TEMA 5

MATRICES Y DETERMINANTES

Contenidos

1. Generalidades.
2. Suma de matrices y producto por un número.
3. Producto de matrices.
4. Matriz inversa.
5. Determinante de una matriz.
6. Propiedades de los determinantes.
7. Determinantes y matriz inversa.
8. Rango de una matriz
9. Método de Gauss
10. Ampliación: determinantes de cualquier orden

Tiempo estimado

13 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Conoce el vocabulario básico para el estudio de matrices: elemento, fila, columna, diagonal, etc.
2. Calcula sumas de matrices, productos de números por matrices.
3. Sabe cuándo es posible efectuar un producto de matrices y conocer la no conmutatividad.
4. Sabe qué es la matriz inversa y cómo calcularla
5. Saber calcular determinantes de orden 2 y 3.
6. Conoce las propiedades de los determinantes y sabe aplicarlas al cálculo de éstos.
7. Caber caracterizar la dependencia lineal a través de los determinantes.
8. Conoce el concepto de rango y sabe calcularlo mediante menores.

1.Generalidades

❑ Definición.

Consideremos la siguiente tabla de doble entrada, correspondiente a las existencias en los distintos almacenes de una cadena de electrodomésticos:

	Lavadoras	Frigoríficos	Hornos	Placas	Extractores
Almacén A	150	100	24	34	67
Almacén B	23	45	67	84	22
Almacén C	11	13	34	61	90
Almacén D	234	34	55	68	107

Observa que los datos se recogen en una tabla. En ella cada fila contiene las existencias de uno de los almacenes, y cada columna el número de unidades de cada uno de los productos.

Si asignamos a cada almacén un número (Almacén A = 1, Almacén B = 2, …), y acordamos un orden en los electrodomésticos (Lavadoras = 1, Frigoríficos = 2, …), toda la información de la tabla puede mostrarse de la siguiente forma, exclusivamente numérica:

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 100 & 24 & 34 & 67 \\ 23 & 45 & 67 & 84 & 22 \\ 11 & 13 & 34 & 61 & 90 \\ 234 & 34 & 55 & 68 & 107 \end{pmatrix}$$

Una caja o tabla numérica como la anterior es denominada matriz.

Se las designa a través de una letra mayúscula; en nuestro caso es la matriz A.

Las matrices son el medio ideal para organizar y estructurar la información, especialmente la que puede reducirse a números. Y más teniendo en cuenta que los datos se introducen y manipulan en los ordenadores a través de tablas, ya sea en Hojas de Cálculo ya sea en Bases de Datos.

En la matriz anterior, el elemento que ocupa la fila 2ª y la columna 3ª es $a_{23} = 67$. Esto significa que en el almacén B hay 67 hornos. ¿Cuál sería el elemento a_{45}? ¿Qué representa ese dato?

Como la tabla tiene 4 filas y 5 columnas, se dice que es una matriz de dimensiones 4×5.

☞ Ejemplo: Escribamos la matriz A de dimensiones 3×4 cuyos elementos se forman según la fórmula $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Este tipo de tablas es el que vamos a estudiar en esta unidad. Comencemos con la definición y las notaciones:

- Una matriz es una tabla numérica de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Se dice que es una matriz de dimensiones $m \times n$, ya que tiene m filas y n columnas.
- Al elemento que ocupa la fila i y la columna j se le designa por

$$a_{ij}$$

- A la matriz se la designa mediante el símbolo

$$A = (a_{ij})_{m\,,n}$$

- Se designa por $\mathfrak{M}_{m\times n}$ al conjunto de las matrices de dimensiones $m \times n$.

Igualdad

Debemos tener muy claro cuándo diremos que dos matrices son iguales:

Dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y coinciden los términos que ocupan el mismo lugar en ambas:

$$A\,,B \in \mathfrak{M}_{m\times n} \;:\; A = B \overset{def}{\Longleftrightarrow} a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i\,,j$$

Matriz Traspuesta

La traspuesta de la matriz $A = (a_{ij})_{m\,,n}$ es la matriz $A^t = (a_{ji})_{n\,,m}$, que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas.

Observemos que si una matriz tiene dimensiones m x n, las dimensiones de su traspuesta son n x m .

☞ Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Algunos tipos de matrices.

Vamos a ver algunas matrices que por sus dimensiones o peculiares características reciben un nombre especial:

☞ **Matriz fila**:

Es aquella que tiene sólo una fila. Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

A una matriz fila también se la denomina "vector fila".

☞ **Matriz columna:**

Es aquella que tiene sólo una columna. Por ejemplo: $A=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

A una matriz columna también se la denomina "vector columna".

☞ **Matriz nula:**

Es aquella en la que todos sus elementos son cero.

☞ **Matriz cuadrada:**

Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas.

Si la matriz es de dimensiones $n \times n$ se dice que es de orden n.

Una matriz cuadrada de orden 2 es

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

En una matriz cuadrada se llama diagonal a la serie formada por los elementos:

$a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{nn}$

☞ **Matriz triangular:**

Aquella en la que son ceros todos todos sus términos situados "a un lado" de la diagonal. Pueden distinguirse las triangulares superiores (son ceros los elementos situados bajo la diagonal principal) y las triangulares inferiores (son ceros los elementos situados sobre dicha diagonal)

Una matriz triangular superior es:

$$A=\begin{pmatrix}a & b & d\\ 0 & c & e\\ 0 & 0 & f\end{pmatrix}$$

☞ **Matriz diagonal:**

Es aquella matriz cuadrada en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal son nulos.

Una matriz diagonal es:

$$A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$$

☞ **Matriz escalar:**

Es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal idénticos.

☞ **Matriz unidad o identidad:**

La matriz identidad o unidad de orden n es la matriz cuadrada en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1, y todos los demás elementos son 0.

La matriz unidad de orden 3 es:

$$I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

☞ **Matriz simétrica:**

Es aquella matriz cuadrada $A=(a_{ij})$ en la tiene $a_{ij}=a_{ji}$. Observemos que en este caso es $A=A^t$.

Una matriz simétrica es:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

2.Suma y producto por un número

❑ Suma de matrices.

Si A y B son dos matrices de dimensiones $m \times n$, su suma $A+B$ es otra matriz C de las mismas dimensiones con

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

Observa que sólo está definida la suma de matrices con iguales dimensiones.

☞ Ejemplo: es $\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 4\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & 5\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

La suma de matrices tiene las mismas que la suma numérica: es asociativa, conmutativa y la matriz nula es como el cero ($A + 0 = A$)

Comprueba, a título de ejemplo, las propiedades con unas matrices.

Y dada $A = (a_{ij})_{m\,,n}$ se dice que $-A = (-a_{ij})_{m\,,n}$ es su opuesta, porque al sumarlas se obtiene la matriz nula, claro.

❑ Resta de matrices.

Si A y B son dos matrices de dimensiones $m \times n$, su diferencia $A - B$ es otra matriz C de las mismas dimensiones con

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Es fácil observar que
A – B = A + (–B)

❑ Producto por un número.

El producto del número real k por la matriz $A = (a_{ij})$ es la matriz que se obtiene al multiplicar cada elemento de A por dicho número:

$$kA = (ka_{ij})$$

☛ Ejemplo $3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 12 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -10 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$$

Si $A\,, B \in \mathfrak{M}_{m\times n}\,, k\,, h \in \mathbb{R}$, es fácil comprobar las siguientes propiedades:

Comprueba, a título de ejemplo, las propiedades con unas matrices.

a) Distributivas: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

$(k + h) \cdot A = k \cdot A + h \cdot A$

b) Asociatividad mixta: $k \cdot (h \cdot A) = (kh) \cdot A$

c) Existencia de un elemento unidad: $1 \cdot A = A$

3.Producto de matrices

❑ Definiciones.

Como introducción, vamos a resolver un sencillo problema: vamos a comprar 3 litros de leche a 0,60 cts, 2 kilo de carne a 5 euros y 4 kilos de naranjas a 0,75 cts. ¿Sabrías calcular el total? Seguro que sí.

Pero vamos a aprovechar y usar las matrices: vamos a colocar en una matriz fila los productos y en una columna (para distinguirlos) los costes unitarios:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0.60 \\ 5 \\ 0.75 \end{pmatrix}}_{U} \to P \cdot U = 3 \cdot 0.65 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 0.75$$

Atención: observa que debe haber el mismo número de elementos en ambas para poder calcular.

Así se multiplica una fila por una columna. Partiendo de esta idea introduciremos el producto de matrices:

Sea A una matriz $m \times p$ y B una matriz $p \times n$.

Su producto $A \cdot B$ es la matriz C de dimensiones $m \times n$ en la que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

Importante: no está definido el producto de dos matrices cualesquiera: es preciso que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz.
En este caso la matriz producto tiene tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda.

☞ Obtenemos el elemento que ocupa la fila i y la columna j del producto $A \cdot B$ se multiplica la fila i de A por la columna j de B ¡como antes!

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

☞ <u>Ejemplo</u>: Calculemos $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C$, $C \cdot A$ con las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observemos las dimensiones de los factores y del producto:
a) (3x2) · (2x3) → (3x3)
b) (2x3) · (3x2) → (2x2)
c) (3x2) · (2x2) → (3x2)
d) (2x2) · (3x2) → No existe

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

d) $C \cdot A =$ No definido

❑ No conmutatividad.

Vemos que el producto $A \cdot B$ puede ser distinto de $A \cdot B$. Incluso puede existir uno de ellos y el otro no.

Aunque existan A·B y B·A tengan iguales dimensiones pueden ser distintos.

Pero, cuidado: también puede ocurrir que sea $A \cdot B = B \cdot A$. En este caso se dice que las matrices conmutan.

☞ <u>Ejemplo</u>: Para obtener todas las matrices que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ponemos $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Debe ser:

$$AB = BA \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectuando e igualando los términos obtenemos $c = 0$ y $b = 3d$. Así:

$$B = \begin{pmatrix} a & 3d \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad , \quad a, d \in \mathbb{R}$$

Tenemos así que hay infinitas matrices que conmutan con A.

❑ Propiedades.

Eso sí, el producto tiene las propiedades asociativas y distributivas (respecto de la suma), siempre y cuando puedan efectuarse las operaciones.

4.Matriz inversa.

En este epígrafe nos limitamos al conjunto de las matrices cuadradas de orden n, que recordemos se designa por $\mathfrak{M}_{n\times n}$.

Elemento unidad.

Recordemos la matriz identidad o unidad:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Se denomina así porque se comporta como el 1 en el producto de números: si es A un matriz cuadrada de orden n:

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

Matriz inversa.

Seguro que sabes escribir un par de números inversos. ¿Cuál es su producto? Claro, dos números son inversos cuando su producto es uno. Por ello.

Sean A y B cuadradas de orden n. Se dice que B es inversa de A si

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Se demuestra que sólo dicha inversa es única y se escribe $B = A^{-1}$.

☞ Ejemplo: comprobemos que son inversas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} , \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Al multiplicarlas deberíamos obtener la matriz unidad:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot(-3) & 2\cdot(-1)+1\cdot 2 \\ 3\cdot 2+2\cdot(-3) & 3\cdot(-1)+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

☞ Ejemplo: Todo número distinto de cero tiene inverso, pero no toda matriz $A \neq 0$ tiene inversa. Comprueba que no tiene inversa la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

5.Determinante de una matriz cuadrada

El determinante de una matriz cuadrada es un número que se obtiene a partir de ella mediante una fórmula. Vamos a estudiar hasta el orden 3.

Determinantes de orden 1.

El determinante de una matriz de orden 1 es el único número que la forma:

$$\det([\alpha]) = \alpha$$

Dos matrices cualesquiera de este conjunto pueden multiplicarse, siendo el resultado otra matriz de orden n. Tenemos de esta forma que el producto es una operación interna en $\mathfrak{M}_{n\times n}$.

En la matriz unidad los elementos de la diagonal principal son iguales a 1, y el resto de los elementos de la matriz son todos nulos.

Se dice que una matriz cuadrada es inversible o regular cuando tiene una matriz inversa.
Se comprueba en ese caso que la inversa es única.

Si A y B son cuadradas con
A · B = I
se demuestra que también es
B · A = I.

Sugerencia: multiplicamos por una matriz B cualquiera. El elemento de la primera fila y la primera columna resulta ser cero: ¡nunca obtendremos la matriz unidad!

❑ Determinantes de orden 2.

Dada una matriz cuadrada de orden dos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se llama determinante de A al número dado por:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

También se designa a dicho número mediante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

☞ Ejemplo: calculemos los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) = 30$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11} \cdot a_{22}$$

$$\det(I_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

❑ Determinantes de orden 3.

El cálculo es algo más complicado que en las matrices de orden 2:

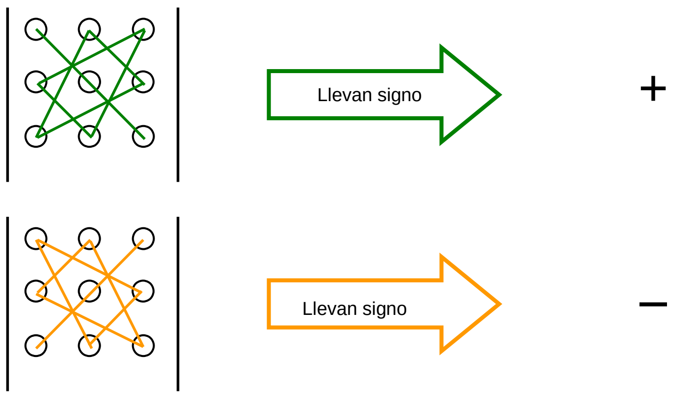
Dada una matriz cuadrada de orden tres $A = (a_{ij})$, se llama determinante de A al número real dado por la siguiente fórmula:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

También se designa a dicho número mediante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

La fórmula puede recordarse a través de la denominada "regla de Sarrus":



Observa que
- en cada producto hay un factor de cada fila y de cada columna de la matriz
- están todos los posibles productos que así pueden formarse
- la mitad de ellos tiene un signo + y la otra tiene un signo –.

☞ Ejemplo: calculemos los determinantes siguientes

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

Observa que:
- el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal.
- el determinante de la matriz unidad es 1.

6.Determinantes y matriz inversa

Recordemos que si A es una matriz cuadrada de orden n, se dice que A es inversible si existe una matriz A^{-1} que verifica

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Los determinantes permiten caracterizar qué matrices son invertibles y calcular la inversa en caso de que exista. Pero antes necesitamos introducir el concepto de adjunto de un elemento:

Recordemos que no toda matriz cuadrada tiene inversa.

En una A una matriz cuadrada, se llama adjunto del elemento $a_{i\,j}$, designado por A_{ij}, al producto del número $(-1)^{i+j}$ por el determinante complementario $\alpha_{i\,j}$ obtenido de A al eliminar la fila i y la columna j:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

En la definición:

- El número por el que multiplica α_{ij} es +1 ó –1 según sea i + j par o impar.
- El adjunto será el determinante complementario si i + j es par y el opuesto si i + j es impar

☞ Ejemplo: En la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Los adjuntos de los elementos a_{23} y a_{31} son, respectivamente:

$$A_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \ , \ A_{31} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

El siguiente Teorema de la Matriz Inversa es fundamental:

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

1. A es invertible siempre y cuando es $\det(A) \neq 0$.
2. Si $\det(A) \neq 0$ la inversa de A es la matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\mathrm{Adj}\ A)^t$$

donde la matriz $\mathrm{Adj}(A) = (A_{i\,j})$ es la matriz de los adjuntos de A.

☞ Ejemplo: La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ no es invertible, pues $\det(A) = 0$.

☞ Ejemplo: obtengamos la inversa de la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Determinante: $\det(B) = 2 \xrightarrow{\det(B)\neq 0}$ existe B^{-1}

Adjuntos: $\mathrm{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 10 & 2 \end{pmatrix}$

La inversa es $B^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -7 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

☞ Ejemplo: estudiemos cuándo la matriz $C = \begin{pmatrix} a & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

Determinante: $\det(C) = 3a - 12 = 0 \rightarrow a = 4$

Discusión:
$$a \neq 4 \rightarrow \det(C) \neq 0 \rightarrow C \text{ sí tiene inversa}$$
$$a = 4 \rightarrow \det(C) = 0 \rightarrow C \text{ no tiene inversa}$$

7.Determinantes: propiedades

Si designamos las columnas de A columnas por C_1, C_2, ... C_n escribiremos

$$\det(A) = \det[C_1\ C_2\ \dots\ C_n]$$

> Las propiedades de los determinantes se demuestran, bien a partir de la definición, bien a partir de otras anteriormente probadas. Puede intentarse alguna demostración como ejercicio de ampliación.

P1 - Trasposición

El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

$$\det(A^t) = \det(A)$$

P2 – Producto

El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de sus determinantes.

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

P3 – Alternancia

Si permutamos en un determinante dos líneas paralelas obtenemos un determinante de valor opuesto.

> Consecuencia: un determinante es cero si tiene una línea de ceros.

$$\det[C_1\ \dots\ C_i\ \dots\ C_j\ \dots\ C_n] = -\det[C_1\ \dots\ C_j\ \dots\ C_i\ \dots\ C_n]$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

P4 – Factor común

Si multiplicamos una línea de un determinante Δ por un número k obtenemos un determinante cuyo valor es igual a Δ multiplicado por k.

> Consecuencias:
> un determinante con una línea de ceros es cero
> Un determinante con dos líneas paralelas es cero

$$\det[C_1\ \dots\ k \cdot C_j\ \dots\ C_n] = k \cdot \det[C_1\ \dots\ C_j\ \dots\ C_n]$$

$$\begin{vmatrix} k\,a & b \\ k\,c & d \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

P5 – Invariancia

Un determinante no cambia de valor si a una línea añadimos múltiplos de líneas paralelas.

> Consecuencia:
> Un determinante es cero si una de sus líneas es el resultado de sumar o restar otras líneas paralelas.

$$\det[C_1\ \dots\ C_i\ \dots\ C_j\ \dots\ C_n] = \det[C_1\ \dots\ C_i\ \dots\ C_j + k \cdot C_i\ \dots\ C_n]$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' + k\,a & b'' + k\,b & c'' + k\,c \end{vmatrix}$$

8.Desarrollo por una línea

Por último una propiedad que permite calcular un determinante a partir de otros de menor orden y que se denomina "desarrollo por los elementos de una línea":

Un determinante es igual a la suma de los elementos de una línea cualquiera multiplicados por sus correspondientes adjuntos.

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

☞ Ejemplo: observa cómo se calcula el siguiente determinante de orden tres a partir de los elementos de la primera línea:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

Comprueba ese valor con la Regla de Sarrus.

☞ Ejemplo: aquí un determinante de orden 2 por la primera columna:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot \det(d) - c \cdot \det(b) = a \cdot d - b \cdot c$$

Observa que, por supuesto, se obtiene la fórmula del determinante.

9.Rango de una matriz

❑ Menores y rango

Comencemos definiendo el concepto de "menor" extraído de una matriz:

Se llama menor de una matriz a cualquier determinante formado con sus elementos o con los que quedan en ella al eliminar filas y/o columnas.

☞ Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ es un menor de orden 2 de la matriz (búscalo) .

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ es un menor de orden 3 de la matriz (¿cuál?)

La matriz no tiene menores de orden 4.

El rango de una matriz es un número relacionado con sus menores:

Diremos que el rango de una matriz es el número h si hay un menor de orden h distinto de cero pero no existe ningún menor de orden mayor a h que sea no nulo.

☛ Ejemplo: Estudiemos el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Primero calculamos el determinante de la matriz, que es el menor de mayor orden que podemos formar. Nos encontramos

$$\det(A) = 0$$

Ahora encontramos fácilmente un menor de orden 2 no nulo:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Concluimos que $\mathrm{rg}(A) = 2$.

En virtud de la propiedad de la dependencia,, tenemos que las dos primeras filas son independientes, pero las tres son dependientes.

☛ Ejemplo: Calculemos el rango de la matriz M según los valores de k:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz, que es el menor de mayor orden que podemos formar, y averiguamos cuándo será cero:

$$\det(M) = k - 5 = 0 \;\rightarrow\; k = 5$$

Independientemente de k es no nulo el siguiente menor de orden 2:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Discusión:

$$\begin{array}{lllll} k \neq 5 & \rightarrow & \Delta_3 = \det(M) \neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(M) = 3 \\ k = 5 & \rightarrow & \Delta_3 = \det(M) = 0\,,\ \Delta_2 \neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(M) = 2 \end{array}$$

Se tiene entonces:
- k = 5: las tres filas de la matriz son independientes.
- k ≠ 5: las tres son dependientes, pero hay dos independientes.

❑ Teorema del orlado

Sea A una matriz y $\Delta_h \neq 0$ un menor de orden h.

Si todos los menores orlados de Δ_h con una determinada fila son cero, entonces dicha fila es combinación lineal de las h filas de A con las que se ha formado Δ_h.

Es una propiedad útil en muchos casos para estudiar el rango.

☛ Ejemplo: determinemos el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos que hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden tres de ese menor con la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Se deduce que las dos primeras filas son linealmente independientes y que la tercera es combinación de ellas.

Hay un menor de orden 2 no nulo y todos los orlados, de orden 3, son cero.

Concluimos que $\operatorname{rg}(A) = 2$.

☞ Ejemplo: discutamos el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & -3 \end{pmatrix}$$

Vemos primero que hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Orlamos ese menor con la tercera fila:

$$\Delta_3^1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix} = a + 3 \quad , \quad \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvemos: $a + 3 = 0 \rightarrow a = -3.$

Discusión:

$$\begin{array}{llll} a \neq -3 & \rightarrow & \Delta_3^1 \neq 0 & \rightarrow \quad \operatorname{rg}(A) = 3 \\ a = -3 & \rightarrow & \Delta_3^1 = \Delta_3^2 = 0\,, \Delta_2 \neq 0 & \rightarrow \quad \operatorname{rg}(A) = 2 \end{array}$$

En el primer caso se deduce que las dos primeras filas son linealmente independientes y que la tercera es combinación de ellas.
En el segundo las tres filas son independientes.

❑ Teorema del rango

De lo anterior se deduce la propiedad, conocida como Teorema del Rango:

Sea A una matriz y $\Delta \neq 0$ un menor de orden p tal que no hay un menor de orden superior distinto de cero.

Entonces se tiene que:

a) El rango de A es p.

b) Las filas de A con las que se ha formado $\Delta \neq 0$ son linealmente independientes.

c) Las restantes filas de A son combinaciones lineales de ellas.

10.Apéndice: método de Gauss.

Transformaciones elementales.

El método de Gauss es un procedimiento que se usa para calcular la inversa de una matriz, calcular rangos, resolver sistemas,...

Se basa en aplicar las siguientes transformaciones elementales en una matriz hasta llegar a una meta:

- Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
- Añadir a una fila una combinación lineal de otras.
- Permutar filas.

Cálculo del rango

Hay una clase de matrices cuyo rango puede obtenerse de un simple vistazo: son las matrices escalonadas. El esquema siguiente muestra la estructura de una matriz escalonada:

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \square \end{pmatrix}$$

Se llama matriz escalonada a aquella en la que:
1. Todas las filas cero están en la parte inferior de la matriz.
2. El primer elemento no nulo de cada fila, llamado *pivote*, está a la derecha del pivote de la fila anterior.

Veamos con algunos casos lo fácil que es: el rango es igual al número de filas no nulas.

☞ Ejemplo: Es $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

☞ Ejemplo: Es $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 3$

☞ Ejemplo: Es $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$

¿Qué tiene esto que ver con las transformaciones elementales? Pues que el método de Gauss puede usarse para obtener el rango de una matriz ya que:

1. Las transformaciones elementales no cambian el rango
2. Permite transformar una matriz en escalonada.

La propiedad básica del rango que se usa es la siguiente:

Si sometemos una matriz A a cualesquiera de las transformaciones elementales obtendremos una matriz B de igual rango.

☞ Ejemplo: Obtengamos el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} f_2' = f_2 - f_1 \\ f_3' = f_3 - 2f_1 \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} |f_3' = f_3 - f_2\rangle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es claramente 2.

Fíjate cuáles son las transformaciones elementales a las que se someten las matrices. Todas tienen el mismo rango.

☞ Ejemplo: Obtengamos el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} f_2' = f_2 - f_1 \\ f_3' = f_3 - 3f_1 \\ f_4' = f_4 - 4f_1 \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} f_3' = f_3 - 2f_2 \\ f_4' = f_4 - 3f_2 \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es también claramente 2.

❑ Cálculo de la inversa

Calculamos la inversa de la matriz A con el método de Gauss así

1. Colocamos la matriz A junto a la matriz identidad:
2. Sometemos las filas a las transformaciones elementales necesarias hasta que la matriz A se transforme en la identidad.
3. La matriz en la que se ha convertido I es la inversa de A.

Primero se intenta convertir A en triangular superior o inferior, luego en matriz diagonal y por último en la matriz identidad.

☞ Ejemplo: hallemos por el método de Gauss la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) |f_1' = f_1 - f_2\rangle \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) |f_2' = f_2 - f_1\rangle \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos así:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

☞ Ejemplo: veamos que no tiene inversa la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) |f_2' = f_2 - 2f_1\rangle \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

¡Oh! Una fila completa de ceros a la izquierda: será imposible obtener la identidad ahí. Tenemos así que la matriz A no tiene inversa.

☞ Ejemplo: comprobemos que es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -4 \\ -1.5 & 0.5 & -0.5 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Primero conviértela en triangular superior, luego en diagonal y por último en la matriz identidad.

11. Ampliación: determinantes de cualquier orden.

Es posible dar una definición de determinante para matrices de cualquier orden como las anteriores, pero es bastante complicada y no es práctica, al ser muy elevado el número de términos.

Para obtener determinantes de orden superior a tres o se acude a una máquina que sea capaz de calcularlos (calculadora gráfica u ordenador) o se intenta reducir el cálculo a determinantes de orden 2 y 3.

Veamos una "definición inductiva" del concepto de determinante:

Sea A una matriz cuadrada.

Si A es de orden $n=1$, concretamente $A=[\alpha]$, llamamos determinante de A al número dado por:

$$\det(A)=\alpha$$

Si A es de orden $n>1$, supuesto definido el determinante de toda matriz cuadrada de orden $n-1$, llamamos determinante de A al número:

$$\det(A)=a_{11}A_{11}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}$$

El determinante de una matriz A se designa también mediante $|A|$.

La definición dada es del tipo conocido como "inductiva" o "recurrente". Observa que nos dice directamente cómo calcular los determinantes de orden 1.
Usando la segunda parte, podremos calcular los de orden 2, a continuación los de orden 3, y así sucesivamente.

☞ Ejemplo: calculemos $\Delta=\begin{vmatrix}3&0&2&0\\-1&1&0&2\\1&1&2&1\\2&1&0&3\end{vmatrix}$

$$\Delta=3\cdot\begin{vmatrix}1&0&2\\1&2&1\\1&0&3\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-1&1&2\\1&1&1\\2&1&3\end{vmatrix}=3\cdot2+2\cdot(-5)=-4$$

☞ Ejemplo: Es fácil deducir, directamente de la definición, que el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\ldots&0\\a_{21}&a_{22}&0&\ldots&0\\a_{21}&a_{22}&a_{33}&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$$

Ejercicios

1. Obtén las matrices A y B que verifiquen el sistema

$$\begin{cases} 2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A-3B=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. Encuentra una matriz X que cumpla

$$2X+3A=4B^t$$

siendo

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Calcule los valores de x e y que verifican:

$$3\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} y & 2x \\ 1 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4y & -2y \\ -1 & -3x \end{pmatrix}$$

4. Dadas las matrices siguientes

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula, si es posible:

$$3A+2B^t,\ A\cdot B+C,\ B\cdot A+C,\ A^2,\ B^2,\ C^2$$

5. Obtén la matriz X que cumpla $A+X=A\cdot B$ con:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Calcule $3A\cdot A^t-2I_2$ siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Dadas las matrices

$$B=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

determine a y b para que se verifique la igualdad $B\cdot C-D=O$, siendo O la matriz nula.

8. Halle los valores de a y b para que se verifique $B\cdot C^t=A$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 3 & -1 & b \end{pmatrix}$$

9. De la matriz A sabemos que su segunda fila es $\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ y que su segunda columna es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}^t$.

Halle los restantes elementos de A sabiendo que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Comprueba que $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Resuelve la ecuación $X\cdot A+3A=2A^t$.

11. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Resuelve la ecuación $A\cdot X^t-B=3C$

12. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix}$

b) $\Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

13. Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix}=0$$

14. Halle A^{2000}, B^{2001} y C^{2003} para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15.[S/07] Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A - I_2)^2 = O$.

b) Para $m = 2$, halla la matriz X tal que $AX - 2A^t = O$.

16.[S/07] Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) Determina la matriz $B = A^2 - 2A$.

b) ¿Para qué valores de λ la matriz B tiene inversa?

c) [0,75] Calcula B^{-1} para $\lambda = 1$.

17.[S/07] Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina α para que la matriz A tenga inversa.

b) Para $\alpha = 1$, calcula A^{-1} y resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

18.[S/07]

a) Calcula el valor de m para el que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$$

verifica la relación $2A^2 - A = I$ y determina A^{-1}para dicho valor de m.

b) Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2 - M = I$, determina la expresión de M^{-1} en función de M y de I.

19.[S/07] Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A - 2I$ es cero.

b) Calcula la matriz inversa de $A - 2I$ para $\lambda = -2$

20.[S/08] Comprueba que es invertible la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y halla la matriz P que verifica $AP - B = C^t$, con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

21.[S/08] Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$$

Halla los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3.

22.[S/08] Sea I la matriz identidad de orden 3 y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula, si existe, el valor de k para el cual $(A - kI)^2$ es la matriz nula.

23.[S/08] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula, si existen, sus inversas.

b) Resuelve la ecuación $AX + B = A + I_3$.

24.[S/08] Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$$

a) Estudia el rango de la matriz en función de los valores del parámetro k.

b) Para $k = 0$, halla la matriz inversa de A.

25.[S/09] Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcula, si existe, A^{-1}.

26.[S/09] Sean A, B, C y X matrices que verifican $AXB = C$.

a) Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de A es 3, el de B es -1 y el de C es 6, calcula el determinante de las matrices X y $2X$.

b) Calcula la matriz X si

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \; C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \; C=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

27. [S/09] Comprueba que es invertible la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y halla la matriz X que cumple $AX - B^t = 2C$ donde

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

28.[S/09] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula, si existe, la matriz inversa de A

b) Resuelve las ecuaciones matriciales $XA = A + 2B$ y $AY = A + 2B$

29.[S/09] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = A - kI_2$$

a) Determina los valores de k para los que B no tiene inversa.

b) Calcula B^{-1} para $k = -1$.

c) Determina la constantes α y β para las que se cumple $A^2 + \alpha A = \beta I_2$.

30.[S/10] Sean las matrices

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de α tiene inversa A?

b) Calcula la inversa de A para $\alpha = 1$.

c) Resuelve, para $\alpha = 1$, el sistema de ecuaciones $AX = B$

31.[S/10] Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

a) Indica los valores de m para los que A es invertible.

b) Resuelve la ecuación matricial $XA - B^t = C$ para $m = 0$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

32.[S/10] Considera las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A^{-1} .

b) Resuelve la ecuación matricial $AXA^t - B = 2I$

33.[S/10] Obtén un vector no nulo $\vec{v} = (a, b, c)$, de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

34.[S/10] Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que se verifica $2A - A^2 = I$.

b) Calcula A^{-1} . (Sugerencia: usar (a)).

35.[S/10] Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz X que cumpla la ecuación $AXB = C$.

36.[S/10] De la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que $\det(A) = 4$. Se pide hallar razonadamente

a) Halla $\det(-3A^t)$ y $\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$.

b) Calcula $\det(A^{-1}A^t)$.

c) Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$, halla $\det(B)$.

37.[S/11] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula el rango de A dependiendo de los valores de α .

b) Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

38.[S/11] Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los valores de α para los que la matriz inversa de A es $\frac{1}{12}A$

b) Para $\alpha = -3$, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^tX = B$.

39.[S/11] Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Hay algún valor de λ para el que A no tiene inversa?

b) Para $\lambda = 1$, resuelve la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$.

40.[S/11] Sean A y B dos matrices que verifican

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Halla las matrices $(A+B)(A-B)$ y $A^2 - B^2$.

b) Resuelve la ecuación matricial

$$XA - XB - (A+B)^t = 2I$$

41.[S/11] Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A - 2I$ tiene inversa.

b) Para $\lambda = -2$, resuelve la ecuación matricial $AX = 2X + I$

42.[S/11] Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Prueba que $A^2 + 2A = I$ y que $A^{-1} = A + 2I$.

b) Calcula la matriz X que verifica la ecuación $A^2 + XA + 5A = 4I$.

43.[S/11] Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 = -I$

b) Justifica que A es invertible y halla su inversa.

c) Calcula razonadamente A^{100} .

44.[S/11] Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.

b) Para $\lambda = 0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$

45.[S/11] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$$

Calcula el rango de A según los valores de t .

46.[S/12] Encuentra la matriz X que satisface la ecuación $XA + A^3B = A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

47.[S/12] Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$$

Determina la matriz X que verifica $AXB=C^t$.

48.[S/12] Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&2\\1&k&1\end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A?

b) Para $k=0$, resuelve la ecuación matricial $(X+I)\cdot A=A^t$.

49.[S/12] Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}3&-2\\5&1\end{pmatrix}$$

sea B la matriz tal que

$$AB=\begin{pmatrix}-2&1\\7&3\end{pmatrix}$$

a) Comprueba que las matrices A y B poseen inversas.

b) Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}XB=BA$.

50.[S/13] Sean A y B las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&-4\\-9&5\end{pmatrix}$$

a) Calcula las matrices X e Y para las que $2X-Y=A$ y $X-3Y=B$.

b) Halla la matriz Z que verifica $B^2+ZA+B^t=3I$.

51.[S/13] Sean

$$A=\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

a) Calcula X e Y tales que $X-Y=A^t$ y $2X-Y=B$.

b) Calcula Z tal que $AZ=BZ+A$.

52.[S/13] Sabiendo que el determinante de una matriz

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\p&q&r\end{pmatrix}$$

es 4, calcula indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$.

b) Los determinantes

$$\begin{vmatrix}a&-b&c\\2d&-2e&2f\\p&-q&r\end{vmatrix}\,,\,\begin{vmatrix}-3d&-3e&-3f\\a&b&c\\-p&-q&-r\end{vmatrix}$$

53.[S/13] Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es $\det(M)=2$. Calcula:

a) El rango de M^3.

b) El determinante de $2M^t$.

c) El determinante de $(M^{-1})^2$.

d) El determinante de N , donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y la segunda filas de M.

54.[S/13] Sea

$$M=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&m+1&0\\1&1&m-1\end{pmatrix}$$

a) Estudia su rango según los valores de m.

b) Determina los valores de m para que los vectores fila de M sean linealmente independientes.

c) Para $m=1$, calcula la inversa de M.

55. [S/13] Sea

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $A^2=2\cdot I$ y calcula A^{-1}.

b) Calcula A^{2013} y su inversa.

56.[S/14] Halla X con $A^{-1}\cdot X\cdot A=B-A$ si

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&1\\0&-5&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

57.[S/14] Se sabe que es -3 el determinante de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Calcula, indicando las propiedades usadas:

a) $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$.

b) Los los determinantes siguientes:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$$

58. [S/14] Se sabe que es 2 el determinante de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculemos

a) $\det(3A)$ y $\det(A^{-1})$.

b) Los determinantes

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

59. [S/14] Sabiendo que el determinante de una matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

es 3, calcula indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) $\det(A^3)$, $\det(A^{-1})$ y $\det(A+A^t)$.

b) Los determinantes

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix}$$

60.[S/14] Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Para qué valores de m se verifica que $A^2=2\cdot A+\mathrm{I}$?

b) Para $m=1$, calcula A^{-1} y la matriz X que satisface $A\cdot X-B=A\cdot B$.

61.[S/15] Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$$

a) Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

b) Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

62.[S/15] Consideremos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla el determinante de una matriz X que verifique la igualdad $X^2AX=B$.

b) Determina, si existe, la matriz Y que verifica la igualdad $A^2YB^{-1}=A$.

PROBLEMAS CON INTERPRETACIÓN

63. Una fábrica produce dos tipos de productos, A y B, que distribuye a tres clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A y 5 de B, el segundo cliente 3 de A y 7 de B, y el tercer cliente 4 de A y 6 de B.

En el mes de febrero el primer cliente y el segundo duplicaron las compras del mes anterior, y el tercer cliente compró de cada producto una unidad más de las que compró en enero. En marzo el primer cliente no compró nada, y el segundo y el tercero compraron lo mismo que en febrero.

a) Para cada mes construya la matriz 3×2 correspondiente a las compras de ese mes.

b) Calcule la matriz de compras del trimestre.

c) Si los precios de los productos A y B son, respectivamente, 80 y 100 euros, calcule lo que factura la fábrica en el primer trimestre, por cada cliente y en total.

64. Una persona tiene que comprar 2 kg de manzanas, 1 kg de ciruelas y 1.5 kg de plátanos y otra necesita 0.5 kg de manzanas, 2.5 de ciruelas y 3 de plátanos. En la frutería A, los precios de las manzanas son 1.8 euros/kg, los de las ciruelas 2.1 y los de los plátanos 1.9 y en la frutería B son 1.7, 2.3 y 1.75 respectivamente.

a) Escribe la matriz M de dimensiones 2×3 correspondiente a las frutas y la matriz N de dimensiones 3×2 correspondiente a los precios unitarios.

b) Determine $M\cdot N$ e indique qué representa cada uno de los elementos de la matriz producto.

c) ¿Qué frutería le conviene a cada persona ?

65. Una fábrica de muebles fabrica 3 modelos de estanterías A, B y C, cada uno en dos tamaños grande y pequeño. Produce diariamente 1000 estanterías grande y 8000 estanterías pequeñas del tipo A, 8000 grandes y 6000 pequeñas del tipo B y 4000 grandes y 6000 pequeñas del tipo C.

Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 4 soportes, y la pequeña lleva 12 tornillos y 2 soportes.

a) Representar esta información en dos matrices.

b) Hallar una matriz que exprese la cantidad de tornillos y soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería

66. Los alumnos de 2º de Bachillerato organizan una venta de pasteles para el viaje de fin de curso. Venden pasteles grandes, que necesitan 2 huevos, 5 terrones de azúcar y 100 g de harina cada uno, y pasteles pequeños, que necesitan 1 huevo, 3 terrones de azúcar y 80 g de harina cada uno.

a) Presente en una matriz M, de dimensiones 3×2, las cantidades de los elementos necesarios para la elaboración de un pastel grande y uno pequeño.

b) Si desean fabricar 20 pasteles de una clase y 30 de otra, escriba las dos matrices columna, A (20 grandes y 30 pequeños) y B (30 grandes y 20 pequeños) que representan este reparto.

c) Calcule los productos $M\cdot A$ y $M\cdot B$ e indique si con 8 docenas de huevos, 200 terrones de azúcar y 5 kg de harina se pueden elaborar 20 pasteles grandes y 30 pequeños. ¿Y 30 grandes y 20 pequeños?

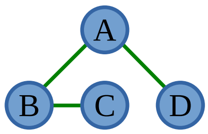
67. Un industrial cafetero produce dos tipos de café, natural y descafeinado, en tres modalidades cada uno, A, B y C. Se han anotado en la matriz P los pesos, en kg, del café que el industrial produce de cada una de las modalidades de cada tipo, y en la matriz Q los precios a los que vende el kg de cada producto final:

$$P=\begin{pmatrix}550 & 260\\ 400 & 200\\ 200 & 100\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}2.20 & 3.20\\ 2.75 & 3.90\\ 2.50 & 3.60\end{pmatrix}$$

Efectúe el producto $P\cdot Q^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante. ¿Cuáles son los ingresos totales del industrial?

Grafos

Cuatro localidades (A , B , C , D) están comunicadas entre sí según señala el grafo siguiente:

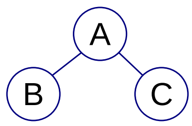


La información puede codificarse en la siguiente matriz, llamada matriz de adyacencia del grafo:

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

68. Consideremos:

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$



dibuja el grafo de vértices a, b, c cuya matriz de adyacencia es C y escribe la matriz D de adyacencia del grafo no dirigido representado.

Cuestiones

1. Comprueba con las matrices A y B que es $(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz A se dice que es antisimétrica si su traspuesta coincide con su opuesta. Escribe una matriz antisimétrica.

Observa que debe ser $a_{ij} = a_{ji}$.

3. Las matrices C y D son las matrices adyacentes a un grafo. Dibuje esos grafos.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Comprueba la propiedad asociativa del producto con las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Comprueba la propiedad distributiva

$$A(B+C) = AB + AC$$

con las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Se dice que dos matrices A y B conmutan si $AB = BA$. Escribe dos matrices cuadradas distintas, que no sean ni la matriz nula ni la matriz unidad, que conmuten.

7. Sea A una matriz de dimensiones 2×3. ¿Existe una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz fila? ¿Y una matriz columna?

Idem para el producto $B \cdot A$.

8. Sean A, B, C matrices con 2, 3 y 2 filas respectivamente. Sabiendo que el producto ABC es posible y que el resultado es una matriz con 4 columnas, halle las dimensiones de dichas matrices.

9. Sea A una matriz de 3 filas y 4 columnas y C una matriz 2×3. ¿Cuántas filas y columnas tiene B sabiendo que existe la matriz ABC? ¿Qué dimensiones tiene la matriz ABC?

10. Sea D una matriz tal que al multiplicarla por su traspuesta da una matriz de dimensión 1×1, y tal que el producto de la traspuesta de D por la propia D es 3×3. ¿Cuántas filas y columnas tiene D? ¿Tiene D inversa?

11. En cada caso, escribe dos matrices cuadradas, A y B, de orden 2 tales que:

a) $A \cdot B = \mathrm{O}$ y $A \neq \mathrm{O}, B \neq \mathrm{O}$

b) $A \cdot B = A \cdot C$ y $B \neq C$

c) $(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$

d) $(A-B)^2 \neq A^2 + B^2 - 2AB$

e) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n.

13. Siendo $E^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula el determinante de la matriz $E \cdot E^t$.

14. Sean A, B, C, D matrices cuadradas donde A y B son invertibles. Despeja X en las igualdades siguientes:

a) $AX - B = C$

b) $XB - AC = 3D$

c) $2C - AX = BD$

d) $3AD - 2XB = 2AC$

e) $A^t X = C$

f) $AXB = C$

g) $2X + AX = C$

15. Si A y B son dos matrices cuadradas e invertibles del mismo orden, demuestra que $A \cdot B$ tiene inversa y que es

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

16. Si la matriz cuadrada A verifica $A^2 - 2A + \mathrm{I} = \mathrm{O}$, demuestra que A tiene inversa y obtén su expresión.

17. Si la matriz cuadrada A tiene inversa:

a) Demuestra que su traspuesta tiene inversa.

b) ¿Qué relación hay entre las inversas de A y A^t?

18. Sea A una matriz cuadrada con $\det A = k$.

a) ¿Cuándo es A inversible?

b) Averigua cuál es el valor de $\det(A^{-1})$.

19. Sea $A = [\ c_1 \quad c_2 \quad c_3\ ]$ una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es igual a -4.

Deduce el valor de:

a) $\det[\ c_1 + 2c_2 \quad c_2 \quad c_3\ ]$

b) $\det[\ 3c_1 \quad c_2 \quad 2c_3\ ]$

c) $\det[\ c_1 \quad c_2 \quad c_1 + 4c_3\ ]$

d) $\det[\ c_1 + c_3 \quad c_2 \quad c_1\ ]$

20. Sea A una matriz cuadrada de tercer orden con $\det(A) = 3$. Razona que es $\det(2A) = 24$.

21. A una matriz cuadrada de tercer orden con $\det(A) = 2$. Obtén el valor de $\det(3A)$ y $\det(A^{-1})$.

22. [S/97] Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2 tales que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene A inversa? Justifica la respuesta y si la respuesta es afirmativa indica cuál es dicha inversa.

b) ¿Es cierto que $A \cdot B = B \cdot A$ en este caso?

23. [S/98] Sea A una matriz no nula dada y considera la ecuación matricial $AX = A + X$, donde X es la incógnita.

a) Encuentra razonadamente la relación que debe existir entre las dimensiones de A y de X.

b) ¿Puede ser la suma de dos soluciones una nueva solución? ¿Y el producto de un número por una solución? Justifica la respuesta.

24. [S/99] Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal cuando coinciden su inversa y su traspuesta. Para cada número real x sea B la matriz

$$B = \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Es ortogonal la matriz B?

25. [S/99] La matriz cuadrada X de orden 3 verifica la relación

$$X^3 + X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determina, si es posible, el rango de X.

26. [S/01] Sea

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de x existe la inversa de A?

27. [S/02] Sea

$$A = \begin{pmatrix} t & -2 \\ t & t \end{pmatrix}$$

Halla los valores de t para los que es $\det A > 0$ y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

28. [S/03] Se sabe que el determinante de una matriz cuadrada A de orden 3 vale –2. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz $4A$?

29. [S/09] Sean f_1 , f_2 , f_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) El determinante de B^{-1}.

b) El determinante de $(B^t)^4$.

c) El determinante de $2B$.

d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5f_1 - f_3$, $3f_3$, f_2.

30. [S/11] Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = \dfrac{1}{2}$ y $|B| = -2$.

a) $|A^3|$.

b) $|A^{-1}|$.

c) $|-2\,A|$.

d) $|AB^t|$.

e) El rango de B.

Autoevaluación

1. Sea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

a) Estudia el rango de M según los valores de m.

b) Determina los valores de m para que los vectores fila de M sean linealmente independientes.

c) ¿Para qué valores de m no es invertible la matriz?

d) Para $m = 1$, calcula la inversa de M.

2. Sea

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $C^2 - 2 \cdot \mathrm{I} = \mathrm{O}$ y deduce de ahí cuál es la matriz inversa C^{-1}.

b) Calcula C^{2013} y su inversa.

3. Sean

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula X e Y tales que $X - Y = A^t$ y $2X - Y = B$.

b) Calcula Z tal que $AZ = BZ + A$.

4. Sea M una matriz cuadrada cuyas columnas son C_1 , C_2 , C_3 y tal que su determinante es 2. Calcula:

a) El determinante de $2M^t$.

b) El determinante de $(M^{-1})^2$.

c) El determinante de N , donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y la segunda filas de M.

d) El determinante cuyas columnas son

$$3C_1 - C_3 , 2C_3 , C_2$$

e) El rango de M^3.

5. Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz inversa de A .

b) Calcula A^{127} y A^{128}.

c) Determina x e y para que A y B conmuten.

d) Para los valores $x = y = 1$, resuelve la ecuación matricial $A(X + A^t) = B$.

Autoevaluación

1.

a) Calculamos el determinante de la matriz, que es el menor de mayor orden que podemos formar:

$$\det(M) = m^2 + m = 0 \to m = 0\,, m = -1$$

Y observemos que en cualquier caso es

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Caso 1: $m \neq 0$ y $m \neq -1$.

El determinante de M, de orden 3, es no nulo. Por ello el rango es 3.

Caso 2: $m = 0$ o $m = -1$.

El mayor orden posible de un menor no nulo es 2. Luego el rango es 2.

b) Las tres filas son independientes cuando el rango de la matriz es 3. Eso ocurre precisamente cuando m no es ni 0 ni -1.

c) La matriz M no es invertible cuando su determinante se anula. Según lo visto antes, eso ocurre precisamente cuando $m = 0$ o $m = -1$.

d) Realizando los cálculos:

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.

a) Una sencilla operación:

$$C^2 - 2\cdot \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{O}$$

Observemos que de ahí:

$$C^2 = 2\cdot \mathrm{I} \to \frac{1}{2}C\cdot C = \mathrm{I} \to C^{-1} = \frac{1}{2}C$$

e) Descomponemos $C^{2013} = C^{2012}\cdot C$ pues así:

$$C^{2013} = \left(C^2\right)^{1006}\cdot C = (2\mathrm{I})^{1006}\cdot C = 2^{1006}C$$

Su inversa será

$$\begin{aligned}(C^{2013})^{-1} &= \left(2^{1006}C\right)^{-1} = \frac{1}{2^{1006}}\cdot C^{-1} \\ &= \frac{1}{2^{1006}}\cdot\frac{1}{2}C = \frac{1}{2^{1007}}C\end{aligned}$$

3. Calculemos X e Y :

$$\left\{\begin{array}{rcl} X - Y &=& A^t \\ 2X - Y &=& B \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcl} -X + Y &=& -A^t \\ 2X - Y &=& B \end{array}\right.$$

Sumando:

$$X = B - A^t$$

Despejando ahora de la primera igualdad:

$$Y = X - A^t = B - 2A^t$$

Efectuando las operaciones:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a calcular Z. Despejamos:

$$AZ = BZ + A \to (A-B)Z = A \to Z = (A-B)^{-1}A$$

Realizando los cálculos:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

a) Pongamos

$$|2M^t| = 2\cdot 2\cdot 2\cdot |M^t| = 8|M| = 16$$

"el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta" y "si en un determinante se multiplica una línea por un número todo el determinante queda multiplicado por dicho número"

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Primero observemos que

$$M\cdot M^{-1} = \mathrm{I} \to |M|\cdot|M^{-1}| = 1 \to |M^{-1}| = \frac{1}{2}$$

Así:

$$|(M^{-1})^2| = |M^{-1}|\cdot|M^{-1}| = \frac{1}{4}$$

c) $|N| = -|M| = -2$

d) Escribamos los determinantes por columnas:

$$\begin{aligned}\Delta &= \det[\ 3c_1 - c_3 \quad 2c_3 \quad c_2\ ] \\ &= \det[\ 3c_1 \quad 2c_3 \quad c_2\ ] - \det[\ c_3 \quad 2c_3 \quad c_2\ ] \\ &= 6\det[\ c_1 \quad c_3 \quad c_2\ ] - 0 \\ &= 6\cdot(-2) = -8\end{aligned}$$

e) $|M^3| = |M|\cdot|M|\cdot|M| = 8$

Como su determinante no es cero, el rango es 3.

5.

a) Realizando el cálculo, es fácil comprobar que

$$A^{-1} = A$$

b) Del apartado anterior obtenemos que

$A^2 = A \cdot A = \mathrm{I}$

$A^3 = A^2 \cdot A = A$

Por inducción:

$$A^n = \begin{cases} \mathrm{I} & \text{si} \quad \text{n es par} \\ A & \text{si} \quad \text{n es impar} \end{cases}$$

Luego, en particular:

$$A^{127} = A \; , \; A^{128} = \mathrm{I}$$

c) Efectuamos e igualamos $A \cdot B$ y $B \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$

Igualando todos obtenemos

$$x = 0 \; , \; y = 1$$

d) Para los valores $x = y = 1$:

$$A(X + A^t) = B \to X = A^{-1}B - A^t$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$