secante perpendicular común:

$$t : \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{0}$$

☞ Nota 2. Otro procedimiento: hallamos la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s: ese plano es $\pi : x+2y-1=0$.



Ahora calculamos la distancia de cualquier punto de la recta s, como puede ser $P_s = (2\,,1\,,0)$, al plano:

$$\mathrm{d}\,(r\,,s) = \mathrm{d}\,(P_s\,,\pi) = \frac{|2+0-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Existe una fórmula que permite obtener directamente la distancia y que se basa en la interpretación geométrica del producto mixto:

La distancia de la recta r a la recta s viene dada por:

$$\mathrm{d}\,(r\,,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_r\,,\right]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

$$\mathrm{d}\,(r\,,s) = \frac{Volumen}{S_{base}} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s\right]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

☞ Ejemplo: comprobemos la fórmula con el estudio anterior.

$$\left[\overrightarrow{P_rP}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = (2\,,1\,,3) \times (2\,,1\,,0) = (-3\,,6\,,0)$$

Y aplicando la fórmula:

$$\mathrm{d}\,(r\,,s) = \frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

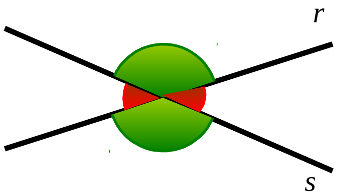
6. Ángulos

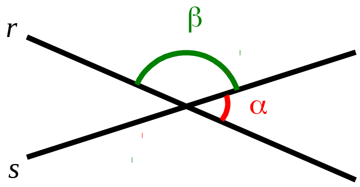
Es relativamente simple obtener el ángulo determinado por rectas y planos, calculando el ángulo que forman dos vectores mediante el producto escalar.

❑ Ángulo entre dos rectas

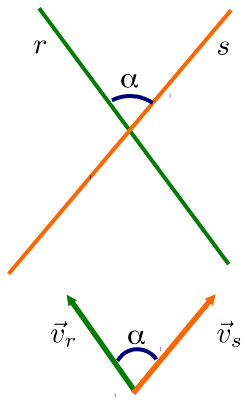
Es claro que dicho ángulo se puede obtener a partir de sus respectivos vectores de dirección:

Dos rectas secantes determinan cuatro regiones angulares opuestas dos a dos por el vértice. Así, dos rectas secantes determinan dos ángulos, α y β, que





son suplementarios. Se denomina ángulo entre ellas al menor de ellos.



☞ Ejemplo: obtengamos la medida del ángulo que forman las rectas

$$r : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2} = z \quad , \quad s : \frac{x}{3} = \frac{y+1}{0} = z$$

Saquemos dos vectores directores y calculemos el ángulo que forman a través del producto escalar:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_r &= (-1\,,2\,,0) \\ \vec{v}_s &= (3\,,0\,,1) \end{aligned}\right\} \to \cos\left(\widehat{\vec{v}_r\,,\vec{v}_s}\right) = \frac{-3}{\sqrt{50}}$$

Luego:

$$(\widehat{r\,,s}) = \arccos\frac{3}{\sqrt{50}} \approx 64°53'45''$$

Ángulo entre dos planos

Si tenemos dos planos de ecuaciones

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad , \quad \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

es simple observar que, si no son paralelos, el ángulo diedro agudo que determinan es igual al ángulo agudo que determinan sus respectivos vectores normales.

☞ <u>Ejemplo</u>: obtengamos la medida del ángulo que forman los planos

$$\pi_1 : -x + y - z = 2 \quad , \quad \pi_2 : 2x + y = -1$$

Saquemos dos vectores normales y calculemos el ángulo que forman a través del producto escalar:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1 = (-1\,,1\,,-1) \\ \vec{n}_2 = (2\,,1\,,0) \end{array}\right\} \to \cos\left(\widehat{\vec{n}_1\,,\vec{n}_2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{15}}$$

Luego:

$$\left(\widehat{\pi_1\,,\pi_2}\right) = \arccos\frac{1}{\sqrt{15}} \approx 75°2'12''$$

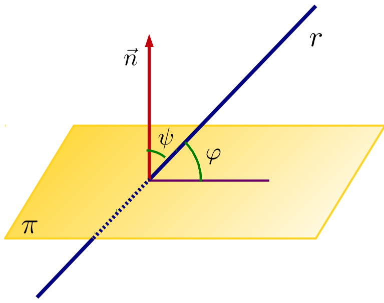
Ángulo entre recta y plano

Podemos observar que el ángulo agudo φ formado entre una recta y un plano es el complementario del ángulo agudo ψ determinado por el vector director de la recta y el normal al plano.

☞ <u>Ejemplo</u>: obtengamos la medida del ángulo que forman los planos

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{-2} = z \quad , \quad \pi : x - 2z = 1$$

Saquemos el vector director de la recta y el normal al plano y estudiemos el ángulo que forman a través del producto escalar:



$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r = (1\,,-2\,,1) \\ \vec{n} = (1\,,0\,,-2) \end{array}\right\} \to \cos\left(\widehat{\vec{v}_r\,,\vec{n}}\right) = -\frac{1}{5}$$

Luego:

$$(\widehat{r\,,\pi}) = 90° - \arccos\frac{1}{5} \approx 78°32'13''$$

Ejercicios

1. [S/08] Sea la recta s dada por

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - z & = & -1 \\ 2y + z & = & 3 \end{array} \right.$$

Estudia la posición relativa de s y de $\pi_2 \equiv x + y = 3$, y deduce la distancia entre ambos.

2. [S/08] Considera los puntos

$$A(1\,,1\,,0)\,,\ B(1\,,1\,,2)\,,\ C(1\ -1\,,1).$$

a) Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a A y es perpendicular a la recta BC.

3. [S/08] Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a la recta r definida por

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$$

4. [S/08] Dado los puntos $A(2\,,1\,,1)$, $B(0\,,0\,,1)$, halla los puntos C en el eje OX tales que el área de ΔABC es 2.

5. [S/08] Sean la recta dada por

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{r} x = 1 \\ x - y = 0 \end{array} \right.$$

y sean los planos

$$\pi_1 \equiv x + y + z = 0 \qquad , \qquad \pi_2 \equiv y + z = 0$$

Halla la recta contenida en el plano π_1, que es paralela al plano π_2 y que corta a la recta r.

6. [S/08] Halla las coordenadas de un punto de la recta definida por

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{r} x - y - z = -1 \\ 3x - 2z = -5 \end{array} \right.$$

que equidiste de los puntos

$$A(2\,,1\,,-1)\,,\ B(-2\,,3\,,1)$$

7. [S/08] Para $m \neq 0$, se consideran

$$r : mx = y = z + 2\,,\ s : \frac{x-4}{4} = y - 1 = \frac{z}{2}$$

Halla el valor de m para el que las rectas son perpendiculares.

8. [S/08] Considera los puntos

$$A(2\,,0\,,1)\,,\ B(-1\,,1\,,2)\,,\ C(2\,,2\,,1)\,,\ D(3\,,1\,,0)$$

a) Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos B, C, D.

b) Halla el punto simétrico de A respecto del plano π.

9. [S/09] Considera el punto $A(1\,,-2\,,1)$ y la recta r definida por las ecuaciones

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ 2x + y + z & = & 7 \end{array} \right.$$

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A.

b) Calcula la distancia del punto A a la recta r.

10. [S/09] Considera las rectas definidas por

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{r} x - y + 3 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{array} \right. ,\ s \equiv \left\{ \begin{array}{r} 2y + 1 = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{array} \right.$$

a) Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

b) ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s? Razona la respuesta.

11. [S/09] Se consideran las rectas definidas por

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{array} \right. \quad , \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Halla la ecuación de la recta perpendicular común a ambas.

12. [S/09] Consideremos la recta r definida por

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{array} \right.$$

y los puntos $A(2\,,1\,,0)$, $B(1\,,0\,,-1)$.

Determina un punto C de la recta r tal que los segmentos CA y CB sean perpendiculares.

13. [S/09] Consideremos el punto $P(1\,,0\,,-2)$ así como la recta r y el plano π definidos por

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{array} \right. ,\ \pi \equiv 2x + y + 3z - 1 = 0$$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a r y es perpendicular a π.

b) Halla la ecuación de la recta que pasa por P, corta a r y es paralela a π.

14.[S/09] Sean el plano la recta dados por

$$\pi : 3x - 2y - 2z = 7\,,\; r : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$$

a) Determina la ecuación del plano paralelo a π que contiene a la recta.

b) Halla la ecuación de plano ortogonal a π que contiene a r.

15.[S/09] Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1\,,1\,,-1)$, es paralela al plano de ecuación $x - y + z = 1$ y corta al eje Z.

16.[S/09] Sea la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$$

a) Determina la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1\,,1\,,1)$.

b) Halla los puntos de r cuya distancia al origen es de 4 unidades.

17.[S/09] Consideremos el punto y la recta

$$P(2\,,3\,,-1) \quad , \quad r \equiv \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Halla el punto de la recta que está más cerca del punto.

18.[S/10] Considera los puntos

$$A(1\,,0\,,2)\;,\;B(-1\,,2\,,4)$$

Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de A y de B.

19.[S/10] Considera los puntos

$$A(1\,,1\,,1)\,,\,B(0\,,-2\,,2)\,,\,C(-1\,,0\,,2)\,,\,D(2\,,-1\,,2)$$

a) Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D.

b) Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B, C.

20.[S/10] Considera las rectas r y s de ecuaciones

$$r \equiv x - 1 = y = 1 - z \quad , \quad s \equiv \begin{cases} x - 2y & = & -1 \\ y + z & = & 1 \end{cases}$$

Halla el ángulo que forman r y s.

21.[S/10] Los puntos $P(2, 0, 0)$ y $Q(-1, 12, 4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta r de ecuación

$$r \equiv \begin{cases} 4x + 3z & = & 33 \\ y & = & 0 \end{cases}$$

a) Calcula las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a la recta que pasa por P y por S.

b) Comprueba si el triángulo es rectángulo.

22.[S/10] Considera los puntos

$$A(1, 2, 1)\;,\;B(-1, 0, 3)$$

Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ y que pasa por A.

23.[S/10] Considera el plano

$$\pi \equiv 2x - y + nz = 0$$

y la recta r dada por

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

con $m \neq 0$.

a) Calcula m y n para que la recta r sea perpendicular al plano π.

b) Calcula m y n para que la recta r está contenida en el plano π.

24.[S/10] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $6x + 3y + 2z = 6$ con los ejes de coordenadas.

25.[S/10] Sean los puntos

$$A(1, 1, 1), B(-1, 2, 0), C(2, 1, 2)$$

Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmento determinado por A y B, que contenga al punto C.

26.[S/10] Sean los puntos

$$A(2\,,\lambda\,,\lambda), B(-\lambda\,,2\,,0), C(0\,,\lambda\,,\lambda-1)$$

a) ¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que los puntos A, B, C estén alineados? Justifica la respuesta.

b) Para $\lambda = 1$ halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B, C. Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

27.[S/10] Halla el punto simétrico de $P(1,1,1)$ respecto de la recta r de ecuación

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$$

28.[S/11] Considera los puntos

$A(1,k,3)$, $B(k+1,0,2)$, $C(1,2,0)$, $D(2,0,1)$

Calcula los valores de k para los que los puntos A, B, C, D forman un tetraedro de volumen 1.

29.[S/11] Dados el plano y el punto

$$\pi \equiv x+2y-z=0\ ,\ Q(1,-2,3)$$

Halla el punto simétrico de Q respecto de π .

30.[S/11] Dados los puntos

$$A(1,0,0), B(0,0,1), P(1,-1,1)$$

y la recta definida por

$$r\equiv\left\{\begin{array}{rcl} x-y-2 & = & 0\\ z & = & 0\end{array}\right.$$

a) Halla los puntos de la recta r cuya distancia al punto P es de 3 unidades.

b) Calcula el área del triángulo $\triangle ABP$.

31.[S/11] Dados el punto $P(1,1,-1)$ y la recta de ecuaciones

$$r\equiv\left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 1\\ y+z & = & 0\end{array}\right.$$

Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $y+z=0$, que es perpendicular a r y pasa por P .

32.[S/11] Sea el punto $P(2,3,1)$ y la recta r dada por las ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1\\ y & = & -2\lambda\\ z & = & \lambda\end{array}\right.$.

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P .

b) Calcula la distancia del punto P a la recta r y determina el punto simétrico de P respecto de r .

33.[S/11] Considera los planos π_1 y π_2 dados respectivamente por las ecuaciones

$$(x,y,z)=(2,0,7)+\lambda(1,-2,0)+\mu(0,1,-1)$$
$$2x+y-z+5=0$$

Determina los puntos de la recta r definida por $x=y+1=\dfrac{z-1}{-3}$ que equidistan de π_1 y π_2

34.[S/11] Dadas las rectas definidas por

$$r\equiv\frac{x+7}{2}=\frac{y-7}{-1}=z\quad ,\quad s\equiv\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 2\\ y & = & -5\\ z & = & \lambda\end{array}\right.$$

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas.

b) Calcula la distancia entre r y s .

35.[S/11] Considera los puntos

$$A(1,0,2)\ ,\ B(1,2,-1)$$

a) Halla un punto C de la recta de ecuación $r\equiv\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=z$ que verifica que el triángulo de vértices A, B y C tiene un ángulo recto en B .

b) Calcula el área del triángulo de vértices A , B y D , donde D es el punto de corte del plano de ecuación $2x-y+3z=6$ con el eje OX .

36.[S/11] Considera los planos dados por

$\pi_1 : 3x-y+z-4=0$

$\pi_2 : x-2y+z-1=0$

$\pi_3 : x+z-4=0$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,1,-1)$, es paralela al plano π_1 y corta a la recta intersección de los planos π_2 y π_3 .

37.[S/11] Determina el punto simétrico del punto $A(-3,1,6)$ respecto de la recta r de ecuación

$$x-1=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{2}$$

38.[S/12] El punto $M(1,-1,0)$ es el centro de un paralelogramo y $A(2,1,-1)$ y $B(0,-2,3)$ son dos vértices consecutivos del mismo.

Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

39.[S/12] Calcula de manera razonada la distancia del eje **OX** a la recta de ecuaciones

$$r\equiv\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y & = & 4\\ 2x-3y-z & = & 0\end{array}\right.$$

40.[S/12] Calcula la distancia entre r y s, donde

$$r \equiv \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}$$
$$s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$$

41.[S/12] Los puntos $A\,(1\,,1\,,5)$ y $B\,(1\,,1\,,2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. El vértice C, consecutivo a B, está en la recta

$$r \equiv x = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

Determina los vértices C y D.

42.[S/12] Sean los puntos

$$A\,(0\,,0\,,1)\ ,\ B\,(1\,,0\,,-1)\ ,\ C\,(0\,,1\,,-2)\ ,\ D\,(1\,,2\,,0)$$

a) Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

b) Calcula la distancia del punto D al plano π.

43.[S/12] Halla el punto simétrico de $P\,(2\,,1\,,-5)$ respecto de la recta definida por

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcr} x-z & = & 0 \\ x+y & = & -2 \end{array} \right.$$

44.[S/12] De un paralelogramo $ABCD$ conocemos tres vértices consecutivos:

$$A\,(2\,,-1\,,0)\ ,\ B\,(-2\,,1\,,0)\ ,\ C\,(0\,,1\,,2)$$

a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

b) Halla el área de dicho paralelogramo.

c) Calcula el vértice D.

45.[S/12] Consideremos los vectores

$$\vec{\mathbf{u}} = (k\,,1\,,1)\ ,\vec{\mathbf{v}} = (2\,,1\,,-2)\ \vec{\mathbf{w}} = (1\,,1\,,k)$$

a) Determina los valores de k para los que $\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{v}}-\vec{\mathbf{w}}$ son ortogonales.

b) Para $k=-1$, determina aquellos vectores ortogonales a $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ y que tienen módulo 1.

46.[S/12] Encuentra los puntos de la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{2-y}{2} = z-3$$

que distan cuatro unidades del plano

$$\pi \equiv x-2y+2z=1$$

47.[S/12] Determina el punto P de la recta

$$r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$$

que equidista del origen de coordenadas y del punto $A\,(3\,,2\,,1)$.

48.[S/12] Considera el punto $P\,(1\,,0\,,2)$ así como la recta dada por

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x-y=4 \\ y+2z=8 \end{array} \right.$$

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r.

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Cuestiones

1. Se dice que una base es ortonormal los vectores de dicha base son unitarios y ortogonales dos a dos.

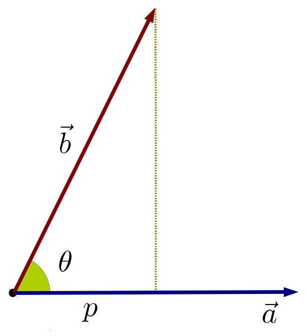
Comprueba que estos vectores forman una base ortonormal:

a) i , j , k

b) otra

2. El determinante de las componentes de tres vectores de es cero. ¿Forman esos tres vectores una base?

3. Demuestra que la proyección p de un vector $\vec{\mathbf{b}}$ sobre otro vector $\vec{\mathbf{a}}$, tal y como vemos a continuación:



Viene dada por

$$p = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

Halla la proyección de uno sobre otro.

4. Halla el vector proyección de uno sobre otro.

5. Comprueba que el siguiente vector siempre es unitario; esto es, tiene módulo 1:

$$\vec{u} = (\cos\alpha \operatorname{sen}\beta\,, \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta\,, \cos\beta)$$

6. Producto vectorial de los vectores de la base canónica.

7. Comprueba las siguientes propiedades del producto vectorial:

8. Comprobación de que el producto vectorial no tiene la propiedad asociativa.

9. Fórmula de la distancia de un punto a una recta, con somera explicación y ejemplo

10. Fórmula de la distancia de un punto a un plano, con somera explicación y ejemplo

11. Fórmula de la distancia entre dos rectas que se cruzan, con somera explicación y ejemplo.

12. Escribo tres vectores. El producto mixto de tres vectores es cero. Pido el volumen del paralelepípedo ¿Cómo son esos tres vectores? ¿Qué interpretación geométrica puede darse?

En la figura observamos

$$\frac{p}{|\vec{\mathbf{b}}|} = \cos\theta \;\rightarrow\; \frac{p}{|\vec{\mathbf{b}}|} = \frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|}$$

Multiplicando ambos miembros por $|\vec{\mathbf{b}}|$:

Autoevaluación

1. Consideremos

$$P=(1\,,0\,,-1) \quad , \quad r: x+2=\frac{y}{-2}=\frac{z}{4} \quad , \quad \pi: 2x+3y+z-6=0$$

a) Halla el área del triángulo determinado por el plano π y los ejes coordenados.

b) Calcula la distancia de la recta al plano.

c) Obtén la ecuación de la recta que pasa por P, es perpendicular a r y es paralela a π.

2. Consideremos

$$P=(-1\,,1\,,0) \quad , \quad r: \left\{ \begin{aligned} x-y&=1 \\ z&=2 \end{aligned} \right. \quad , \quad \pi: x+y+z=3$$

a) Calcula las coordenadas del simétrico de P respecto de r.

b) Halla los puntos de r que distan 3 unidades de P.

c) Obtén la medida del ángulo determinado por r y π.

3. Consideremos los puntos

$$A=(1\,,0\,,1) \quad , \quad B=(2\,,-1\,,1) \quad , \quad C=(-1\,,1\,,2) \quad , \quad D=(1\,,-1\,,-1)$$

a) Estudia si son coplanarios.

b) Halla el simétrico de D respecto del plano π que pasa por los otros tres.

c) Si ABC son los vértices consecutivos de un paralelogramo, halla su área. ¿Es un rectángulo?

4. Sean las rectas de ecuaciones

$$r: \left\{ \begin{aligned} x-ay&=1 \\ z&=0 \end{aligned} \right. \quad , \quad s: \left\{ \begin{aligned} x&= \ \ 2+2\lambda \\ y&= \quad\ \ -\ \lambda \\ z&=-1 \end{aligned} \right.$$

a) Discute su posición relativa.

b) Para $a=-2$ halla la distancia entre ambas.

5. Consideremos

$$r: \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=z+1 \quad , \quad \pi_1: x-y+3z+7=0 \quad , \quad \pi_2: \left\{ \begin{aligned} x&=-4+\lambda-3\mu \\ y&=1+\lambda \\ z&=\mu \end{aligned} \right.$$

Determina el punto de la recta que equidista de los planos.

Autoevaluación

1.

a) Puntos de corte del plano con los ejes coordenados:

Corte con eje X: $y = z = 0 \mapsto \pi : 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow A = (3\,,0\,,0)$

Corte con eje Y $x = z = 0 \mapsto \pi : 3y - 6 = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow B = (0\,,2\,,0)$

Corte con eje Z: $x = y = 0 \mapsto \pi : z - 6 = 0 \rightarrow z = 6 \rightarrow C = (0\,,0\,,6)$

El área del triángulo ABC es la mitad de la del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Calculamos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12\vec{\imath} + 18\vec{\jmath} + 6\vec{k} = (12\,,18\,,6)$$

Así:

$$\mathscr{A}\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 18^2 + 6^2} = \frac{\sqrt{504}}{2} = 3\sqrt{14} \quad \text{(u.a.)}$$

b) Veamos antes si la recta es paralela o no. Usamos la condición de paralelismo:

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 0 \rightarrow r \parallel \pi$$

Así, para hallar la distancia de r a π basta calcular la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Tomamos, por ejemplo, $P_{0r} = (-2\,,0\,,0)$:

$$\mathrm{d}\,(r\,,\pi) = \mathrm{d}\,(P_{0r}\,,\pi) = \frac{|2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 0 - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{7} \quad \text{(u.a.)}$$

c) Ya tenemos un punto de la recta s que se quiere hallar: $P = (1\,,0\,,-1)$. Intentamos ahora obtener un vector director:

$$\left.\begin{array}{lcl} s \perp r & \rightarrow & \vec{v}_s \perp \vec{v}_r \\ s \parallel \pi & \rightarrow & \vec{v}_s \perp \vec{n} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_s \parallel \vec{v}_r \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-14\,,7\,,7)$$

Así, la ecuación de la recta s pedida es:

$$s : \frac{x-1}{-14} = \frac{y}{7} = \frac{z+1}{7}$$

2.

a) Primero calcularemos el punto proyección Q de $P = (-1\,,1\,,0)$ sobre r.

Expresamos Q en función de un parámetro:

$$r : \left\{ \begin{array}{r} x - y = 1 \\ z = 2 \end{array} \right. \xrightarrow{y=\lambda} \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \quad\ \lambda \\ z = 2 \end{array} \right. \rightarrow Q = (1 + \lambda\,, \lambda\,, 2)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_r$:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r=0\ \rightarrow\ (\lambda+2\,,\lambda-1\,,2)\cdot(1\,,1\,,0)=0\ \rightarrow\ 2\lambda+1=0\ \rightarrow\ \lambda=-\frac{1}{2}$$

Tenemos así que $Q=\left(\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\,,2\right)$.

El punto Q es el punto medio del segmento que une P con su su simétrico P'. Así:

$$\frac{P+P'}{2}=Q\ \rightarrow\ P'=2Q-P\ \rightarrow\ P'=(2\,,-2\,,4)$$

b) Llamemos A a ese punto. Como está en la recta r será, igual que antes, $A=(1+\lambda\,,\lambda\,,2)$.

$$|\overrightarrow{PA}|=3\ \rightarrow\ \sqrt{(\lambda+2)+(\lambda+1)^2+2^2}=3\ \rightarrow\ 2\lambda^2+2\lambda=0\ \rightarrow\ \left|\begin{array}{l}\lambda=\ \ \ 0\\ \lambda=-1\end{array}\right.$$

Hay dos soluciones:

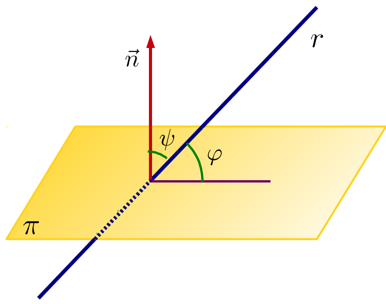
$$A_1=(1\,,0\,,2)\ ,\ A_2=(0\,,-1\,,2)$$

c) Para hallar el ángulo que forman la recta con el plano calcularemos primero el que forman el vector director de la recta $\vec{v}_r=(1\,,1\,,0)$ con el vector normal del plano $\vec{n}=(1\,,1\,,1)$:

$$\cos\psi=\frac{\vec{v}_r\cdot\vec{n}}{|\vec{v}_r||\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\ \rightarrow\ \psi=\arccos\frac{2}{\sqrt{6}}=35^\circ 15'52''$$

Luego el ángulo formado entre r y π:

$$\varphi=90^\circ-35^\circ 15'52''=54^\circ 44'8''$$



3.

a) Como en el segundo apartado lo necesitaremos, vamos a obtener la ecuación general del plano que pasa por los tres primeros.

Punto: $A=(1\,,0\,,1)$.

Vectores directores: $\overrightarrow{AB}\vec{v}_s=(1\,,-1\,,0)\ ,\ \overrightarrow{AC}=(-2\,,1\,,1)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & y & z-1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\ \xrightarrow{simplificando}\ -x-y-z+2=0\ \rightarrow\ x+y+z-2=0$$

Ahora comprobamos si el punto D está en ese plano:

$$D=(1\,,-1\,,-1)\ \mapsto:\pi:1-1+1-2\neq 0\ \rightarrow\ D\notin\pi$$

Concluimos entonces que no son coplanarios (pues D no está en el mismo plano que los otros tres).

b) Brevemente: primero calcularemos la ecuación de la recta r que pasa por el punto D y que es perpendicular al plano π. A continuación calcularemos el punto Q intersección de r con π (la proyección de D en π). Por último hallaremos el simétrico P' teniendo en cuenta que el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ es Q.

La recta r pasa por el punto $D=(1\,,-1\,,-1)$ y tiene la dirección del vector normal al plano $\vec{n}=(1\,,1\,,1)$:

$$r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$$

Ahora hallamos a intersección de esa recta con el plano, que es el punto proyección Q:

$$P_r \mapsto \pi: 1+\lambda-1+\lambda-1+\lambda-2=0 \to 3\lambda=3 \to \lambda=1$$

Es:

$$Q=(2,0,0)$$

Como el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ es Q:

$$\frac{P+P'}{2}=Q \to P'=2Q-P \to P'=(3,1,1)$$

c) Si ABC son vértices consecutivos, entonces AB y BC son lados no paralelos (**cuidado**: AC no es un lado, es una diagonal). Así, el área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{BA}=(-1,1,0)$ y $\overrightarrow{BC}=(-3,2,1)$:

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}=(1,1,1)$$

Así:

$$\mathscr{A}=|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3} \quad \text{(u.a.)}$$

Para comprobar si es un rectángulo, veamos si dos de sus lados son perpendiculares:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)\cdot(-3,2,1)=(-1)\cdot(-3)+1\cdot 2+0\cdot 1=5$$

Tenemos así que no es un rectángulo pues:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\neq 0 \to \overrightarrow{BA}\not\perp\overrightarrow{BC}$$

4. Antes de nada, vamos a pasar la recta r a paramétricas:

$$r: \begin{cases} x-ay=1 \\ z=0 \end{cases} \xrightarrow{y=\mu} r: \begin{cases} x=1+a\mu \\ y=\mu \\ z=0 \end{cases}$$

a) Veamos en primer lugar si los vectores directores son dependientes (proporcionales):

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r=(a,1,0) \\ \vec{v}_s=(2,-1,0) \end{array}\right\} \to \vec{v}_r \parallel \vec{v}_s \to \frac{a}{2}=\frac{1}{-1}=\frac{0}{0} \to a=-2$$

Tenemos así que si $a=-2$ las rectas son paralelas (fácil observar que no son coincidentes).

Si $a\neq -2$ las rectas o son secantes o se cruzan. Tomamos $P_r=(1,0,0)$ y $P_s=(2,0,-1)$ y calculamos

$$\det[\overrightarrow{P_sP_r}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a+2 \neq 0$$

Deducimos así que en este caso se cruzan. Resumimos:

$$a = -2 \quad \rightarrow \quad \text{paralelas}$$
$$a \neq -2 \quad \rightarrow \quad \text{se cruzan}$$

b) Sabemos de lo anterior que son paralelas, así para hallar la distancia entre ellas basta tomar un punto de una recta y calcular la distancia a la otra.

Tomemos el punto $P_r = (1\,,0\,,0)$ y calculemos su proyección Q sobre s. Será:

$$Q = (2+2\lambda\,,-\lambda\,,-1)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{P_rQ} \perp \vec{v}_s$:

$$\overrightarrow{P_rQ}\cdot\vec{v}_s = 0 \rightarrow (2+2\lambda\,,-\lambda\,,-1)\cdot(2\,,-1\,,0) = 0 \rightarrow 5\lambda+2=0 \rightarrow \lambda = -\frac{2}{5}$$

Tenemos así que $\overrightarrow{P_rQ} = \left(\frac{1}{5}\,,\frac{2}{5}\,,-1\right)$.

Así:

$$d\,(r\,,s) = d\,(P_r\,,s) = |\overrightarrow{P_rQ}| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

5. Pasando la recta a paramétricas veremos cómo es el punto buscado:

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1 \rightarrow r : \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \rightarrow P = (1+3\lambda\,,-2\lambda\,,-1+\lambda)$$

Los planos a los que equidista P son:

$\pi_1 : x-y+3z+7=0$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{operando} x-y+3z+5=0$$

Se verifica:

$$d\,(P\,,\pi_1) = d\,(P\,,\pi_2) \rightarrow \frac{|1+3\lambda-2\lambda-3+3\lambda+7|}{\sqrt{11}} = \frac{|1+3\lambda-2\lambda-3+3\lambda+5|}{\sqrt{11}}$$

Simplificando:

$$|4\lambda+5| = |4\lambda+3| \begin{array}{l} \nearrow \; 4\lambda+5 = 4\lambda+3 \rightarrow \text{no} \\ \searrow \; 4\lambda+5 = -4\lambda-3 \rightarrow \lambda = -1 \end{array}$$

Sustituyendo:

$$P = (-2\,,-2\,,-2)$$