TEMA 7

EL ESPACIO AFÍN

Contenidos	Criterios de Evaluación
1. Puntos y coordenadas. 2. Vectores en el espacio. 3. Combinaciones lineales. Dependencia lineal. 4. Bases y coordenadas. 5. Ecuaciones de una recta. 6. Ecuaciones de un plano. 7. Posiciones relativas de dos rectas. 8. Posiciones relativas de recta y plano. 9. Posiciones relativas de planos. Tiempo estimado 16 sesiones	1. Conocer y adquirir destreza en las operaciones con vectores en el plano y en el espacio. 2. Conocer la dependencia lineal entre vectores, y saber determinar si un conjunto de ellos es dependiente o no. 3. Utilizar una base y las coordenadas en ella 4. Saber calcular e identificar las expresiones de una recta o de un plano mediante ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas y pasar de una expresión a otra. 5. Saber determinar un punto, una recta o un plano a partir de propiedades que los definan. 6. Saber plantear, interpretar y resolver los problemas de incidencia y paralelismo entre rectas y planos como sistemas de ecuaciones lineales. 7. Conocer y saber aplicar la noción de haz de planos que contienen a una recta.

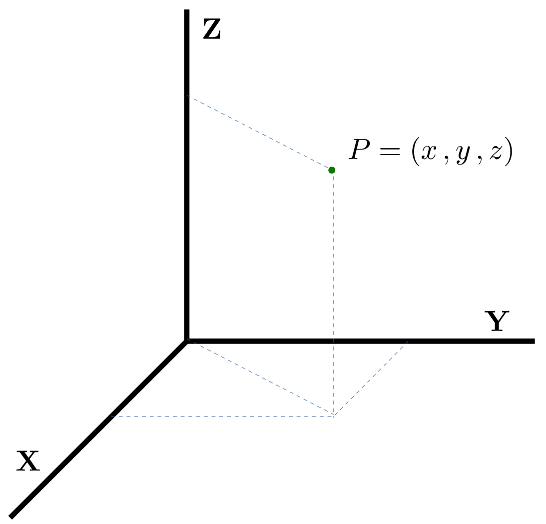
1.Puntos y coordenadas.

Un punto es una terna ordenada de números $(x\,,y\,,z)$ que determinan una localización en un espacio de tres dimensiones.

Estas tres dimensiones son direcciones intuitivas o indefinibles: largo (x), ancho (y) y alto (z).

Unos ejes de coordenadas son tres rectas que tienen esas tres direcciones y que están graduadas mediante una unidad de longitud.

Es usual denominar a cada punto mediante una letra mayúscula $P=(x\,,y\,,z)$ y denominar a los números que lo definen coordenadas cartesianas del punto.



A partir de ahora al espacio de tres dimensiones lo denominaremos, simplemente, espacio.

2.Vectores en el espacio

Definición y operaciones.

Un vector en el espacio es una terna ordenada de números, llamados componentes del vector. Es usual designarlos así

$$\vec{v}=(v_1\,,v_2\,,v_3)$$

Al conjunto de los vectores con tres componentes se le designa por $\mathbb{R}^3$.

Veamos las operaciones básicas:

Se define la suma de vectores mediante:

$$(u_1\,,u_2\,,u_3)+(v_1\,,v_2\,,v_3)=(u_1+v_1\,,u_2+v_2\,,u_3+v_3)$$

Se define el producto de un número por un vector mediante

$$k\cdot(v_1\,,v_2\,,v_3)=(kv_1\,,kv_2\,,kv_3)$$

☞ Ejemplo: dados $\vec{u} = (-1\,,3\,,0)$ y $\vec{v} = (2\,,0\,,-2)$, calculemos

$2\vec{u} + 3\vec{v} = (-2\,,6\,,0) + (6\,,0\,,-6) = (4\,,6\,,-6)$

Propiedades de la suma:

Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Vector cero: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u}$ para $\vec{0} = (0\,,0\,,0)$

Vector opuesto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Dado el vector

$\vec{u} = (u_1\,,u_2\,,u_3)$

su opuesto es el vector

$-\vec{u} = (-u_1\,,-u_2\,,-u_3)$

Propiedades del producto por números:

Asociativa: $s\,(t\vec{u}) = (st)\,\vec{u}$

Distributiva 1: $s\,(\vec{u} + \vec{v}) = s\vec{u} + s\vec{v}$

Distributiva 2: $(s + t)\,\vec{u} = s\vec{u} + t\vec{u}$.

Elemento unidad: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

❑ Vector dado por dos puntos.

Dados dos puntos $A = (x\,,y\,,z)$ y $A' = (x'\,,y'\,,z')$, se denomina vector que va desde A hasta A' o vector con origen en A y final en A' a

$$\vec{v} = (x' - x\,,y' - y\,,z' - z)$$

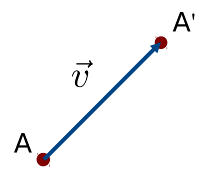
y se designa por $\overrightarrow{AA'}$.

Simbólicamente, se expresa habitualmente

$\overrightarrow{AA'} = A' - A$

✔ $\overrightarrow{AA'}$ se dibuja como una flecha con origen en A y final en A'.

✔ Observemos que un vector $\vec{v}$ puede representarse con origen en un punto P cualquiera: basta tomar $Q = P + \vec{v}$ y así tenemos $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.



☞ Ejemplo: obtengamos el vector $\overrightarrow{AB}$ donde $A = (1\,,-1\,,3)$ y $B = (2\,,5\,,8)$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1\,,6\,,5)$$

☞ Ejemplo: hallemos el extremo del vector $\vec{v} = (-1\,,2\,,5)$ al representarlo con origen en $A = (-3\,,-1\,,2)$.

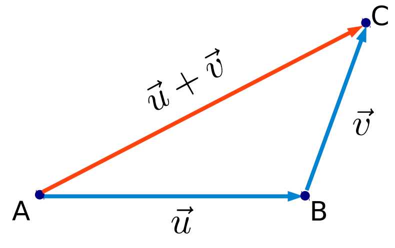
$$B = A + \vec{v} = (-4\,,1\,,7)$$

❑ Regla del paralelogramo.

Es posible sumar gráficamente dos vectores, sin componentes:

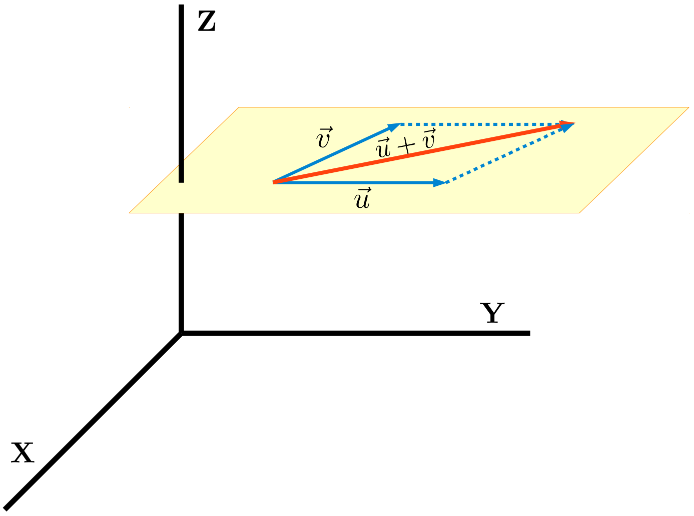
Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ entonces es

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$



Prueba: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = \overrightarrow{AC}$

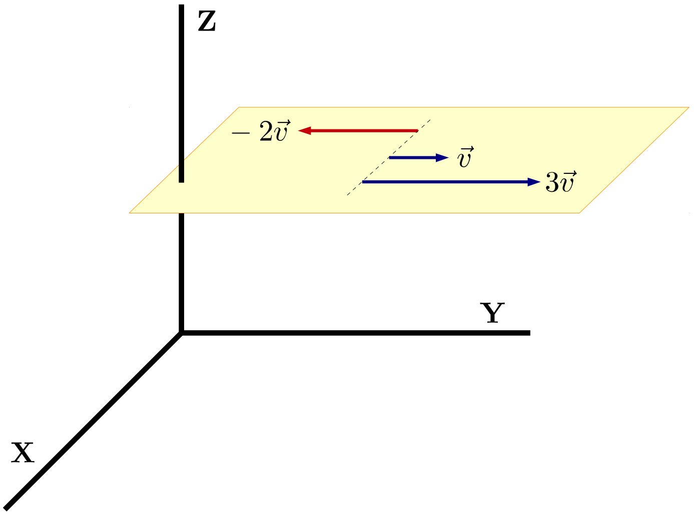
De ahí se deduce la llamada “Regla del Paralelogramo”:



Importante: observemos que el vector suma puede dibujarse en mismo plano que los vectores sumandos.

Se dice que son **coplanarios**.

❑ Producto por un escalar.



Tal y como vimos en el plano, la representación de $t \cdot \vec{u}$ tiene

- igual dirección que $\vec{u}$
- sentido igual a $\vec{u}$ si es $t > 0$
- sentido contrario a $\vec{u}$ si es $t < 0$
- la longitud de $\vec{u}$ multiplicada por $|t|$.

3.Combinaciones lineales. Dependencia.

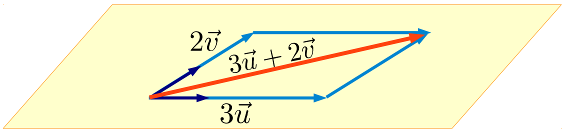
❑ Combinaciones lineales.

Una combinación lineal de $\vec{v}_1 , \vec{v}_2 , \ldots , \vec{v}_n$ es un vector de la forma

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$$

donde $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n$ son números reales.

☞ Ejemplo: veamos un gráfico con una combinación lineal de dos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:



Importante: observemos que el vector suma puede dibujarse en mismo plano que los vectores sumandos.

Se dice que son **coplanarios**.

❑ Dependencia e independencia.

Un conjunto de vectores se dice que es linealmente dependiente cuando uno de ellos es combinación lineal de los restantes.

En caso contrario, se dice que son linealmente independientes.

Unos vectores serán independientes cuando ninguno de ellos es combinación de los otros.

Debemos saber estudiar de forma rápida la dependencia de dos o tres vectores.

☞ Ejemplo: gráficamente, dos vectores son dependientes siempre y cuando sean paralelos.

☞ Ejemplo: numéricamente, dos vectores son dependientes siempre y cuando sus componentes sean proporcionales.

$$\{\vec{u}\,,\vec{v}\}\ \text{l.d.} \iff \frac{v_1}{u_1}=\frac{v_2}{u_2}=\frac{v_3}{u_3}$$

Así, $\vec{x}=(-1\,,2\,,3)$ y $\vec{y}=(-4\,,8\,,12)$ son dependientes pues es

$$\frac{-4}{-1}=\frac{8}{2}=\frac{12}{3}$$

Nótese que es $\vec{y}=4\vec{x}$.

Si consideramos la matriz cuyas filas son las componentes de los vectores, equivalen:

1) { u , v } independientes

2) rango(u , v) = 2

☞ Ejemplo: gráficamente, tres vectores son dependientes siempre y cuando sean coplanarios.

☞ Ejemplo: numéricamente, tres vectores son dependientes siempre y cuando el determinante de sus componentes sea cero.

$$\{\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\}\ \text{l.d.} \iff \det\,[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}]=0$$

Así, tenemos que $\vec{x}=(1\,,2\,,3)$, $\vec{y}=(2\,,1\,,0)$ y $\vec{z}=(-1\,,-1\,,0)$ son independientes pues es

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\neq 0$$

Si consideramos la matriz cuyas filas son las componentes de los vectores, equivalen:

1) { u , v , w } independientes

2) rango(u , v , w) = 3

4. Bases y coordenadas.

La definición de base es muy simple:

Una base en el espacio es el conjunto formado por tres vectores

$$\mathfrak{B}=\{\vec{u}_1\,,\vec{u}_2\,,\vec{u}_3\}$$

linealmente independientes.

Un intervalo cerrado y acotado se denomina usualmente intervalo compacto.

¿Cómo reconocer si tres vectores son una base?

✔ Numéricamente: el determinante de sus componentes no es cero.

✔ Gráficamente: no son coplanarios.

Una base tiene la siguiente propiedad fundamental:

Dada una base $\mathfrak{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ en el espacio, todo vector $\vec{x}$ puede expresarse como combinación lineal única de los vectores de la base:

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$$

A esos números (x_1, x_2, x_3) se les llama coordenadas de $\vec{x}$ en la base $\mathfrak{B}$.

Cuidado: no confundamos las componentes de un vector con sus coordenadas en una base determinada.

☞ Ejemplo: consideremos los vectores

$$\vec{u}_1 = (1, 2, 0)\ ,\ \vec{u}_2 = (-1, 0, 0)\ ,\ \vec{u}_3 = (0, 1, 1)$$

a) Comprobemos que forman una base $\mathfrak{B}$: observemos que se trata de tres vectores independientes puesto que es:

$$\det[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

b) Obtengamos las coordenadas de $\vec{x} = (1, 2, 3)$ en la base $\mathfrak{B}$. Para ello expresamos $\vec{x} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3$:

$$(1, 2, 3) = a\,(1, 2, 0) + b\,(-1, 0, 0) + c\,(0, 1, 1)$$

Igualando obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \ \ a - b \\ 2 = 2a \qquad + c \\ 3 = \qquad\qquad c \end{array}\right\} \to a = -\frac{1}{2}\,,\ b = -\frac{3}{2}\,,\ c = 3$$

Las coordenadas de $\vec{x}$ en $\mathfrak{B}$ son $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 3\right)$.

c) Averigüemos qué vector $\vec{y}$ tiene coordenadas $(1, 2, 3)$ en la base $\mathfrak{B}$:

$$\vec{y} = 1\cdot(1, 2, 0) + 2\cdot(-1, 0, 0) + 3\cdot c\,(0, 1, 1) = (-1, 5, 3)$$

Observemos que, en general, las componentes de un vector no coincidirán con sus coordenadas en una base.

No obstante, hay una base especial en la que siempre coinciden: es la formada por

$\vec{\imath} = (1, 0, 0), \vec{\jmath} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$

que se denomina base canónica.

5. Ecuaciones de una recta

Nuestro objetivo es obtener una fórmula que nos permita obtener todos los puntos que deseemos de una recta y decidir si un punto está o no en ella.

❑ Ecuaciones vectorial y paramétricas

Una recta en el espacio queda determinada, al igual que en el plano, si conocemos un punto de ella y un vector de dirección.

Supongamos así que de una recta r conocemos:

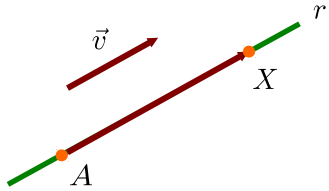
Un punto: $A = (x_0, y_0, z_0)$

Un vector de dirección: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

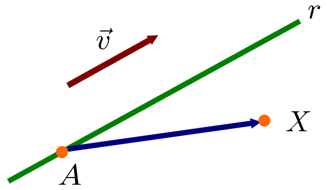
Es usual denominar a A un “punto fijo” de la recta y llamar a P un “punto genérico”.

Observemos que todo vector múltiplo del vector director también es un vector de dirección de la recta.

¿Cuándo un punto $X = (x\,,y\,,z)$ está en la recta? Observemos que X está en la recta si $\overrightarrow{AX}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$:



$X \in r$ si $AX \parallel r$



$X \notin r$ si $AX \nparallel r$

Así el punto X está en la recta r precisamente cuando $\overrightarrow{AX}$ y $\vec{v}$ son dos vectores dependientes. Existe así un número real λ tal que:

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \cdot \vec{v} \;\rightarrow\; X - A = \lambda \cdot \vec{v} \;\rightarrow\; X = A + \lambda \cdot \vec{v}$$

Escribamos esto con coordenadas:

$$(x\,,y\,,z) = (x_0\,,y_0\,,z_0) + \lambda \cdot (v_1\,,v_2\,,v_3) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

La ecuación de la izquierda es denominada "ecuación vectorial" de la recta.

Igualando coordenadas obtenemos:

La recta r que pasa por el punto $A = (x_0\,,y_0\,,z_0)$ y tiene la dirección de $\vec{v} = (v_1\,,v_2\,,v_3)$ es el conjunto de puntos $X = (x\,,y\,,z)$ que verifican

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1\lambda \\ y = y_0 + v_2\lambda \\ z = z_0 + v_3\lambda \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Las ecuaciones de la izquierda se denominan "ecuaciones paramétricas" de la recta.

☞ <u>Ejemplo:</u> Consideremos la recta de ecuación

$$r : \begin{cases} x &=& 1 - \lambda \\ y &=& 2 + 3\lambda \\ z &=& 3 \end{cases}$$

Un punto la recta es $A = (1\,,2\,,3)$ y un vector director $\vec{v} = (-1\,,3\,,0)$.

Para hallar otro punto de la recta, hacemos por ejemplo $\lambda = 2$ y obtenemos $B = (-1\,,8\,,3)$.

❑ Ecuación continua

Si en las ecuaciones paramétricas despejamos el parámetro e igualamos obtenemos una interesante igualdad que deben cumplir los puntos de la recta:

Sea r la recta que pasa por el punto $A = (x_0\,,y_0\,,z_0)$ y tiene la dirección de $\vec{v} = (v_1\,,v_2\,,v_3)$.

Tenemos entonces que los puntos $X = (x\,,y\,,z)$ que verifican la ecuación

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

son precisamente los puntos de la recta.

La ecuación de la izquierda es denominada "ecuación continua" de la recta.

☞ Ejemplo: Consideremos la recta r de ecuación continua

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = z - 3$$

Un punto de la recta es: $A = (-1\,,0\,,3)$.

Un vector de dirección es: $\vec{v} = (1\,,2\,,1)$.

Para obtener más puntos es mejor usar las paramétricas.

Para averiguar si el punto $B = (3\,,8\,,5)$ está en r sustituimos:

$$\frac{3+1}{1} = \frac{8}{2} \neq 5 - 3$$

De donde deducimos que $B \notin r$.

❑ Forma implícita

Para ilustrar esta fórmula, vamos a considerar y resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & & & = & 3 \end{array}\right\}$$

Por el Teorema de Rouché, como rg(C)=rg(A)=2 tenemos que es compatible indeterminado con un parámetro.

Pasamos la incógnita y al segundo miembro y despejamos:

$$S : \left\{\begin{array}{lcl} x - z & = & 1 - y \\ x & = & 3 + 2y \end{array}\right. \xrightarrow{y=\lambda} \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{array}\right.$$

¡Hemos obtenido la ecuación paramétrica de una recta! En general:

> Toda recta es la solución de un sistema de ecuaciones lineales
>
> $$\left\{\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array}\right.$$
>
> en el que el rango de la matriz del sistema es 2.

☞ Ejemplo: obtengamos la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A = (-2\,,1\,,0)$ y que es paralela a

$$s : \left\{\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2y - z = -2 \end{array}\right.$$

Si resolvemos el sistema, tomando y como parámetro, nos queda:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_s = (2\,,1\,,2)$$

Así r pasa por $A = (-2\,,1\,,0)$ y tiene la dirección de $\vec{v}_s = (2\,,1\,,2)$:

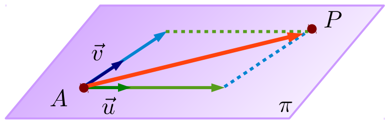
$$r : \left\{\begin{array}{l} x = -2 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{array}\right.$$

6. Ecuaciones de un plano

Un plano es una extensión de dos dimensiones en el espacio. Queda determinado por

Un punto: $A = (x_0 \, , y_0 \, , z_0)$

Dos vectores directores independientes $\vec{u} = (u_1 \, , u_2 \, , u_3)$, $\vec{v} = (v_1 \, , v_2 \, , v_3)$



Un punto $X = (x \, , y \, , z)$ está en el plano cuando $\overrightarrow{AX}$ es una combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \; \rightarrow \; X - A = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \; \rightarrow \; X = A + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

La ecuación de la izquierda es denominada "ecuación vectorial" del plano.

Escribiendo obtenemos:

El plano π que pasa por el punto $A = (x_0 \, , y_0 \, , z_0)$ y tiene las direcciones determinadas por los vectores independientes $\vec{u} = (u_1 \, , u_2 \, , u_3)$ y $\vec{v} = (v_1 \, , v_2 \, , v_3)$ es el conjunto de puntos $X = (x \, , y \, , z)$ que verifican

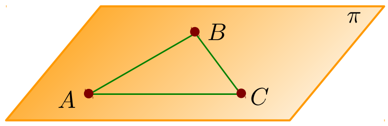
$$\begin{cases} x = x_0 + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = y_0 + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = z_0 + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases}$$

donde $\lambda \, , \mu \in \mathbb{R}$.

☞ Ejemplo: obtengamos las ecuaciones del plano π que contiene al triángulo de vértices $A = (-1 \, , 2 \, , 0)$, $B = (2 \, , 1 \, , -1)$ y $C = (-2 \, , 1 \, , 3)$.

Punto: $A = (-1 \, , 2 \, , 0)$

Vectores directores: $\overrightarrow{AB} = (3 \, , -1 \, , -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1 \, , -1 \, , 3)$.



Su ecuación es:

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda - \mu \\ y = 2 - \lambda - \mu \\ z = - \lambda + 3\mu \end{cases}$$

❑ Ecuación implícita o general

Recordemos si un punto X está en el plano determinado por el punto A y los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tenemos que $\overrightarrow{AX}$ es una combinación de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Así, el determinante de las componentes de esos tres vectores es cero:

$$\det[\overrightarrow{AX} \, , \vec{u} \, , \vec{v}] = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando por la primera línea

$$(x - x_0) \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - (y - y_0) \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + (z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

Llamando

$$a = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \; , \; b = -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \; , \; c = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Queda

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

La ecuación de la izquierda es denominada "ecuación normal" del plano. En la lección siguiente volveremos sobre ella.

Operando y llamando d al término independiente, nos queda:

Todo plano es la solución de una ecuación lineal

$$ax + by + cz + d = 0$$

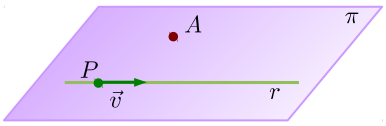
donde los coeficientes no son todos nulos.

La ecuación de la izquierda es denominada "ecuación general" del plano.

☞ Ejemplo: Obtengamos la ecuación general del plano que pasa por el punto $A = (1\,,3\,,-1)$ y contiene a la recta

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-1}$$

Ante todo, observemos que si la recta está contenida en el plano, su punto $P_r = (1\,,2\,,0)$ está en el plano y su vector director $\vec{v}_r = (3\,,4\,,-1)$ está en la dirección del plano. Así:



Punto: $P_r = (1\,,2\,,0)$

Vectores directores: $\overrightarrow{AP_r} = (0\,,-1\,,1)$, $\vec{v}_r = (3\,,4\,,-1)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando:

$$3x - 3y - 3z + 3 = 0 \rightarrow x - y - z + 1 = 0$$

☞ Ejemplo: Obtengamos a para que los puntos $A = (-1\,,0\,,1)$, $B = (0\,,2\,,0)$, $C = (2\,,0\,,1)$ y $D = (1\,,a\,,-3)$ sean coplanarios y hallemos la ecuación del plano que los contiene.

El plano π que los contiene está determinado por

Punto: $A = (-1\,,0\,,1)$

Vectores directores: $\overrightarrow{AB} = (1\,,2\,,-1)$, $\overrightarrow{AC} = (3\,,0\,,0)$

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; -3y - 6z + 6 = 0 \;\rightarrow\; y + 2z - 2 = 0$$

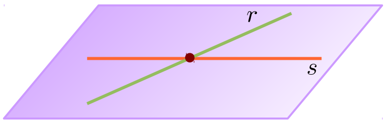
Como el punto D es coplanario con los demás, está en el plano π y verifica su ecuación:

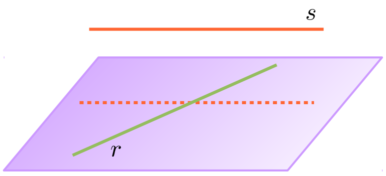
$$D \in \pi \;\rightarrow\; a + 2\,(-3) - 2 = 0 \;\rightarrow\; a = 8$$

7.Posiciones relativas de dos rectas.

En el plano, dadas dos rectas -distintas- r y s sólo hay dos posibilidades: o son secantes (se cortarán en un punto) o son paralelas (no se cortarán en ningún punto).

Sin embargo, en el espacio nos encontramos con tres posibilidades: pueden ser secantes, paralelas o cruzarse:





Vamos a ver cómo proceder a un estudio detenidamente. Consideremos:

Recta r que pasa por el punto P_r y que tiene dirección $\vec{v}_r$.

Recta s que pasa por el punto P_s y tiene dirección $\vec{v}_s$.

Primero consideramos los vectores $\{\vec{v}_r\,,\vec{v}_s\}$:

A. Encontramos $\vec{v}_r \parallel \vec{v}_s$:

1. Si $P_r \in s$: son coincidentes (se trata de la misma recta)
2. Si $P_r \notin s$: son paralelas.

B. Encontramos $\vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s$:

1. Si $\{\overrightarrow{P_rP_s}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s\}$ son l.d.: rectas secantes.
2. Si $\{\overrightarrow{P_rP_s}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s\}$ son l.i.: rectas que se cruzan.

☞ Ejemplo: Comprobemos que las rectas r y s dadas a continuación son paralelas y obtengamos la ecuación del plano que las contiene:

$$r : x-1 = \frac{y-1}{-2} = z-2 \quad , \quad s : \begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 2+4\lambda \\ z = 3-2\lambda \end{cases}$$

Observemos que los vectores $\vec{v}_r = (1\,,-2\,,1)$ y $\vec{v}_s = (-2\,,4\,,-2)$ son paralelos, pues es claro que $\vec{v}_s = -2\vec{v}_r$.

Para obtener la ecuación del plano que las contiene, tenemos el punto $P_r = (1\,,1\,,2)$ y los vectores $\overrightarrow{P_rP_s} = (0\,,1\,,1)$ y $\vec{v}_r = (1\,,-2\,,1)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Operando y simplificando

$$3x+y-z-2=0$$

☞ Ejemplo: Estudiemos la posición relativa, según los valores de a, de las dos rectas cuyas ecuaciones son:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+a}{-1} = z \quad , \quad s : \begin{cases} x + y = 5 \\ \quad\;\; z = 3 \end{cases}$$

Vamos a obtener un punto y un vector director de cada una:

$$\vec{v}_r = (2\,,-1\,,1)\,,\, P_r = (1\,,-a\,,0)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ z = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{despejando } x} \begin{cases} x = \quad t \\ y = 5 - t \\ z = 3 \end{cases}$$

Ahora:

$$\vec{v}_s = (1\,,-1\,,0)\,,\, P_s = (0\,,5\,,3)$$

Como los vectores directores son claramente independientes, esas rectas bien son secantes bien se cruzan. Calculamos

$$\det[\overrightarrow{P_rP_s}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s] = \begin{vmatrix} -1 & 5+a & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a + 1$$

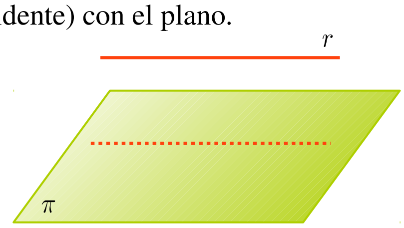
Tenemos así:

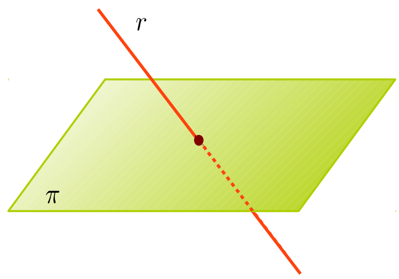
Si $a = -1$ se trata de dos rectas secantes.

Si $a \neq -1$ se trata de dos rectas que se cruzan.

8. Posiciones relativas de recta y plano

Sólo hay tres posibles posiciones: recta contenida en el plano, recta paralela (exterior) al plano y recta secante (incidente) con el plano.





Para realizar este estudio lo mejor es usar las paramétricas de la recta y la general del plano:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + v_1\lambda \\ y = y_0 + v_2\lambda \\ z = z_0 + v_3\lambda \end{cases} \quad , \quad \pi : ax + by + cz + d = 0$$

Para obtener la posible intersección sustituimos las coordenadas de un punto genérico de la recta en la ecuación general del plano:

$$a(x_0 + v_1\lambda) + b(y_0 + v_2\lambda) + c(z_0 + v_3\lambda) + d = 0$$

Y vemos si hay solución para t:

$$(av_1 + bv_2 + cv_3)\lambda = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) \text{ [*]}$$

Tenemos estas posibilidades:

A. Es $av_1 + bv_2 + cv_3 \neq 0$:

En este caso la ecuación tiene solución única, lo que viene a decirnos que la recta es incidente (secante) con el plano.

Para hallar las coordenadas del punto intersección, basta sustituir t en las ecuaciones paramétricas por el valor obtenido.

B. Si $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$:

1. Si $A = (x_0\,, y_0\,, z_0) \notin \pi$: no hay solución para [*] y tenemos que la recta es paralela plano.
2. Si $A = (x_0\,, y_0\,, z_0) \in \pi$: todo número t cumple [*] (pues es $0 \cdot t = 0$) y tenemos que la recta está contenida en el plano.

Observemos que la condición de paralelismo de recta y plano es

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$$

En el tema siguiente daremos una interpretación geométrica adicional.

☛ Ejemplo: Comprobemos que la recta $r: \dfrac{x+1}{2} = -y = z+1$ es incidente con el plano $\pi: 2x+3y+z=1$ y obtengamos el punto de corte.

Obtenemos la expresión paramétrica de la recta

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \quad\;\; - \;\lambda \\ z = -1 + \;\lambda \end{cases}$$

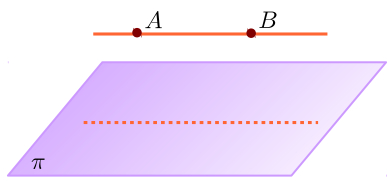
y sustituimos en la ecuación del plano:

$$2(-1+2\lambda) + 3(-\lambda) + (-1+\lambda) = 1 \;\rightarrow\; 2\lambda - 3 = 1 \;\rightarrow\; \lambda = 2$$

Como hay solución única, son secantes en el punto correspondiente al valor de ese parámetro:

$$P = (3\,, -2\,, 1)$$

☛ Ejemplo: Dados los puntos $A = (0\,, 2\,, -1)$ y $B = (a\,, 1\,, 2)$, obtengamos el valor de a para el que la recta AB es paralela al plano $\pi: 3x - y = 5$.



Consideramos el vector $\overrightarrow{AB} = (a\,, -1\,, 3)$ y aplicamos la condición de paralelismo:

$$a \cdot 3 + (-1)\cdot(-1) + 3 \cdot 0 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

9. Posiciones relativas de planos

❑ Posiciones de dos planos

Si tenemos las ecuaciones

$$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad , \quad \pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

sólo hay tres posibles posiciones: son planos secantes en una recta, son planos paralelos o son planos coincidentes (esto es, se trata de dos ecuaciones que representan a un mismo plano).

Las posiciones relativas se desprenden fácilmente del Teorema de Rouché. Consideremos

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

a) Si $\operatorname{rg} C=\operatorname{rg} A=2$: son secantes en una recta. La solución nos proporciona sus ecuaciones paramétricas.

b) Si $\operatorname{rg} C=1$, $\operatorname{rg} A=2$: son planos paralelos. No hay, pues, solución.

c) Si $\operatorname{rg} C=\operatorname{rg} A=1$: son planos coincidentes. Si resolvemos, pasamos dos incógnitas al otro miembro como parámetros y así obtenemos las ecuaciones paramétricas del plano.

☞ <u>Ejemplo</u>: veamos la posición relativa de los planos siguientes

$$[A]:\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \end{cases}$$

Es evidente que se trata de un sistema el sistema es incompatible.

Es fácil observar que estamos ante dos planos paralelos: no hay ningún punto en común.

☞ <u>Ejemplo</u>: el sistema siguiente es compatible indeterminado:

$$[B]:\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \end{cases} \xrightarrow{sol} (x\,,y\,,z)=(2-\lambda\,,-1\,,\lambda)$$

Estamos ante dos planos secantes en una recta.

Observemos que la solución depende de un parámetro, por ello se trata de la ecuación paramétrica de una recta.

❑ Posiciones relativas de tres planos

Para determinar la posición relativa de tres planos acudimos al Teorema de Rouché. Consideramos el sistema de tres ecuaciones lineales de tres incógnitas formado por sus tres ecuaciones generales. Llamamos C a la matriz de los coeficientes y A a la matriz ampliada.

Caso 1: $\operatorname{rg}(C)=3$.

El sistema tiene solución única y los tres planos se cortan en un punto.

Caso 2: $\operatorname{rg}(C)=2\,,\operatorname{rg}(A)=3$.

El sistema es incompatible y los tres planos no tienen ningún punto en común.

En el caso 2 pueden ser dos paralelos con el otro secante con cada uno de ellos o ser secantes dos a dos.

Caso 3: $\operatorname{rg}(C)=2\,,\operatorname{rg}(A)=2$.

Los tres planos tienen en común una recta.

En el caso 3 pueden ser tres secantes entre sí en una recta o doso secante.

Caso 4: $\operatorname{rg}(C)=1\,,\operatorname{rg}(A)=2$.

Los planos son paralelos, aunque dos de ellos pueden coincidir.

Caso 5: $\operatorname{rg}(C)=1\,,\operatorname{rg}(A)=1$.

Los planos coinciden.

☞ Ejemplo: los siguientes sistemas son incompatibles.

$$[C]:\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \end{array}\right. ,\ [D]:\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

En [C] tenemos dos planos paralelos y un tercero secantes con cada uno de ellos a lo largo de una recta.
En [D] tres planos que no tienen ningún punto en común, aunque dos a dos son secantes en una recta.

☞ Ejemplo: el sistema es compatible determinado: observemos que la solución es única.

$$[E]:\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{sol} (x\,,y\,,z) = (2\,,-1\,,0)$$

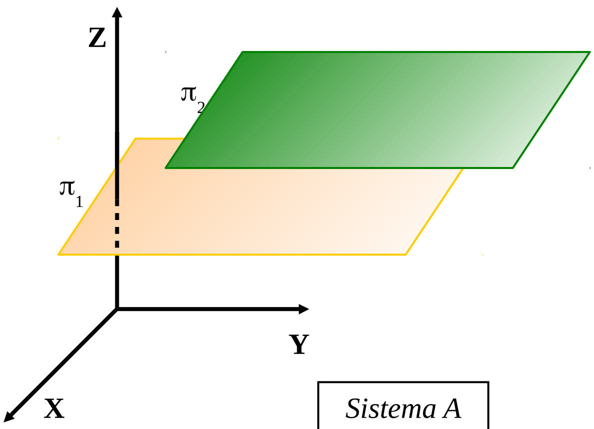
Estamos ante tres planos secantes en un punto.

☞ Ejemplo: el sistema es compatible indeterminado: observemos que la solución depende de un parámetro.

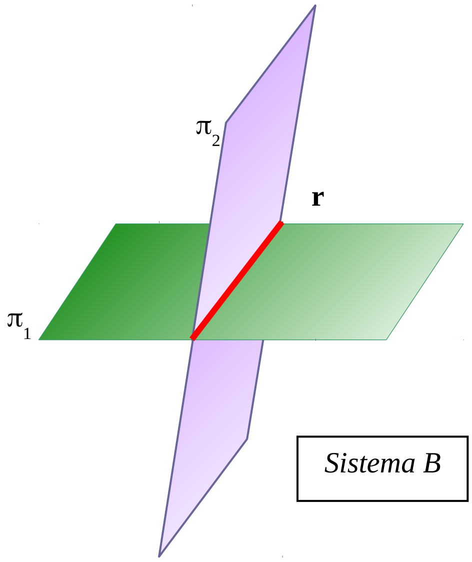
$$[F]:\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 5 \end{array}\right. \xrightarrow{sol} (x\,,y\,,z) = (2-\lambda\,,-1\,,\lambda)$$

Estamos ante tres planos secantes en una recta.

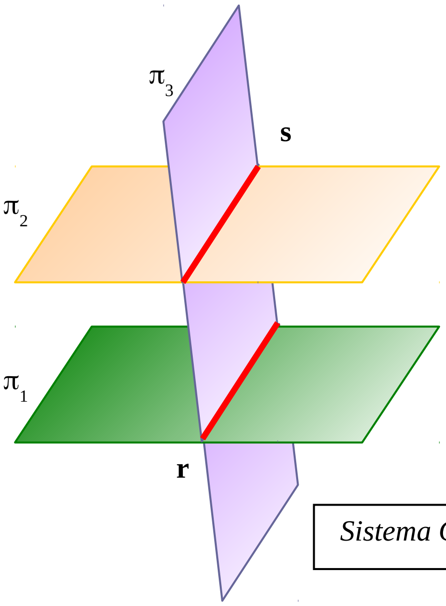
Aquí tenemos una representación de estos casos:



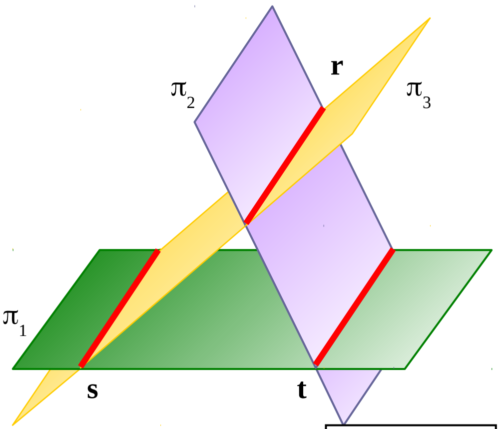
Sistema A



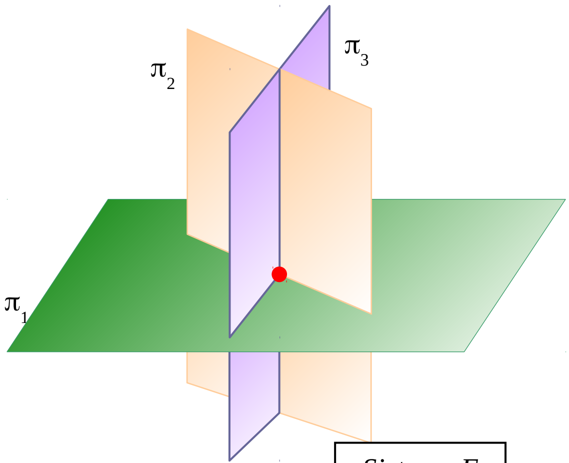
Sistema B



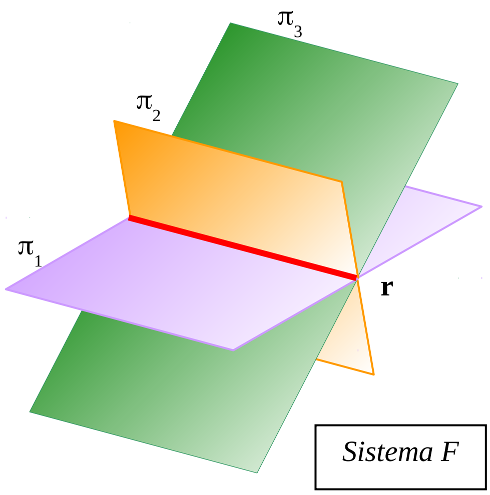
Sistema C



Sistema D



Sistema E



Sistema F

Ejercicios

1. [S/08] Los puntos

$$A(-2\,,3\,,1)\;,\;B(2\,,-1\,,3)\;,\;C(0\,,1\,,-2)$$

son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$

a) Halla las coordenadas del vértice D.

b) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC.

c) Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

2. [S/08] Sea la recta dada por

$$r:\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y-mz & = & 2 \\ x-y-z & = & -m \end{array}\right.$$

y el plano definido por

$$\pi: x+my-z=1$$

a) ¿Existe algún valor de m para el que ambos son paralelos ?

b) ¿Para qué valor de m está r contenida en π?

c) ¿Cuál es la posición relativa de r y π si $m=0$?

3. [S/08] Sea la recta s dada por

$$s:\left\{\begin{array}{rcr} x-z & = & -1 \\ 2y+z & = & 3 \end{array}\right.$$

a) Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a la recta s y contiene a la recta dada por

$$r: x-1=-y+2=z-3$$

b) Estudia la posición relativa de s y de $\pi_2: x+y=3$,

4. [S/08] Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a la recta r definida por

$$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$$

5. [S/08] Considera las rectas definidas por

$$r:\left\{\begin{array}{r} x=0 \\ 3y+z=3 \end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{r} 2x-z=3 \\ y=0 \end{array}\right.$$

a) Estudia la posición relativa de r y s.

b) Halla la ecuación general de un plano que contiene a s y es paralelo a r.

6. [S/08] Se sabe que los planos de ecuaciones

$$x+2y+bz=1\,,\;2x+y+bz=0\,,\;3x+3y-2z=1$$

se cortan en una recta r.

a) Calcula el valor de b.

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta.

7. [S/08] Estudia si para algún valor $m\neq 0$ son paralelas las rectas cuyas ecuaciones son

$$r: mx=y=z+2 \quad , \quad s:\frac{x-4}{4}=y-1=\frac{z}{2}$$

8. [S/09] Sean las rectas dadas por

$$r:\left\{\begin{array}{rcr} y & = & -1 \\ 2x-z & = & 2 \end{array}\right. \;,\; s:\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 4+3\lambda \\ y & = & 3-\lambda \\ z & = & 5+4\lambda \end{array}\right.$$

Halla la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

9. [S/09] Consideremos el punto $P(1\,,0\,,0)$ y las rectas

$$r: x-3=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$$

$$s:(x\,,y\,,z)=(1\,,1\,,0)+\lambda(-1\,,2\,,0)$$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas

b) Halla la ecuación del plano que pasando por P es paralelo a r y s.

10. [S/09] Considera las rectas definidas por

$$r:\left\{\begin{array}{r} x-y+3=0 \\ x+y-z-1=0 \end{array}\right. \;,\; s:\left\{\begin{array}{r} 2y+1=0 \\ x-2z+3=0 \end{array}\right.$$

Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

11. [S/09] Consideremos la recta r definida por

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=0 \end{array}\right.$$

y la recta s que pasa por los puntos

$$A(2\,,1\,,0)\,,\;B(1\,,0\,,-1)$$

Estudia la posición relativa de ambas rectas.

12. [S/09] Sean el plano la recta dados por

$$\pi: 3x-2y-2z=7$$

$$r:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{2}$$

Determina la ecuación del plano paralelo a π que contiene a la recta.

13.[S/09] Se consideran las rectas definidas por

$$r : \begin{cases} x - y = -2 \\ x - z = -3 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x &= 1 \\ 2y - z &= -2 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de r y s.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a s.

14.[S/09] Consideremos el punto y la recta definidos por

$$P(2\,,3\,,-1) \quad , \quad r : \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto y contiene a la recta.

15.[S/10] Considera los puntos

$$A(1\,,0\,,2)\ ,\ B(-1\,,2\,,4)$$

y la recta r definida por

$$\frac{x+2}{2} = y - 1 = \frac{z-1}{3}$$

Halla la ecuación del plano paralelo a r y que contiene los puntos A y B.

16.[S/10] Considera las rectas r y s de ecuaciones

$$r : x - 1 = y = 1 - z \quad , \quad s : \begin{cases} x - 2y &= -1 \\ y + z &= 1 \end{cases}$$

a) Determina su punto de corte.

b) Determina la ecuación del plano que contiene a r y s.

17.[S/10] Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento $\overline{AB}$ en tres partes iguales, con

$$A(1, 2, 1)\ ,\ B(-1, 0, 3)$$

18.[S/10] Determina el valor de t para que sean coplanarios los puntos

$$A(1, 1, 1), B(-1, 2, 0), C(2, 1, 2), D(t, -2, 2)$$

19.[S/10] Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta r de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 2y + 11 &= 0 \\ 2y + z - 19 &= 0 \end{cases}$$

y contiene a la recta s definida por

$$r : \begin{cases} x &= 1 - 5\lambda \\ y &= -2 + 3\lambda \\ z &= 2 + 2\lambda \end{cases}$$

20.[S/10] Considera los planos dados

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ ay + z &= 0 \\ x + (1+a)y + az &= a + 1 \end{cases}$$

a) ¿Cuánto ha de valer a para que no tengan ningún punto en común?

b) Para $a = 0$, determina la posición relativa de los planos.

21.[S/10] Sean los puntos

$$A(2\,,\lambda\,,\lambda), B(-\lambda\,,2\,,0), C(0\,,\lambda\,,\lambda - 1)$$

a) ¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que los puntos A, B, C estén alineados? Justifica la respuesta.

b) Para halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B, C.

22.[S/11] Considera los puntos

$$A(1\,,k\,,3)\,,\ B(k+1\,,0\,,2)\,,\ C(1\,,2\,,0)\,,\ D(2\,,0\,,1)$$

¿Existe algún valor de k para el que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean linealmente dependientes?

23.[S/11] Dados el plano π y la recta r de ecuaciones

$$\pi : x + 2y - z = 0 \quad , \quad r : \begin{cases} 3x - y &= 5 \\ x + y - 4z &= -13 \end{cases}$$

Encuentra la intersección del plano π y la recta r.

24.[S/11] Dados el punto $P(1\,,1\,,-1)$ y la recta de ecuaciones

$$r : \begin{cases} x + z &= 1 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$

Halla la ecuación del plano que contiene a r y pasa por P.

25.[S/11] Considera los puntos $A(1\,,0\,,1)$ y $B(2\,,1\,,0)$, así como la recta dada por

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

a) Determina la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y B.

b) Determina si la recta que pasa por los puntos $P(1\,,2\,,1)$ y $Q(3\,,4\,,1)$ está contenida en dicho plano.

26.[S/11] Dadas las recta r y s definidas por

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3 \,,\; s : \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ 2y-z & = & -2 \end{array} \right.$$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r .

b) Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r .

27.[S/12] El punto $M\,(1\,,-1\,,0)$ es el centro de un paralelogramo y $A\,(2\,,1\,,-1)$ y $B\,(0\,,-2\,,3)$ son dos vértices consecutivos del mismo.

a) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

b) Determina uno de los otros dos vértices

28.[S/12] Determina la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}$$

$$s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$$

29.[S/12] Sean los puntos

$$A\,(0\,,0\,,1)\;,\;B\,(1\,,0\,,-1)\;,\;C\,(0\,,1\,,-2)\;,\;D\,(1\,,2\,,0)$$

a) Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

b) Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.

30.[S/12] De un paralelogramo $ABCD$ conocemos tres vértices consecutivos:

$$A\,(2\,,-1\,,0)\;,\;B\,(-2\,,1\,,0)\;,\;C\,(0\,,1\,,2)$$

Calcula el vértice D.

31.[S/12] Sean r y s las rectas dadas por

$$r : \left\{ \begin{array}{r} x+y-z=6 \\ x+z=3 \end{array} \right. \;,\; s : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$$

a) Determina el punto de intersección de ambas rectas.

b) Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

32.[S/12] Determina los valores de k para los que son linealmente dependientes los vectores

$$\vec{u} = (k\,,1\,,1)\;,\vec{v} = (2\,,1\,,-2)\;,\vec{w} = (1\,,1\,,k)$$

<u>Puntos y vectores</u>

Paralelogramos: 1a) , 27 , 30

Trocear segmento: 17

Parámetro para alineados: 21

Parámetro para coplanarios/depencencia: 22 , 29b , 32

<u>Ecuación de una recta</u>

1b

<u>Ecuación de un plano</u>

Pasa por tres puntos: 1d , 21b , 29a

Contiene a recta y paralelo a otra: 3a , 5b , 8 , 10 , 13b , 19 , 26b

Pasa por punto y contiene a recta: 4a , 14 , 24 , 26a

Pasa por punto y paralelo a dos rectas: 9b

Paralelo a otro y contiene a una recta: 12

Pasa por dos puntos y paralelo a recta: 25a

Contiene a dos rectas secantes: 16 , 31b

<u>Posiciones relativas de recta y plano</u>

Sistema con parámetro: 2

Intersección: 3b , 23

Recta contenida en plano: 25b

<u>Posiciones relativas de rectas</u>

Estudio: 5a , 9a , 11 , 13 a , 28 (paralelas)

Corte: 16 a , 31 a

Discusión con parámetro: 7

<u>Posiciones relativas de planos</u>

Tres planos con parámetro: 6 , 20

Cuestiones

1. Queremos representar el vector $\vec{v}$ con extremos en el punto B. ¿cómo obtener el punto origen A?

2. En el paralelogramo que determinan $\vec{a}$ y $\vec{b}$, ¿qué interpretación tienen los vectores $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$?

3. Si tres vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ verifican $2\vec{x}+\vec{y}-3\vec{z}=\vec{0}$, ¿son dependientes o independientes?

4. El determinante de las componentes de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ es cero. ¿Forman esos tres vectores una base?

5. Sean a y b dos números reales no nulos y distintos. Demuestra que es una base

$$\mathfrak{B} = \{(a\,,-b\,,0)\ ,(0\,,a\,,b)\ ,(a\,,0\,,b)\}$$

6. Deduce que la fórmula que permite obtener las coordenadas del punto medio M el segmento $\overline{AB}$ es

$$M = \frac{A+B}{2}$$

Aplícala para obtener el punto medio del segmento cuyos extremos son

$$A\,(-2\,,1\,,-3) \text{ y } B\,(4\,,1\,,1)$$

7. Dados dos puntos A y B, ¿cómo obtener el punto simétrico A' de A respecto de B?

8. Encuentra las ecuaciones paramétricas de los ejes de coordenadas.

9. Halla las ecuaciones de los planos coordenados.

10. Señala qué rectas tienen las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

11. Comprueba que el plano

$$\pi : \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A\,(a\,,0\,,0)$, $B\,(0\,,b\,,0)$ y $C\,(0\,,0\,,c)$.

12. Razona que si las rectas r y s son secantes, entonces existe un plano π que las contiene. ¿Cómo obtenemos su ecuación?

13. Halla a y b para que el punto $A\,(1\,,a\,,b)$ esté en la recta $r : \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{2}$.

14. Halla a para que el punto $A\,(-1\,,a\,,5)$ esté en el plano $\pi : 2x+3y+z+3=0$.

15. Halla k para que la recta $r : \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{k}=z+2$ sea paralela al plano $\pi : 2x-3y+z=-1$. ¿Está contenida r en π?

16. Consideremos los puntos

$$A_1\,(x_1\,,y_1\,,z_1)\ ,\ A_2\,(x_2\,,y_2\,,z_2)\ ,\ A_3\,(x_3\,,y_3\,,z_3)$$

escribe la condición que deben verificar sus coordenadas para que los tres estén alineados.

17. Consideremos los puntos

$$A_k\,(x_k\,,y_k\,,z_k)\ ,\ k=1,2,3,4$$

escribe la condición que deben verificar sus coordenadas para que los cuatro sean coplanarios.

18. Consideremos los planos cuyas ecuaciones generales son:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

a) Si $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{c_2}{c_1}\neq\dfrac{d_2}{d_1}$ los planos son ...

b) Si $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{c_2}{c_1}=\dfrac{d_2}{d_1}$ los planos son ...

19. Discute según los valores de d la posición relativa de los planos:

$$\pi_1 : x+3y-2z=1\ ,\ \pi_2 : 2x+6y-4z=d$$

20. Se llama haz de planos al conjunto de todos los planos que contienen a una recta. Si es

$$r : \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

La ecuación del haz de planos es

$$\lambda\,(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu\,(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

Obtén la ecuación del haz de planos que pasa por la recta

$$r : \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$$

Autoevaluación

1. Consideremos los vectores:

$$\vec{u} = (1\,,-1\,,3)\ ,\ \vec{v} = (0\,,1\,,-2)\ ,\ \vec{w} = (3\,,a\,,0)$$

a) ¿Son $\vec{u}$ y $\vec{v}$ paralelos?

b) Halla a para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

c) Demuestra que para $a = 0$ forman una base $\mathfrak{B}$.

d) Obtén las coordenadas de $\vec{x} = (1\,,1\,,1)$ en dichas base $\mathfrak{B}$

2. Sean

$$A\,(1\,,-1\,,2)\ ,\ B\,(3\,,2\,,1)\ ,\ C\,(1\,,0\,,1)\ ,\ D\,(1\,,-1\,,a)$$

a) Si intentamos representar $\overrightarrow{AB}$ con extremo en C, ¿cuáles serán las coordenadas del origen?

b) Obtén las coordenadas de los puntos que dividen a $\overline{AB}$ en tres partes iguales.

c) Si C es el centro de un paralelogramo en el que A y B son vértices, obtén las coordenadas de los otros dos vértices.

d) Halla a para que los cuatro puntos sean coplanarios.

3. Consideremos

$$A\,(1\,,-1\,,2)\ ,\ r : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{-1}\ ,\ s : \left\{ \begin{array}{l} x - 3y = \ \ 0 \\ y + \ \ z = -1 \end{array} \right.\ ,\ \pi : 2x - z + 6 = 0$$

a) Comprueba que r y s son secantes, obteniendo el punto de intersección de ambas.

b) Obtén la ecuación del plano que contiene a r y s.

c) Halla la ecuación del plano que pasa por A y es paralelo a π.

d) Calcula la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela a r.

e) Di la ecuación de la recta que pasa por A y por el punto de intersección de s con π.

f) ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por A, corta a s y es paralela a π?

Sugerencia: expresa el punto de corte P_s en función de un parámetro y escribe el vector director $\overrightarrow{AP_s}$. Ahora halla el parámetro usando la condición de paralelismo de recta y plano.

4. Consideremos

$$A\,(1\,,-1\,,a)\ ,\ r : \left\{ \begin{array}{l} x + by = 1 \\ 2x + z = 0 \end{array} \right.\ ,\ s : \frac{x+1}{2} = -y = \frac{z+1}{3}\ ,\ \pi : x + 2y + cz = 5$$

a) Halla a para que A esté en s.

b) Estudia la posición relativa de r y s.

c) Calcula los valores de b y c para los que r está contenida en π.

d) Analiza las posibles posiciones relativas de s y π.

Autoevaluación

1.

a) Es fácil observar que sus componentes no son proporcionales: $\frac{1}{0} \neq \frac{-1}{1}$.

Así que los vectores son dependientes y, por consiguiente, sus representaciones no son paralelos.

b) Para que sean linealmente dependientes el determinante de sus componentes debe ser cero:

$$\det[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & a & 0 \end{vmatrix} = 2a - 3 \;\rightarrow\; 2a - 3 = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{3}{2}$$

c) Según el apartado anterior, el determinante de sus componentes es distinto de cero. Se trata entonces de tres vectores independientes: forman una base $\mathfrak{B}$.

d) Para obtener las coordenadas de $\vec{x} = (1\,,1\,,1)$ en la base $\mathfrak{B}$ lo expresamos como combinación lineal de los vectores de la base: Para ello expresamos $\vec{x} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3$:

$$(1\,,1\,,1) = a\,(1\,,-1\,,3) + b\,(0\,,1\,,-2) + c\,(3\,,0\,,0) \;\rightarrow\; \begin{cases} 1 = \;\; a \qquad + 3c \\ 1 = -a + \;b \\ 1 = \;3a - 2b \end{cases} \;\rightarrow\; a = 3\,,\; b = 4\,,\; c = -\frac{2}{3}$$

Las coordenadas de $\vec{x}$ en $\mathfrak{B}$ son $\left(3\,,4\,,-\frac{2}{3}\right)$.

2.

a) Las coordenadas del origen serían las del extremo memos las componentes del vector:

$$C - \overrightarrow{AB} = (1\,,0\,,1) - (2\,,3\,,-1) = (-1\,,-3\,,2)$$

b) Si llamamos P y Q a esos puntos:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \;\rightarrow\; P = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (1\,,-1\,,2) + \frac{1}{3}\,(2\,,3\,,-1) = \rightarrow\; P = \left(\frac{5}{3}\,,0\,,\frac{5}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \;\rightarrow\; Q = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (1\,,-1\,,2) + \frac{2}{3}\,(2\,,3\,,-1) = \rightarrow\; Q = \left(\frac{7}{3}\,,1\,,\frac{4}{3}\right)$$

c) Llamemos A' y B' a los que están diagonalmente opuestos a los vértices A y B, respectivamente. Así:

$$\frac{A + A'}{2} = C \;\rightarrow\; A' = 2C - A \;\rightarrow\; A' = (1\,,1\,,0)$$

$$\frac{B + B'}{2} = C \;\rightarrow\; B' = 2C - B \;\rightarrow\; B' = (-1\,,-2\,,1)$$

d) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ son vectores coplanarios (dependientes), por ello:

$$\det[\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = 2a - 4 = 0 \;\rightarrow\; a = 2$$

3. Obtengamos las ecuaciones paramétricas de s:

$$s : \begin{cases} x - 3y = \ \ 0 \\ y + \ \ z = -1 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} s : \begin{cases} x = -3 - 3\lambda \\ y = -1 - \ \ \lambda \\ z = \qquad \ \ \lambda \end{cases}$$

a) En primer lugar se aprecia que $\vec{v}_r = (2\,,1\,,-1) \nparallel \vec{v}_s = (-3\,,-1\,,1)$ pues sus componentes no son proporcionales. Tomando ahora $P_r = (1\,,0\,,-1)$ y $P_s = (-3\,,-1\,,0)$ observamos que:

$$\det[\overrightarrow{P_rP_s}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s] = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Lo que quiere decir que son secantes. Para hallar el punto de corte, podemos sustituir las paramétricas de s en la continua de r. Una vez hallado el valor del parámetro, volvemos a sustituir y sale el punto de corte:

$$\frac{-3-3\lambda-1}{2} = -1 - \lambda = \frac{\lambda+1}{-1} \ \rightarrow \ \lambda = -2 \overset{s}{\longmapsto} r \cap s = (3\,,1\,,-2)$$

b) Como r y s son secantes, hay un plano que contiene a ambas: está determinado por un punto cualquiera de ellas, como es el $P_r = (1\,,0\,,-1)$ y por sus vectores directores $\vec{v}_r = (2\,,1\,,-1)$ y $\vec{v}_s = (-3\,,-1\,,1)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{operando} y + z + 1 = 0$$

c) Si el plano es paralelo a π su ecuación general será $2x - z + d = 0$. Y como debe pasar por el punto A:

$$2 \cdot 1 - 2 + d = 0 \ \rightarrow \ d = 0$$

Así que la ecuación del plano pedido es $2x - z = 0$.

d) La recta pedida pasa por $A\,(1\,,-1\,,2)$ y tiene como vector director a $\vec{v}_r = (2\,,1\,,-1)$. Su ecuación es:

$$\frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z-2}{-1}$$

e) Necesitamos calcular en primer lugar el punto de intersección de s con π. Sustituimos las paramétricas de s en la general de π:

$$2 \cdot (-3-3\lambda) - \lambda + 6 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = 0 \overset{s}{\mapsto} P_s = (-3\,,-1\,,0)$$

Luego la recta solicitada pasa por $A\,(1\,,-1\,,2)$ y tiene la dirección de $\overrightarrow{AP_s} = (-4\,,0\,,-2)$:

$$(x\,,y\,,z) = (1\,,-1\,,2) + \mu\,(-4\,,0\,,2)$$

f) La recta pasa por $A\,(1\,,-1\,,2)$ y cortará a s en un punto $P_s = (-3-3\lambda\,,-1-\lambda\,,\lambda)$. Un vector director es

$$\overrightarrow{AP_s} = (-4-3\lambda\,,-\lambda\,,\lambda-2)$$

Como es paralela al plano $\pi : 2x - z + 6 = 0$, por la condición de paralelismo ($av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$):

$$2 \cdot (-4-3\lambda) - (\lambda - 2) = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -\frac{6}{7} \ \rightarrow \ \overrightarrow{AP_s} = \left(-\frac{10}{7}\,,\frac{6}{7}\,,-\frac{20}{7}\right)$$

Así, la recta tiene la ecuación

$$\frac{x-1}{-10/7} = \frac{y+1}{6/7} = \frac{z-2}{-20/7} \ \rightarrow \ \frac{x-1}{-5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-10}$$

4.

a) Si A esté en s debe verificar su ecuación:

$$\frac{1+1}{2} = 1 = \frac{a+1}{3} \;\rightarrow\; a = 2$$

b) Obtengamos las paramétricas de r:

$$r : \begin{cases} x + by = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{y=\lambda} r : \begin{cases} x = \;\;1 - \;\; b\lambda \\ y = \qquad\;\; \lambda \\ z = -2 + 2b\lambda \end{cases}$$

Son $\vec{v}_r = (-b\,,1\,,2b)$ y $\vec{v}_s = (2\,,-1\,,3)$ independientes (componentes no proporcionales), luego las rectas o son secantes o se cruzan. Tomamos $P_r = (1\,,0\,,-2)$ y $P_s = (-1\,,0\,,-1)$ y calculamos

$$\det[\overrightarrow{P_rP_s}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s] = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -b & 1 & 2b \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Deducimos así que, para cualquier valor de b, las rectas se cruzan,

c) Si la r está contenida en π, entonces del punto $P_r = (1\,,0\,,-2)$ de la recta está en el plano:

$$P_r = (1\,,0\,,-2) \;\mapsto\; \pi : 1 + 2\cdot 0 + c\cdot(-2) = 5 \;\rightarrow\; c = -2$$

Y por la condición de paralelismo entre recta y plano:

$$1\cdot(-b) + 2\cdot 1 + (-2)\cdot 2b = 0 \;\rightarrow\; b = \frac{2}{5}$$

d) Aplicamos primeo la condición de paralelismo a s y π:

$$1\cdot(2) + 2\cdot(-1) + c\cdot 3 = 0 \;\rightarrow\; c = 0$$

Tenemos así:

Si es $c \neq 0$ entonces s y π son secantes (en un punto).

Si es $c = 0$ la recta o es paralela o está contenida en el plano. Para salir de dudas, sustituimos un punto cualquiera de la recta en la ecuación del plano:

$$P_s = (1\,,0\,,-1) \;\mapsto\; \pi : 1 + 2\cdot 0 \neq 5$$

Como el punto no está en el plano, la recta no está contenida en el plano. Definitivamente: la recta es paralela al plano.