# TEMA 6

## SISTEMAS DE ECUACIONES

### Contenidos

1. Definiciones y generalidades.
2. Método de Gauss.
3. Sistemas y matrices.
4. Regla de Cramer.
5. Teorema de Rouché – Frobenius.
6. Sistemas homogéneos.
7. Interpretación geométrica.

### Tiempo estimado

12 sesiones

### Criterios de Evaluación

1. Saber expresar un sistema en forma matricial y conocer el concepto de matriz ampliada del mismo.
2. Conocer lo que son sistemas compatibles, determinados o indeterminados, e incompatibles.
3. Saber expresar la solución de un sistema indeterminado en términos de una solución particular y de las soluciones del sistema homogéneo asociado.
4. Saber clasificar un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas como máximo y que dependa, a lo sumo, de un parámetro.

# 1.Definiciones y generalidades

## Definiciones.

Vamos a dar las definiciones y las notaciones usuales:

Un sistema de $m$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas es un conjunto de igualdades de la forma:

$$S:\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \cdots & = & \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Donde:

- $a_{ij}$ son números reales dados llamados coeficientes
- $b_j$ son números reales dados llamados términos independientes
- $x_i$ son las incógnitas, es decir, números reales desconocidos que deben verificar simultáneamente las $m$ igualdades del sistema.

☞ Ejemplo: el sistema $S$ es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Observa que no es un sistema lineal

$$S:\left\{\begin{array}{l} x+4y=1 \\ x^2-y=5 \end{array}\right.$$

☞ Ejemplo: $S$ es un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas.

$$S:\left\{\begin{array}{l} x+4y-3z=1 \\ 2x+3y+z=5 \end{array}\right.$$

Recordemos qué es una solución de un sistema y qué es resolverlo:

- Diremos que la sucesión de números reales $(s_1\,,s_2\,,\ldots\,,s_n)$ es una solución del sistema $S$ si al sustituir en el sistema la incógnita $x_i$ por $s_i$ obtenemos $m$ igualdades numéricas.
- Resolver un sistema es averiguar si un sistema tiene solución, encontrando todas sus soluciones, si las hubiera.

☞ Ejemplo: comprueba que la solución de $S$ es $(x\,,y)=(1\,,-3)$

$$S:\left\{\begin{array}{rcr} x+2y & = & -5 \\ 3x+y & = & 0 \\ x-y & = & 4 \end{array}\right.$$

☞ Ejemplo: razona que el sistema $S'$ no tiene solución

$$S':\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x+y+z=5 \end{array}\right.$$

## ❑ Clasificación de los sistemas lineales.

La siguiente clasificación de los sistemas lineales es la que comúnmente se usa, atendiendo al número de soluciones:

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es:

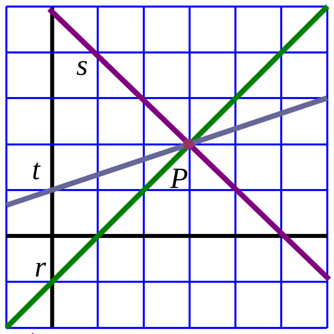
- Incompatible si no tiene ninguna solución.
- Compatible determinado si tiene solución única.
- Compatible indeterminado si tiene infinitas soluciones.

Observemos que un sistema lineal con solución, bien es compatible determinado bien es indeterminado.

☞ Ejemplo: El sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas

$$S : \left\{ \begin{array}{rcr} x - y & = & 1 \\ x + y & = & 5 \\ x - 3y & = & -3 \end{array} \right.$$

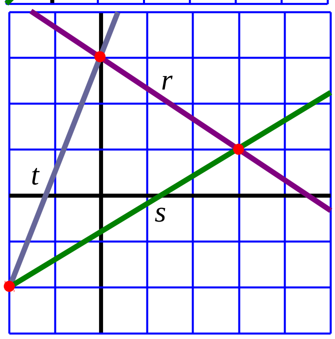
es compatible determinado. Podemos observar que la solución es $(x\,,y) = (3\,,2)$. Estamos ante tres rectas secantes en un punto.




☞ Ejemplo: El sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas

$$S : \left\{ \begin{array}{rcr} 2x + 3y & = & 9 \\ 3x - 5y & = & 4 \\ 5x - 2y & = & -6 \end{array} \right.$$

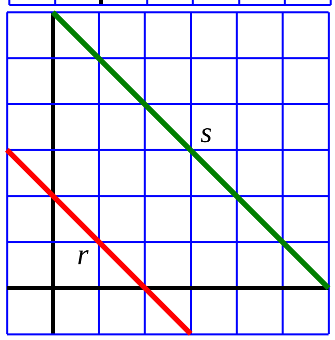
es incompatible. Estamos ante tres rectas secantes dos a dos, pero que no tienen ningún punto en común.




☞ Ejemplo: El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$S : \left\{ \begin{array}{rcr} x + y & = & 2 \\ x + y & = & 5 \end{array} \right.$$

es claramente incompatible: no pueden cumplirse a la vez ambas igualdades. Estamos ante dos rectas paralelas.




## ❑ Sistemas equivalentes.

Diremos que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

☞ Ejemplo: puede comprobarse que los sistemas siguientes

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rcr} x + y & = & 3 \\ x - y & = & -1 \end{array} \right. \quad , \quad S_2 : \left\{ \begin{array}{rcr} x + y & = & 3 \\ 2x & = & 2 \end{array} \right.$$

son equivalentes, ya que ambos tienen la misma única solución $(x\,,y) = (1\,,2)$.

Observemos que el sistema $S_2$ se ha obtenido reduciendo la incógnita $y$ en el sistema $S_1$.

# 2.Método de Gauss

## Transformaciones válidas

Si sometemos un sistema de ecuaciones a las siguientes transformaciones obtendremos un sistema equivalente:

- Permutar ecuaciones.
- Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un número no nulo.
- Añadir o suprimir una ecuación que es combinación lineal de otras.
- Sustituir una ecuación por otra que es el resultado de añadirle una combinación lineal de otras ecuaciones.

Cuando resolvemos una ecuación o un sistema lo transformamos en otro equivalente cuya resolución esperamos sea más fácil, o incluso algo trivial.
Aquí tenemos cuáles son esas transformaciones válidas a las que podremos someter un sistema de ecuaciones:

☞ Ejemplo: Los sistemas siguientes son equivalentes:

$$S:\begin{cases} x+2y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \left| \begin{matrix} e'_1=e_1 \\ e'_2=e_2-e_1 \end{matrix} \right\rangle \quad S':\begin{cases} x+2y=1 \\ -y=2 \end{cases}$$

## Sistemas escalonados.

Los sistemas siguientes se denominan escalonados. Resuélvelos:

$$S_1:\begin{cases} x+3y=1 \\ 2y=6 \end{cases} \quad \text{y} \quad S_2:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+2z=2 \\ 4z=-8 \end{cases}$$

Su resolución es muy simple: la última ecuación permite obtener una incógnita, al sustituir ésta en la anterior obtenemos el valor de otra, y así sucesivamente.

## Método de Gauss.

Es un procedimiento para convertir todo sistema en otro que sea escalonado, usando las transformaciones elementales anteriores.

☞ Ejemplo: observemos cómo se resuelve el sistema

$$S:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+4y-z=0 \end{cases} \left| \begin{matrix} e'_1=e_1 \\ e'_2=e_2-e_1 \\ e'_2=e_3-2e_1 \end{matrix} \right\rangle \quad S':\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+2z=2 \\ z=-2 \end{cases}$$

Estamos ante un sistema compatible determinado cuya única solución es: $(x, y, z)=(11, -6, 2)$

Ahora vamos hallando el valor de las incógnitas "escalonadamente":

$$\left| \begin{matrix} e_3 & \rightarrow & z=-2 \\ e_2 & \rightarrow & y=-2+2z=-6 \\ e_1 & \rightarrow & x=1-2y+z=11 \end{matrix} \right.$$

☞ Ejemplo: observemos ahora un sistema incompatible

$$S:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+4y-2z=0 \end{cases} \left| \begin{matrix} e'_1=e_1 \\ e'_2=e_2-e_1 \\ e'_2=e_3-2e_1 \end{matrix} \right\rangle \quad S':\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+2z=2 \\ 0=-2 \end{cases}$$

Como vemos, la tercera ecuación se ha convertido en una igualdad absurda, que no puede cumplirse para ningún valor de las incógnitas. Esto significa que el sistema no tiene solución.

☞ Ejemplo: observemos cómo se resuelve el sistema

$$S:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+4y-2z=2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} e'_1=e_1 \\ e'_2=e_2-e_1 \\ e'_2=e_3-2e_1 \end{array} \right\rangle \quad S':\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+2z=2 \\ 0=0 \end{cases}$$

Vemos que la tercera ecuación se ha convertido en una identidad, y nos hemos quedado con más incógnitas que ecuaciones. Pasemos la incógnita $z$ al segundo miembro y expresemos las otras incógnitas en función de ella:

$$\left| \begin{array}{l} e_3 \ \rightarrow \ z=t \\ e_2 \ \rightarrow \ y=-2+2z=-2+2t \\ e_1 \ \rightarrow \ x=1-2y+z=5-3t \end{array} \right.$$

Es compatible indeterminado. Todas sus soluciones vienen dadas por

$$\text{Solución: } \begin{cases} x=5-3t \\ y=-2+2t \\ z=t \end{cases}$$

Observemos que estamos ante un sistema compatible indeterminado. En ellos la solución queda expresada en función de uno o más parámetros.

donde es $t$ un número real cualquiera, denominado parámetro.

Si deseamos obtener soluciones numéricas concretas, damos a $t$ valores numéricos concretos:

$$\begin{array}{l} t=1 \ \rightarrow \ (x,\ y,\ z)=(2,\ 0,\ 1) \\ t=0 \ \rightarrow \ (x,\ y,\ z)=(5,\ -2,\ 0) \\ \qquad \ldots \end{array}$$

☞ Ejemplo: resolvamos el sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$S:\begin{cases} x+2y=-3 \\ 3x+y=1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} e'_1=e_1 \\ e'_2=e_2-3e_1 \end{array} \right\rangle \quad S':\begin{cases} x+2y=-3 \\ -5y=10 \end{cases}$$

Ahora vamos hallando el valor de las incógnitas "escalonadamente":

$$\left| \begin{array}{l} e_2 \ \rightarrow \ y=\dfrac{10}{-5}=-2 \\ e_1 \ \rightarrow \ x=-3-2y=-3+4=1 \end{array} \right.$$

Estamos ante un sistema compatible determinado cuya única solución es: $(x,\ y)=(1,-2)$

☞ ***Nota***: a la hora de aplicar el método de Gauss podemos olvidarnos de las incógnitas y tratar sólo con los coeficientes y términos independientes. En el primer ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} f_1 \\ f_2-f_1 \\ f_3-2f_1 \end{array} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

# 3.Sistemas y matrices

## Notación matricial.

Un sistema de ecuaciones lineales puede expresarse siempre como una igualdad matricial.

Por ejemplo, consideremos el siguiente caso:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & -2 \\ 2x & + & 5y & + & 4z & = & 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Las matrices que intervienen son:

$$C = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{coeficientes}} \quad X = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{incógnitas}} \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{términos}}$$

Observemos que el sistema ha quedado expresado así:

$$C \cdot X = B$$

Otra matriz muy importante, como veremos luego, es la denominada matriz ampliada del sistema:

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right) = (C|B)$$

## Resolución matricial

Si la matriz $C$ de los coeficientes es cuadrada e invertible, es posible resolver el sistema usando de la matriz inversa de la siguiente forma:

$$CX = B \rightarrow C^{-1}CX = C^{-1}B \rightarrow \mathrm{I} \cdot X = C^{-1}B \rightarrow X = C^{-1}B$$

En el caso que estamos viendo, la inversa de la matriz de coeficientes es:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estamos ante un sistema compatible determinado cuya única solución es: $(x, y, z) = (6, -6, 5)$

De donde:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

# 4.Regla de Cramer

Es un Teorema práctico que se refiere a sistemas de ecuaciones lineales con igual número de número de ecuaciones que de incógnitas y que permite obtener la solución a través de determinantes:

Consideremos el sistema de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas

$$S : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \cdots & = & \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Si la matriz de los coeficientes tiene determinante distinto de cero, entonces el sistema es compatible determinado.

Y, en ese caso, la solución viene dada por

$$x_k = \frac{\det(C_{x_k})}{\det(C)} \quad , \quad k = 1, \ldots, n$$

donde $C$ designa a la matriz de los coeficientes y $C_{x_k}$ designa a la matriz que se obtiene al sustituir en $C$ la columna $k$ por la matriz columna de los términos independientes.

Se llama sistema de Cramer a un sistema de n ecuaciones y n incógnitas con determinante de la matriz de coeficientes distinto de cero.

☞

☞ Ejemplo: resolvamos el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array} \right.$$

Observemos en primer lugar que es un sistema de $3$ ecuaciones con $3$ incógnitas con:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

Tenemos así que es un sistema compatible determinado con:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{3}{4} \; , \; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{7}{4} \; , \; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = -\frac{1}{4}$$

☞ Ejemplo: el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 4 \\ 2x & + & 4y & = & 5 \end{array} \right.$$

no es un sistema de Cramer, ya que $\det(C) = 0$. Observemos que es incompatible.

# 5.Teorema de Rouché–Frobenius

El Teorema de Rouché–Frobenius permite clasificar y caracterizar los sistemas de ecuaciones lineales a través del rango, ofreciéndonos una completa respuesta sobre su compatibilidad y sobre la obtención de su solución:

> Sea $S$ un sistema de $m$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas. Designemos por $C$ a la matriz de coeficientes del sistema y por $A$ a la matriz ampliada con los términos independientes.
>
> a) Si $\mathrm{rg}(C) \neq \mathrm{rg}(A)$ entonces el sistema es incompatible.
>
> b) Si $\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A)$ entonces el sistema es compatible.
>
> Supongamos que $\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = h$.
>
> 1) Si $h = n$ entonces $S$ es compatible determinado.
>
> 2) Si $h < n$ entonces $S$ es compatible indeterminado, de modo que la solución depende de $n - h$ parámetros.

Tenemos así:
rg(C) = rg(A): sistema compatible.
rg(C) < rg(A) : sistema incompatible.

☞ <u>Procedimiento</u>: Supongamos que es $\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = h$ y que $\Delta \neq 0$ es un menor en $C$ de orden $h$. Entonces:

El procedimiento se deduce de la demostración.

El sistema es equivalente al sistema que está formado sólo por las ecuaciones que se corresponden con las filas que conforman a $\Delta$.

Las incógnitas principales son aquellas que se corresponden con las columnas que conforman $\Delta$. Las $n - h$ restantes, si las hubiera, son incógnitas libres (parámetros).

☞ <u>Ejemplo</u>: Discutamos y resolvamos, usando el Teorema de Rouché

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 3 \\ 3x & + & y & - & 3z & = & 5 \end{array} \right.$$

Observemos los determinantes:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Delta_3^1 = \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \cline{1-2} 3 & 1 & -3 \end{array} \right| = |C| = 0 \ , \ \Delta_3^2 = \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ \cline{1-2} 3 & 1 & 5 \end{array} \right| = 0$$

Deducimos de aquí que es

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3$$

Tenemos que el sistema es compatible indeterminado, dependiendo la solución de 3 – 2 = 1 parámetro.

Para resolverlo, observemos que:

1. Las incógnitas principales son $x$ e $y$ – las correspondientes a $\Delta_2$ –, y la incógnita $z$ es libre (parámetro).

Este sistema puede interpretarse geométricamente así: estamos ante tres planos distintos que se interceptan en una recta.

2. Es $S$ es equivalente al sistema formado por las dos primeras ecuaciones – las correspondientes a $\Delta_2$ –:

$$S : \begin{cases} x + y = 1 + z \\ x - y = 3 + z \end{cases}$$

Resolviendo este sistema y poniendo $z = t$, tenemos que la solución es:

$$\begin{cases} x = & 2 + t \\ y = & -1 \\ z = & t \end{cases}$$

☞ Ejemplo: Discutamos, según los valores del parámetro $a$ el sistema

$$S : \begin{cases} 2x & + & 3y & - & 4z & = & 1 \\ 4x & + & 6y & - & az & = & 4 \\ x & + & y & + & z & = & 10 \end{cases}$$

Observemos que la matriz ampliada del sistema es:

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 4 & 6 & -a & 4 \\ 1 & 1 & a & 10 \end{array} \right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes, que es una matriz cuadrada:

$$\det(C) = a - 8$$

Tenemos los siguientes casos:

Caso 1: $a \neq 8$.

El estudio de los rangos es sencillo, pues $\det(C) \neq 0$ es un menor de orden 3 tanto de $C$ como de $A$ y no hay menores de orden superior:

$$\operatorname{rg}(C) = \operatorname{rg}(A) = 3$$

Concluimos que el sistema es compatible determinado.

Caso 2: $a = 8$.

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 4 & 6 & -8 & 4 \\ 1 & 1 & 8 & 10 \end{array} \right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Delta_3^1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = |C| = 0 \ , \ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 2$$

Deducimos de aquí que el sistema es incompatible al ser

$$\operatorname{rg}(C) = 2 < \operatorname{rg}(A) = 3$$

# 6.Sistemas homogéneos.

2a) Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es homogéneo cuando todos sus términos independientes son cero.

2b) Todo sistema homogéneo tiene solución: igualando todas las incógnitas a cero. Por ello a esta solución se la denomina solución trivial.

2c) En un sistema homogéneo sólo puede darse una de estos dos casos:

$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas: solución única (la trivial).

$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) < \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas: infinitas soluciones.

# 7.Anexo: interpretación geométrica

Lo básico a la hora de interpretar un sistema de ecuaciones lineales de tres incógnitas es:

- Una ecuación lineal de tres incógnitas representa un plano en el espacio. Cada punto del plano es una solución de la ecuación.
- Dos planos bien son secantes en una recta bien son paralelos.
- Resolverlo es buscar el punto o los puntos que tienen en común todos los planos. Cada uno de esos puntos es una solución del sistema.

Observemos bien este detalle: dos planos en el espacio nunca serán secantes en un único punto.
En el caso de que sean secantes, lo serán a lo largo de una recta, a veces denominada arista.

☞ Ejemplo: el sistema es incompatible.

$$[A] : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \end{array} \right.$$

Estamos ante dos planos paralelos: no hay ningún punto en común.

☞ Ejemplo: el sistema es compatible indeterminado.

$$[B] : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \end{array} \right. \xrightarrow{sol} (x\,,y\,,z) = (2-t\,,-1\,,t)$$

Estamos ante dos planos secantes en una recta.

☞ Ejemplo: los siguientes sistemas son incompatibles.

$$[C] : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \end{array} \right. ,\ [D] : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

En [C] tenemos dos planos paralelos y un tercero secantes con cada uno de ellos a lo largo de una recta.
En [D] tres planos que no tienen ningún punto en común, aunque dos a dos son secantes en una recta.

☞ Ejemplo: el sistema es compatible determinado:

$$[E] : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array} \right. \xrightarrow{sol} (x\,,y\,,z) = (2\,,-1\,,0)$$

Estamos ante tres planos secantes en un punto.

☞ Ejemplo: el sistema es compatible indeterminado: observemos que la solución depende de un parámetro.

$$[F] : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 5 \end{array} \right. \xrightarrow{sol} (x\,,y\,,z) = (2-t\,,-1\,,t)$$

Estamos ante tres planos secantes en una recta.

# 8.Apéndice: demostraciones

## Demostración Teorema de Cramer

Como $C$ es invertible, tenemos:

$$CX = B \to C^{-1}CX = C^{-1}B \to \mathrm{I}\cdot X = C^{-1}B \to X = C^{-1}B$$

Luego el sistema $S$ tiene solución única:

$$(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_n) = (s_1\,, s_2\,, \ldots\,, s_n)$$

Si llamamos $C_1\ \ldots\ C_n$ a las columnas de $C$, entonces:

$$s_1C_1 + s_2C_2 + \cdots + s_nC_n = B$$

Calcularemos $s_1$:

$$\begin{aligned}
\det(C_{x_1}) &= \det\left[B\,, C_2\,, \ldots\,, C_n\right] \\
&= \det\left[\sum_{k=1}^{n} s_kC_k\,, C_2\,, \ldots\,, C_n\right] \\
&= \det\left[s_1C_1\,, C_2\,, \ldots\,, C_n\right] + \det\left[\sum_{k=2}^{n} s_kC_k\,, C_2\,, \ldots\,, C_n\right] \\
&= s_1 \det\left[C_1\,, C_2\,, \ldots\,, C_n\right] + 0 \\
&= s_1 \det(C)
\end{aligned}$$

Despejando

$$x_1 = \frac{\det(C_{x_1})}{\det(C)}$$

De forma análoga se obtienen las restantes incógnitas. #

## Demostración Teorema de Rouché

Supongamos en primer lugar que el sistema tiene solución, siendo una de ellas $(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_n) = (s_1\,, s_2\,, \ldots\,, s_n)$. Se tiene así que

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot s_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot s_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Tenemos por ello que la última columna de $A$ es combinación lineal de las anteriores y por ello puede eliminarse sin que varíe el rango:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}(C)$$

Supongamos ahora que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C) = h$.

Hay un menor en $C$ de orden $h$ que es distinto de cero. Podemos suponer que es el formado por las $h$ primeras filas y columnas es distinto de cero (si no fuese así, bastaría cambiar el orden de las ecuaciones y de las incógnitas):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} \neq 0$$

Al ser $\mathrm{rg}(A) = h$ y $\Delta \neq 0$ un menor principal de ella de orden $h$, tenemos que todas las $h$ primeras filas de $A$ son linealmente independientes y las demás –si las hay– son combinación lineal de ellas. Teniendo en cuenta que cada fila de $A$ se corresponde con una ecuación de $S$, tenemos que el sistema es equivalente al formado por las $h$ primeras ecuaciones:

$$S' : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \cdots & = & \cdots \\ a_{h1}x_1 + \cdots + a_{hn}x_n & = & b_h \end{cases}$$

Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C) = h = n$, el sistema $S'$ es un sistema de Cramer. Tenemos así que $S'$ tiene solución única, y por tanto también $S$.

Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C) = h < n$, pasando $x_{h+1}, \ldots, x_n$ al 2º miembro:

$$S' : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1h}x_h & = & b_1 - a_{1h+1}x_{h+1} - \ldots - a_1nx_n \\ \cdots & = & \cdots \\ a_{h1}x_1 + \cdots + a_{hn}x_n & = & b_h - -a_{hh+1}x_{h+1} - \ldots - a_hnx_n \end{cases}$$

A las n – h incógnitas que pasamos al segundo miembro y que pueden tomar cualquier valor se les llama incógnitas libres o parámetros.
A las h incógnitas expresadas en función de ellas se les llama incógnitas principales.

De nuevo tenemos que $S'$ es un sistema de Cramer: hay solución única para las $h$ primeras incógnitas, pero en función de las $n - h$ restantes incógnitas, que pueden tomar cualquier valor.

# Ejercicios

**1.** [S/08] Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \lambda y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & \lambda z & = & 0 \\ x & + & 5y & - & \lambda z & = & \lambda+1 \end{array}\right\}$$

a) Clasifícalo según los valores del parámetro λ.

b) Resuélvelo para $\lambda = -1$.

**2.** [S/08] Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a-1 \\ 2x & + & y & + & az & = & a \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

a) Discútelo según los valores del parámetro $a$.

b) Resuelve el caso $a = 2$.

**3.** [S/08] Sabemos que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Tiene las mismas soluciones que el que resulta al añadirle la ecuación

$$ax + y + 7z = 7.$$

a) Determina el valor de $a$.

b) Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

**4.** [S/08] Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores del parámetro $m$ para los que el rango de $A$ es menor que 3.

b) Estudia si el sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tiene solución para cada uno de los valores de $m$ obtenidos en el apartado anterior.

**5.** [S/08] Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 1 \\ & & ky & + & z & = & 0 \\ x & + & (k+1)y & + & kz & = & k+1 \end{array}\right\}$$

a) Determina el valor del parámetro $k$ para que sea incompatible.

b) Halla el valor del parámetro $k$ para que la solución del sistema tenga $z = 2$ .

**6.** [S/08] Halla los valores del parámetro $m$ que hacen compatible el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & m \\ x & + & 3y & - & z & = & m^2 \end{array}\right\}$$

**7.** [S/08]

a) Determina razonadamente los valores del parámetro $m$ para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene más de una solución:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & mx \\ x & + & 2y & + & z & = & my \\ x & + & 2y & + & 4z & = & mz \end{array}\right\}$$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso $m = 0$ y para el caso $m = 1$.

**8.** [S/08] Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.

a) ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?

b) Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuantos billetes hay de cada tipo.

**9.** [S/09] Tratamos de adivinar, mediante ciertas pistas, los precios de tres productos A , B y C

- Pista 1: Si compramos una unidad de A, dos de B y una de C gastamos 118 euros
- Pista 2: Si compramos $n$ unidades de A, $n+3$ de B y tres de C gastamos 390 euros

a) ¿Hay algún valor de $n$ para el que estas dos pistas sean incompatibles?

b) Sabiendo que $n = 4$ y que el producto C cuesta el triple que el producto A, calcula el precio de cada producto

**10.**[S/09]

a) Discute según los valores λ el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & \lambda y & & & = & 0 \\ x & & & + & \lambda z & = & \lambda \\ x & + & y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right\}$$

b) Resuélvelo para $\lambda = 0$.

**11.**[S/09] Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30 % de las cajas.

**12.**[S/09] Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \lambda y & + & z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ \lambda x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}\right\}$$

a) Discútelo según los valores de parámetro λ.

b) Resuélvelo en el caso λ=1.

**13.**[S/09]

a) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 5z & = & 2 \end{array}\right\}$$

b) Calcula λ sabiendo que el siguiente sistema tiene alguna solución común con el del apartado (a):

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & \lambda z & = & -3 \end{array}\right\}$$

**14.**[S/09] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Calcula, si existe, $A^{-1}$.

b) Resuelve el sistema $AX = 3X$ e interpreta geométricamente el conjunto de sus soluciones.

**15.**[S/09] Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & m+1 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & - & z & = & m \end{array}\right\}$$

c) a) [1,5] Determina los valores de $m$ para los que el sistema es compatible.

d) b) [1 punto] Resuelve el sistema en el caso $m = -1$.

**16.**[S/10] Considera el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x - 2y + z & = & 5 \\ 2x - 3y + z & = & -4 \end{array}\right.$$

a) [1,5] Calcula razonadamente un valor de $\lambda$ para que el sistema resultante al añadirle la ecuación $x + y + \lambda z = 9$ sea compatible indeterminado.

b) [1] ¿Existe algún valor de $\lambda$ para el cual el sistema resultante no tiene solución?

**17.**[S/10] Sean las matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores de $\alpha$ para los que $A$ tiene inversa.

b) Calcula la inversa de $A$ para $\alpha = 1$.

c) Resuelve, para $\alpha = 1$, el sistema de ecuaciones $AX = B$.

**18.**[S/10] Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x + y + z & = & \lambda + 2 \\ 2x - \lambda y + z & = & 2 \\ x - y + \lambda z & = & \lambda \end{array}\right.$$

a) Discútelo según los valores de $\lambda$. ¿Tiene siempre solución?

b) Resuelve el sistema para $\lambda = -1$.

**19.**[S/10] Considera el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\left.\begin{array}{rcr} (m+2)x - \phantom{m}y - z & = & 1 \\ -x - \phantom{m}y + z & = & -1 \\ x + my - z & = & m \end{array}\right\}$$

a) Discútelo según los valores de $m$.

b) Resuélvelo para el caso $m = 1$.

**20.**[S/10] Consideremos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ \lambda x & + & 2y & + & (\lambda+2)z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 6-\lambda \end{array}\right\}$$

a) Discute, según los valores del parámetro $\lambda$

b) Resuelve el sistema anterior para $\lambda = 0$ .

**21.**[S/10] Consideremos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & + & 2y & + & 6z & = & 0 \\ 2x & + & \lambda y & + & 4z & = & 2 \\ 2x & + & \lambda y & + & 6z & = & \lambda-2 \end{array}\right\}$$

a) Discute, según los valores del parámetro $\lambda$

b) Resuelve el sistema anterior para $\lambda = 2$ .

**22.**[S/11] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Calcula el rango de $A$ según los valores de $t$ .

b) Razona para qué valores de $t$ el sistema homogéneo $AX = \mathbf{0}$ tiene más de una solución.

**23.**[S/11] Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & 4z & = & 4 \\ 2x & & & + & z & = & a \\ -3x & - & 3y & - & 3z & = & -3 \end{array}\right\}$$

a) Discútelo según los valores del parámetro $a$ .

b) Resuélvelo cuando sea posible.

**24.**[S/11] Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -\lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 2 \\ \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores de $\lambda$ .

b) Resuelve el sistema anterior para $\lambda = 0$ .

**25.**[S/12] Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} kx & + & 2y & & & = & 3 \\ -x & & & + & 2kz & = & -1 \\ 3x & - & y & - & 7z & = & k+1 \end{array}\right\}$$

a) Estudia el sistema según los valores de $k$.

b) Resuélvelo para $k = 1$.

**26.**[S/12] Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & (k+1)y & + & 2z & = & -1 \\ kx & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & - & z & = & k+1 \end{array}\right\}$$

a) Clasifícalo según los distintos valores de $k$.

b) Resuélvelo para el caso $k = 2$.

**27.**[S/12] Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} kx & + & 2y & = & 2 \\ 2x & + & ky & = & k \\ x & - & y & = & -1 \end{array}\right\}$$

a) Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro $k$.

b) Especifica para qué valores del parámetro $k$ es determinado y para cuáles indeterminado.

c) Halla las soluciones en cada caso.

**28.**[S/12] Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & \lambda \\ & & 2\lambda y & + & \lambda z & = & \lambda \\ -x & - & y & - & \lambda z & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) Clasifícalo según los distintos valores de $\lambda$ .

b) Resuélvelo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

**29.**[S/12] Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & \lambda+1 \\ & & 3y & + & 2z & = & 2\lambda+3 \\ 3x & + & (\lambda-1)y & + & z & = & \lambda \end{array}\right\}$$

a) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

b) ¿Para qué valor de $\lambda$ tiene una única solución?

c) ¿Existe algún valor de $\lambda$ para el que el sistema admite la solución $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

**30.**[S/12] Consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & kz & = & 1 \\ 2x & + & ky & & & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & k \end{array}\right\}$$

a) [1] Clasifica el sistema según los valores de $k$.

b) [0,75] Resuélvelo para $k = 1$.

c) [0,75] Resuélvelo para $k = -1$.

**31.**[S/12] Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ky & + & 2z & = & k+1 \\ x & + & 2y & + & kz & = & 3 \\ (k+1)x & + & y & + & z & = & k+2 \end{array}\right\}$$

a) Determina los valores de $k$ para los que el sistema tiene más de una solución.

b) ¿Existe algún valor de $k$ para el cual el sistema no tiene solución?

c) Resuelve el sistema para $k = 0$.

**32.**[S/12] Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

b) Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50%, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

**33.**[S/13] Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 3 \end{array}\right\}$$

a) Determina el valor de $m$ para el que al añadir la ecuación

$$x + my + 4z = -3$$

al sistema anterior se obtenga un sistema con las mismas soluciones.

b) Calcula la solución del sistema para la que la suma de los valores de las incógnitas sea 6.

**34.**[S/13] Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 4y & + & 6z & = & 6 \\ & & my & + & 2z & = & m+1 \\ -3x & + & 6y & - & 3mz & = & -9 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro $m$.

b) Resuélvelo para $m = 3$ y calcula, si es posible, una solución en la que $y = 0$.

**35.**[S/13] Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & mz & = & m-2 \\ mx & + & y & + & 3z & = & m-2 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro $m$.

b) Resuélvelo, si es posible, para $m = 2$.

**36.** [S/14] Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 5 \end{array}\right\}$$

a) Calcula $\alpha$ de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

b) Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

**37.**Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & (m+1)y & + & 2z & = & -1 \\ mx & + & y & + & z & = & m \\ (1-m)x & + & 2y & + & z & = & -m-1 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro $m$.

b) Resuélvelo para para $m = 2$. Para dicho valor de $m$ calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

**38.**Dadas las matrices

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & mz & = & 0 \\ mx & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2mz & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) Halla los valores del parámetro $m$ para los que el sistema tiene una única solución.

b) Halla los valores del parámetro $m$ para los que el sistema tiene alguna solución distinta de la solución nula.

c) Resuelve el sistema para $m = -2$.

**39.** Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcl} & & \lambda y & + & (\lambda+1)z & = & \lambda \\ \lambda x & & & + & z & = & \lambda \\ x & & & + & \lambda z & = & \lambda \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro λ.

b) Resuelve el sistema para λ = 1.

c) Para λ = 0, si es posible, da tres soluciones distintas.

## Cuestiones

**1.** Si a un sistema incompatible de dos ecuaciones con dos incógnitas le añadimos una tercera ecuación, ¿podríamos lograr que fuese compatible indeterminado? Razona la respuesta.

**2.** Escribe un sistema S de dos ecuaciones con tres incógnitas de modo que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ solución. Resuelve luego el sistema.

**3.** Escribe, cuando sea posible, sistemas de ecuaciones que respondan a las características siguientes:

a) Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga infinitas soluciones.

b) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible y determinado.

c) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que no tenga ninguna solución.

d) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única.

Razona, en cada caso, tu respuesta.

**4.** Sean $S$ y $S´$ dos sistemas distintos de ecuaciones lineales con los mismos coeficientes.

a) Justifica con un ejemplo que $S$ puede ser compatible y $S\,'$ incompatible.

b) Si los dos sistemas son compatibles, ¿puede tener $S$ solución única y $S\,'$ infinitas soluciones? Justifica la respuesta.

**5.** Un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿puede ser compatible y determinado? En caso afirmativo, da un ejemplo.

**6.** Escribe tres sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas cuya interpretación geométrica, en cada caso, se corresponda con las siguientes representaciones:

a) Tres rectas paralelas.

b) Tres rectas secantes.

c) Dos paralelas y una secante con cada una de ellas.

**7.** En un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas el determinante de los coeficientes es cero.

¿Puede ser un sistema compatible?

¿Puede tener solución única?

¿Se puede aplicar la Regla de Cramer?

**8.** El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas es tres.

¿Qué rango puede tener la matriz ampliada?

¿Cuántas soluciones tiene el sistema?

**9.** Si el rango de la matriz de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas es dos, discute cómo puede ser el sistema.

**10.** En un sistema homogéneo de 3 ecuaciones con 2 incógnitas, la matriz de coeficientes tiene rango 2. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?

**11.** El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es 1. ¿Qué rango como máximo puede tener la matriz ampliada? ¿Cómo puede ser el sistema en cuanto al número de soluciones?

**12.** Añade una ecuación al el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right\}$$

de modo que el nuevo sistema sea:

a) Incompatible.

b) Compatible determinado.

c) Compatible indeterminado.

**13.** Escribe un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas compatible indeterminado en el que una de las incógnitas sólo tenga una solución.

**14.**¿Qué puedes decir de un sistema lineal no homogéneo, de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, que al resolverlo mediante el método de Gauss, conduce a la siguiente matriz ampliada?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

## Autoevaluación

**1.** Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 4y & + & 6z & = & 6 \\ & & my & + & 2z & = & m+1 \\ -3x & + & 6y & - & 3mz & = & -9 \end{array}\right\}$$

a) Para el valor del parámetro $m=1$, halla la inversa de la matriz de coeficientes y resuélvelo matricialmente.

b) Discute el sistema según los valores del parámetro $m$.

c) Resuélvelo para $m=3$ y obtén la solución en la que es $y=0$.

**2.** Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} kx & + & 3y & = & 7 \\ x & - & y & = & -k \\ 2x & + & y & = & 4 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro $k$, dando la correspondiente interpretación geométrica.

b) Resuélvelo para $k=1$ usando la Regla de Cramer.

**3.** Considera las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

¿Existe algún valor real de $\lambda$ para el cual el sistema $AX = \lambda X$ tiene solución distinta de la trivial? Si la respuesta es afirmativa, calcula el valor de $\lambda$ y resuelve el sistema; si es negativa, di por qué.

**4.** Considera el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 3 \end{array}\right\}$$

a) Determina el valor de $m$ para el que al añadir la ecuación $x + my + 4z = -3$ al sistema anterior se obtenga un sistema con las mismas soluciones.

b) Calcula la solución del sistema para la que la suma de los valores de las incógnitas sea 6.

**5.** Una fábrica de electrodomésticos tiene una producción semanal fija de 42 unidades. La fábrica abastece a tres establecimientos –digamos A, B y C–, que demandan toda su producción.

En una determinada semana el establecimiento A solicitó tantas unidades como B y C juntos y, por otro lado, B solicitó un $20\%$ más que la suma de la mitad de lo que pidió A más la tercera parte de lo que pidió C.

Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para averiguar cuántas unidades solicitó cada establecimiento dicha semana.

# Autoevaluación

**1.** Llamemos $S$ al sistema

a) Para $m = 1$ tiene $C$ inversa, así:

$$CX = B \to X = C^{-1}B$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -15 & 24 & -14 \\ -4 & 12 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -6m^2 + 18m \xrightarrow{|C|=0} -6m^2 + 18m = 0 \to m = 0\,, m = 3$$

<u>Caso 1</u>: $m \neq 0$ y $m \neq 3$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 3$$

$S$ es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $m = 0$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -9 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\,,\ \Delta_3^2 = \left|\begin{array}{rr|r} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 6 & 0 & -9 \end{array}\right| = 36 \neq 0$$

Deducimos de aquí que $S$ es incompatible al ser:

$$\text{rg}(C) = 2 \neq \text{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $m = 3$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 6 & -9 & -9 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\,,\ \Delta_3^2 = \left|\begin{array}{rr|r} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \\ \hline -3 & 6 & -9 \end{array}\right| = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

$S$ es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

c) Del estudio anterior se deduce además que $S$ equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal), con $x$ e $y$ como incógnitas principales (columnas del menor principal) y $z$ como incógnita libre o parámetro :

$$S \equiv \left\{ \begin{aligned} 2x - 4y &= 6 - 6z \\ 3y &= 4 - 2z \end{aligned} \right.$$

Poniendo $z = \lambda$ y resolviendo:

$$(x\,,y\,,z) = \left( \frac{17 - 13\lambda}{3}\,, \frac{4 - 2\lambda}{3}\,, \lambda \right)$$

**2.** Haremos ambas cosas:

Calculamos el determinante de la matriz ampliada y vemos cuándo es cero:

$$\det(A) = k^2 - 10k + 9 \xrightarrow{|A|=0} k^2 - 10k + 9 = 0 \rightarrow k = 1\,, k = 9$$

<u>Caso 1</u>: $k \neq 1$ y $k \neq 9$.

Como $\det(A) \neq 0$ y la matriz de coeficientes tiene dos columnas:

$$\text{rg}(C) \neq \text{rg}(A) = 3$$

$S$ es incompatible.

<u>Caso 2</u>: $k = 1$.

$$A = \left( \begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3 = |A| = 0$$

Deducimos de aquí que $S$ es compatible determinado al ser:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2$$

Y que el sistema es equivalente al formado por las ecuaciones segunda y tercera (las filas del menor):

$$\left. \begin{aligned} x - y &= -1 \\ 2x + y &= \phantom{-}4 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{Cramer} x = \frac{3}{3} = 1\,,\; y = \frac{6}{3} = 2$$

<u>Caso 3</u>: $k = 9$.

$$A = \left( \begin{array}{rr|r} 9 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -9 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3 = |A| = 0$$

Deducimos de aquí que $S$ es compatible determinado al ser:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2$$

**3.**

El sistema es

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 2z & = & \lambda x \\ -x & & & - & 2z & = & \lambda y \\ & - & y & + & z & = & \lambda z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & - & \lambda y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Como vemos, se trata de un sistema homogéneo; así siempre es compatible.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2 \xrightarrow{Ruffini} (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 1) = 0 \to \lambda = 2$$

<u>Caso 1</u>: $\lambda \neq 2$.

Como $\det(C) \neq 0$ y es homogéneo:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 3$$

$S$ es compatible determinado y, por consiguiente, su solución es la trivial.

<u>Caso 2</u>: $\lambda = 2$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Observemos el menor:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Deducimos de aquí que $S$ es compatible indeterminado al ser:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

$S$ es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

Además que $S$ equivale al sistema formado con las dos últimas ecuaciones (filas del menor principal), pudiendo tomar como incógnitas principales $x$ e $y$ (columnas del menor principal) y como incógnita libre o parámetro a $z$:

$$S \equiv \left\{\begin{array}{r} -x - 2y = 2z \\ -y = z \end{array}\right.$$

Poniendo $z = t$ y resolviendo:

$$(x, y, z) = (0, -t, t)$$

**4.**

a) El sistema que obtenemos añadiendo esa ecuación es:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 3 \\ x & + & my & + & 4z & = & -3 \end{array}\right\}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = 18 + 3m \xrightarrow{|C|=0} 18 + 3m = 0 \to m = -3$$

Caso 1: $m \neq -3$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 3$$

$S$ es compatible determinado.

Caso 2: $m = -3$.

$$A = \left( \begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 & -3 \end{array} \right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0 \ , \ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

$S$ es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro y, además, equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal).

Concluimos, pues, que el sistema de partida equivale al obtenido al añadir la ecuación $x + my + 4z = -3$ sólo para $m = -3$.

b) Queremos que se cumplan las dos ecuaciones de partida y que la que la suma de los valores de las incógnitas sea 6. Esto es:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \end{array} \right| \xrightarrow[\substack{e_2' = -2e_1 + e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_3}]{} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & 5y & - & 3z & = & 3 \\ & & 2y & & & = & 6 \end{array} \right.$$

Ha quedado escalonado a la primera y obtenemos ahora la solución comenzando por la tercera ecuación:

$$(x\,, y\,, z) = (-1\,, 3\,, 4)$$

**5.**

Sean

$x$ el número de unidades que pide A, $y$ el número de unidades que pide B, $z$ el número de unidades que pide C

Como en total son 42 unidades:

$$x + y + z = 42$$

Las unidades que pide A son tantas unidades como B y C juntos:

$$x = y + z$$

Las unidades de B son un 20% más que la suma de la mitad del pedido A más la tercera parte de lo que pidió C:

$$y = 1.20 \left( \frac{x}{2} + \frac{z}{3} \right)$$

Simplificando adecuadamente obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 42 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ 0.6x & - & y & + & 0.4z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Si resolviéramos obtendríamos:

$$(x\,,y\,,z) = (21\,,15\,,6)$$