# TEMA 4

## INTEGRAL DEFINIDA

Contenidos

1. Integral definida: Regla de Barrow.
2. Propiedades de la integral definida.
3. La integral como área.
4. Cálculo de área entre una curva y el eje de abscisas
5. Áreas de recintos limitados por curvas.
6. Teorema Fundamental del Cálculo.
7. Sumas de Riemann

Tiempo estimado

12 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Comprender la definición de integral de una función continua, partiendo del intento de definir el área, como límite de sumas superiores e inferiores
2. Saber interpretar la integral definida como el "área algebraica" bajo una curva.
3. Saber aplicar las propiedades de linealidad y aditividad respecto al intervalo de integración.
4. Conocer el significado de la monotonía de la integral definida.
5. Conocer la técnica de integración por cambio de variable en el cálculo de integrales definidas.
6. Conocer la noción de función integral y comprender el contenido del Teorema Fundamental del Cálculo.
7. Saber aplicar la Regla de Barrow.
8. Saber calcular áreas de recintos planos limitados por curvas.

# 1.Definición de integral definida

Nosotros vamos a tomar como punto de partida la siguiente definición:

Sea $f$ una función continua en el intervalo $[a\,,b]$ y $F$ es una primitiva suya. La integral definida de $f$ en el intervalo $[a\,,b]$ es el número dado por

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Esta fórmula recibe el nombre de Regla de Barrow, en honor a Isaac Barrow, maestro de Newton.

<u>Notas</u>:

a) La integral definida es un **número**, que no depende de la primitiva $F$, pues todas se diferencian sólo en una constante y, al restar, dicha constante se elimina.

b) Suele escribirse de la siguiente forma:

$$\int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F\,(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$$

c) Obsérvese que la fórmula también es válida en estos casos:

$$\int_a^a f\,(x)\,\mathrm{d}x = 0\,,\ \int_b^a f\,(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}x$$

☞ <u>Ejemplo</u>: aplicamos la Regla de Barrow para obtener

$$\int_0^1 \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{x=0}^{x=1} = \left(\frac{1}{3}+1\right) - (0) = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^\pi \cos\,(2x)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(2x)\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\pi) - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(0) = 0$$

$$\int_{-\mathrm{e}}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -1$$

Comprueba que la integral desde x=1 hasta x=e de f(x)=ln(x) es 1.

# 2.Propiedades de la integral definida

Aquí resumimos las propiedades básicas:

Si $f$ y $g$ son funciones continuas en $[a\,,b]$ se cumple:

a) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ para cualesquiera números $\alpha$ y $\beta$.

b) $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ para cualquier $c \in [a\,,b]$

c) $\displaystyle f \geq 0 \ \longrightarrow\ \int_a^b f \geq 0$

d) $\displaystyle f \leq g \ \longrightarrow\ \int_a^b f \leq \int_a^b g$

La propiedades reciben los siguientes nombres:

a) Linealidad en el integrando.

b) Aditividad en el intervalo.

c) No negatividad

d) Monotonía

☞ Ejemplo: calculemos

$$\int_0^{\pi} (2\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x + 3\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 2\cdot 1 + 3\cdot 0 = 2$$

☞ Ejemplo: observemos que la integral en el intervalo $[-2\,,3]$ de

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

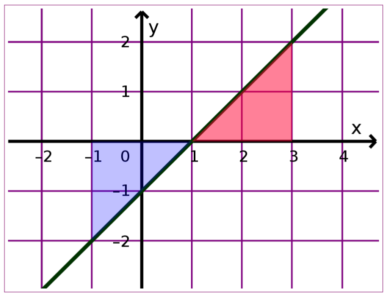
viene dada por

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} 2x\,\mathrm{d}x + \int_0^3 x^2\mathrm{d}x = -4 + 9 = 5$$

☞ Ejemplo: intenta deducir la monotonía de la no negatividad.

## 3.La integral como área

La integral definida es un número que está relacionada con el área:

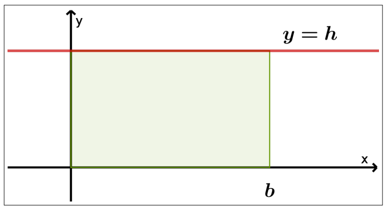



☞ Ejemplo: si integramos $f(x) = x - 1$ en el intervalo $[1\,,3]$ nos sale el área del triángulo rojo dibujado, pero si integramos en $[-1\,,1]$ nos sale el opuesto del área del triángulo azul:

$$\int_1^3 (x-1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x=1}^{x=3} = 2 = a(\mathscr{R}_1)$$

$$\int_{-1}^1 (x-1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x=-1}^{x=1} = -2 = -a(\mathscr{R}_2)$$

Observemos el área de un rectángulo:




☞ Ejemplo: al integrar $f(x) = h$ en el intervalo $[0\,,b]$

$$\int_0^b h\,\mathrm{d}x = \Big[h\,x\Big]_{x=0}^{x=b} = b\,h$$

se obtiene el área del rectángulo de la figura para $h > 0$ (y la opuesta si es $h < 0$)

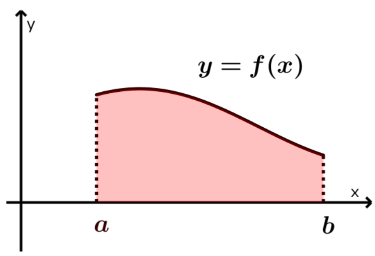
En general, la integral coincide con el área del recinto que forma la gráfica del integrando con el eje de las X si está sobre el eje, y con su opuesta si está bajo él.

Por ello la integral se usa para obtener área de recintos más generales:

Sea $f$ una función continua en el intervalo $[a\,,b]$ y consideremos el recinto $\mathscr{R}$ que delimita su gráfica $y = f(x)$ con el eje de abscisas en dicho intervalo $[a\,,b]$.

El área del recinto viene dada por:

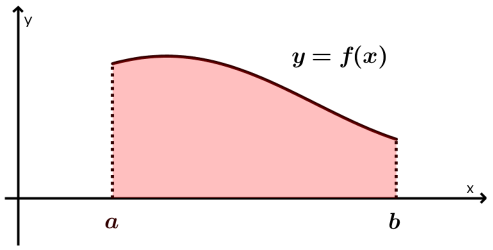
$$a(\mathscr{R}) = \int_a^b |f|$$




☞ Importante: observa que colocamos el valor absoluto, pues la integral definida proporciona el área directamente sólo si la gráfica está sobre el eje de abscisas (función positiva)

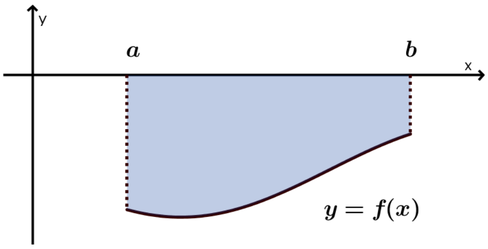
Podemos encontrarnos estos casos:

- Caso 1: $f \geq 0$ en $[a\,,b]$ (gráfica sobre el eje X)



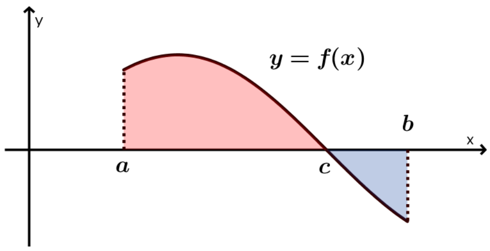

$$\int_a^b f = A \geq 0 \to a(\mathscr{R}) = A$$

- Caso 2: $f \leq 0$ en $[a\,,b]$ (gráfica bajo el eje X)




$$\int_a^b f = -A \leq 0 \to a(\mathscr{R}) = A$$

- Caso 3: $f$ cambia de signo en $[a\,,b]$ (gráfica atravesando el eje X)




$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^c f = +A_1 \geq 0 \\ \displaystyle\int_c^b f = -A_2 \leq 0 \end{array}\right\} \to a(\mathscr{R}) = A_1 + A_2$$

# 4.Cálculo de área entre una curva y el eje X

En la práctica, para obtener el área delimitada por la gráfica $y = f(x)$ y el eje de abscisas entre $x = a$ y $x = b$, resolvemos la ecuación $f\,(x) = 0$

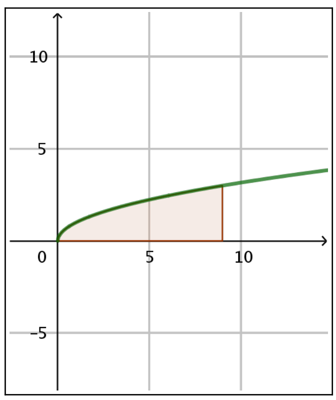
1. Si no hay ceros en el interior del intervalo, el área es:

$$\left|\int_a^b f\right|$$

2. Supongamos que los ceros en $[a\,,b]$ son $x = x_1\ \ldots\ x_n$. Calculamos:

$$\int_a^{x_1} f\ ,\ \int_{x_1}^{x_2} f\ \ldots\ \int_{x_n}^{b} f$$

Las áreas vienen dadas por los valores absolutos de esas integrales.

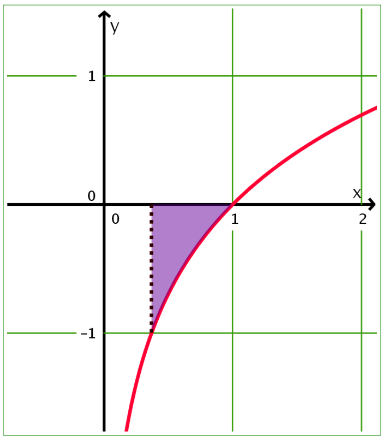



☞ Ejemplo 1: ¿cuál es el área del recinto $\mathscr{R}$ limitado por la parábola $y = \sqrt{x}$ y el eje **X** en el intervalo $[0\,,9]$?

Como $\sqrt{x} = 0 \to x = 0$ (sin ceros dentro del intervalo), sólo calculamos:

$$\int_0^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{x=0}^{x=9} = 18 - 0 = 18 \ \to a\,(\mathscr{R}) = 18\ \mathrm{u}^2$$

☞ Ejemplo 2: obtengamos el área del recinto $\mathscr{R}$ limitado por la gráfica de la función $f(x) = \ln(x)$ y el eje $OX$ entre $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ y $x = 1$.




Como $\ln x = 0 \rightarrow x = \mathrm{e}^0 = 1$, no hay ceros en el interior y por ello sólo calculamos (con la Regla de Barrow e integrando por partes):

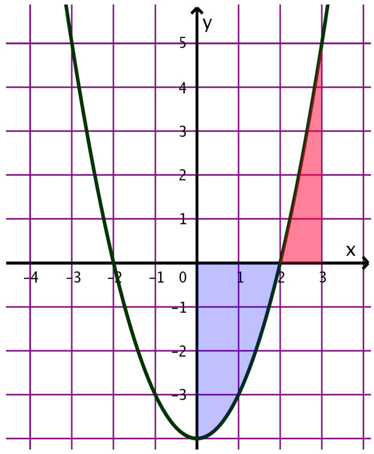
$$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x \cdot \ln(x) - x\Big]_{x=\frac{1}{\mathrm{e}}}^{x=1} = (-1) - \left(\frac{-2}{\mathrm{e}}\right) = \frac{2-\mathrm{e}}{\mathrm{e}} < 0$$

Tenemos $f \leq 0$ en el intervalo (ha dado el opuesto del área). Así que la integral no proporciona directamente el área.

Resulta, pues, que:

$$a(\mathscr{R}) = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}\ \mathrm{u}^2$$

☞ Ejemplo 3: obtengamos el área del recinto $\mathscr{R}$ limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4$ y el eje $X$ en el intervalo $[0\,,3]$.




Resolviendo:

$$f\,(x) = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

Deducimos que hay que calcular separadamente las siguientes integrales:

$$\int_0^2 \left(x^2-4\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{x=0}^{x=2} = \left(\frac{8}{3}-8\right) - (0) = -\frac{16}{3}$$

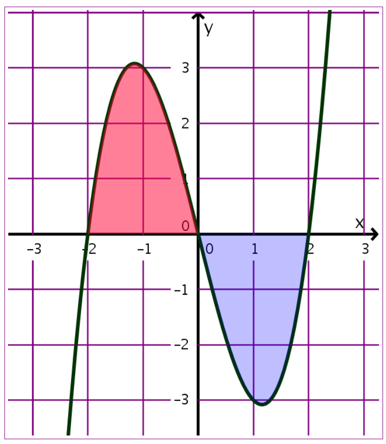
$$\int_2^3 \left(x^2-4\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{x=2}^{x=3} = (9-12) - \left(\frac{8}{3}-8\right) = \frac{7}{3}$$

Resulta, pues:

$$a(\mathscr{R}) = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}\mathrm{u}^2$$

En algunas ocasiones, no se indica el intervalo de integración. Se entiende que la curva y el eje de abscisas encierran un número finito de recintos acotados y que debemos hallar el área de la unión de todos ellos.

☞ Ejemplo 4: obtengamos el área del recinto $\mathscr{R}$ que encierra la curva $y = x^3 - 4x$ con el eje $X$.




Resolviendo:

$$f\,(x) = 0 \rightarrow x\left(x^2-4\right) = 0 \rightarrow x = 0\,, x = \pm 2$$

Deducimos que hay que calcular separadamente las siguientes integrales en los intervalos $[-2\,,0]$ y $[0\,,2]$.

$$\int_{-2}^{0} \left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{x=-2}^{x=0} = (0) - (4-8) = 4$$

$$\int_{0}^{2} \left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{x=0}^{x=2} = (4-8) - (0) = -4$$

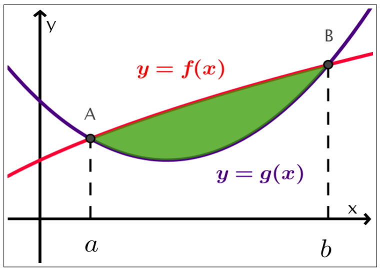
Resulta, pues, que el área pedida es:

$$a(\mathscr{R}) = A_1 + A_2 = 4 + 4 = 8\ \mathrm{u}^2$$

# 5.Área de recintos limitados por curvas

El área del recinto $\mathscr{R}$ delimitado por las gráficas de las funciones continuas $f$ y $g$ entre $x=a$ y $x=b$ viene dada por:

$$a(\mathscr{R})=\int_a^b |f-g|$$




Si, por ejemplo, las gráficas de las funciones continuas $f$ y $g$ se cortan para $x=a$ y $x=b$, el área del recinto comprendido entre ellas es igual a la integral de $f$ (la función superior) menos la integral de $g$ (función inferior):

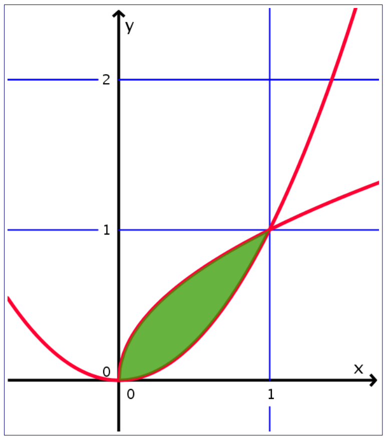
$$a(\mathscr{R})=\int_a^b f-\int_a^b g=\int_a^b (f-g)$$

Así, para calcular el área encerrada entre las gráficas $y=f(x)$ e $y=g(x)$:

1. Resolvemos la ecuación $f(x)=g(x)$. Supongamos que las soluciones, ordenadas de menor a mayor son $x=a$ , $x=b$ y $x=c$.
2. Calculamos las integrales
$$\int_a^b (f-g) \quad , \quad \int_b^c (f-g)$$
3. El área es la suma de los valores absolutos de esas integrales.

☞ Ejemplo 1: obtengamos el área del recinto delimitado entre las parábolas

$$y=x^2 \quad , \quad y=\sqrt{x}$$




Resolviendo

$$x^2=\sqrt{x}\rightarrow x^4=x\rightarrow x^4-x=0\rightarrow x=0\,,x=1$$

deducimos que sólo necesitamos calcular una integral:

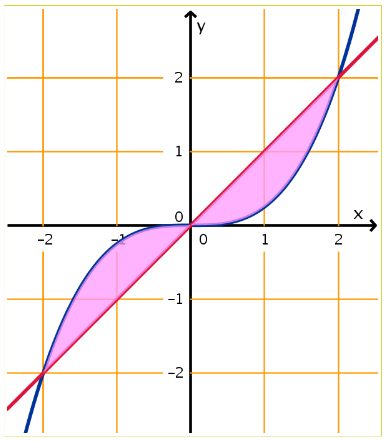
$$\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-(0)=\frac{1}{3}$$

Hemos restado correctamente la función inferior a la superior:

$$a(\mathscr{R})=\frac{1}{3}\ \mathrm{u}^2$$

☞ Ejemplo 2: obtengamos el área encerrada entre las curvas de ecuaciones

$$y=\frac{x^3}{4} \quad , \quad y=x$$




Veamos dónde se interceptan las curvas:

$$\frac{x^3}{4}=x\rightarrow x^3=4x\rightarrow x(x^2-4)=0\rightarrow x=-2\,,0\,,2$$

Hay que calcular dos integrales:

$$\int_{-2}^0\left(x-\frac{x^3}{4}\right)\mathrm{d}x=-1 \quad , \quad \int_0^2\left(x-\frac{x^3}{4}\right)\mathrm{d}x=+1$$

Es

$$a(\mathscr{R})=1+1=2\ \mathrm{u}^2$$

☞ <u>Ejemplo 3</u>: obtengamos $m > 0$ de forma que sea igual a 36 el área del recinto limitado por las gráficas

$$y = -x^2 + mx \quad , \quad y = -mx$$

Veamos dónde se interceptan la parábola y la recta:

$$-mx = -x^2 + mx \to x^2 - 2mx = 0 \to x(x - 2m) = 0 \to x = 0\,, 2m$$

Calculamos la integral de la diferencia entre esos valores:

$$\int_0^{2m} \left(-x^2 + 2mx\right)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3 + mx^2\right]_{x=0}^{x=2m} = \frac{4m^3}{3}$$

Como la parábola es cóncava, debe estar por encima de la recta en entre los puntos de corte.

Por ello hemos restado correctamente y la integral es positiva, coincidiendo con el área.

Igualando al área conocida obtendremos la respuesta

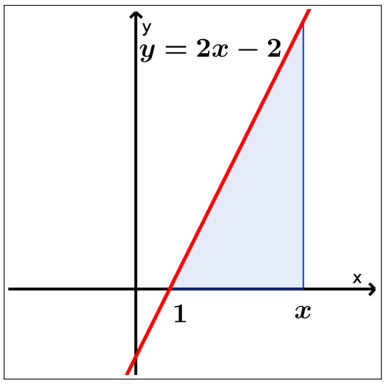
$$\frac{4m^3}{3} = 36 \to m^3 = 27 \to m = 3$$

# 6. Teorema Fundamental del Cálculo

La integral definida de una función es un número, como sabemos, relacionada con el área. Veamos un ejemplo:

Consideremos $f(x) = 2x - 2$. Vamos a calcular e interpretar su integral definida en el intervalo $[1\,, 3]$:

$$\int_1^3 f = \left[x^2 - 2x\right]_1^3 = 3 - (-1) = 4$$




Es un número que coincide con el valor del área del triángulo que determina la gráfica con el eje de abscisas ($A = 2 \cdot 4 \div 2 = 4$). Pero si en lugar de colocar como extremo superior el número $x = 3$ dejamos la variable $x$ :

$$\int_1^x f = \left[x^2 - 2x\right]_1^x = x^2 - 2x + 1$$

Obtenemos la fórmula de la función $F(x) = x^2 - 2x + 1$ (es una "función área"). ¿Cuál es su derivada? Pues es muy sencillo:

$$F'(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)' = f(x)$$

Esto pasa con cualquier función continua que integremos y la propiedad se denomina "Teorema Fundamental del Cálculo":

Sea $f$ una función continua en un intervalo $I$ y fijemos $a \in I$. Si definimos

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad ,(x \in I)$$

tenemos entonces que $F$ es una función derivable con

$$F' = f$$

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la función integral F es una primitiva de f.

☞ <u>Ejemplo</u>: para obtener la derivada de la función $F$ definida por

$$F(x) = \int_1^x \ln\left(1 + t^4\right)\,\mathrm{d}t$$

Observemos que también se cumple:

$$F(1) = 0$$

no es preciso calcular la integral. Por el T.F.C. es:

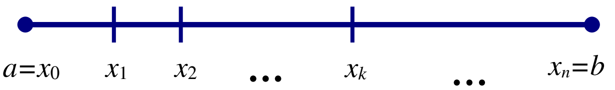
$$F'(x) = \ln(1 + x^4)$$

# 7. Ampliación: Sumas de Riemann.

## ❑ Concepto

Consideremos una función $y = f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a\,,b]$. Vamos a ver qué son las denominadas "sumas de Riemann".

a) Hacemos una partición $P$ del intervalo, que es dividir el intervalo en $n$ trozos, que no tienen que ser de igual longitud:




b) Hallemos ahora el valor mínimo y máximo de $y = f(x)$ en cada uno de los sub–intervalos de la partición. Llamaremos

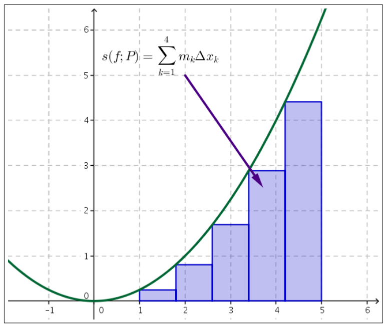
$m_k$ al valor mínimo de $y = f(x)$ en $x_{k-1}\,, x_k]$

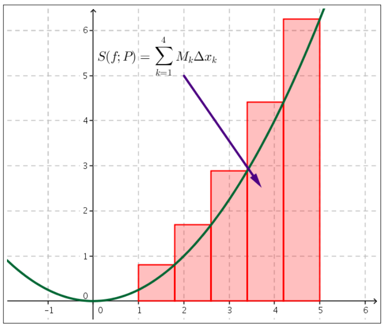
$M_k$ al valor máximo de $y = f(x)$ en $x_{k-1}\,, x_k]$.

c) Las sumas inferior y superior de Riemann de $f$ para la partición $P$ son los números definidos, respectivamente por:

$$s\,(f\,;P) = m_1 \cdot (x_1 - x_0) + \cdots + m_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

$$S\,(f\,;P) = M_1 \cdot (x_1 - x_0) + \cdots + M_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$





Para ilustrar todo esto se han representado las sumas inferior y superior de Riemann de $f(x) = 0,25x^2$ en el intervalo $[1\,,5]$, correspondientes a la partición en cinco partes iguales de dicho intervalo.

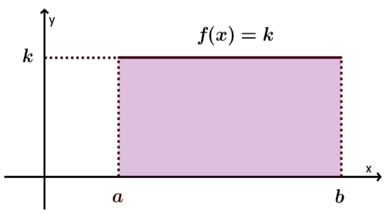
Observemos que la suma inferior aproxima por defecto el área de la región situada bajo la curva en el intervalo, mientras que la suma superior la aproxima por exceso.

Las sumas de Riemann tienen la siguiente propiedad fundamental:

> Si $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a\,,b]$, entonces existe un único número real $I$ que para todas las particiones $P$ de $[a\,,b]$ verifica:
>
> $$s\,(f\,;P) \le I \le S\,(f\,;P)$$
>
> Y dicho número es la integral definida de $f$ en el intervalo:
>
> $$I = \int_a^b f$$

☞ Ejemplo: si es $f\,(x) = k$ para todo valor $x$ del intervalo $[a\,,b]$, entonces todas las sumas inferiores y superiores de Riemann coinciden:

$$s\,(f\,;P) = S\,(f\,;P) = k \cdot (b - a)$$




Todo esto concuerda con la fórmula del área de un rectángulo y con

$$\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k \cdot (b - a)$$

## Ejercicios

**1.** [S/08] Dadas las funciones $f\,, g : [0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f$ y $g$.

**2.** [S/08] Sea $g : (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$g(x) = \ln x$$

a) Justifica que la recta de ecuación $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x$ es la recta tangente a la gráfica de $g$ en el punto de abscisa $x = \mathrm{e}$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $g$, el eje de abscisas y la recta tangente del apartado anterior.

**3.** [S/08] Dada la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = 2x + |x^2 - 1|$$

a) Esboza la gráfica de $g$.

b) Calcula $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}\,x$

**4.** [S/08] Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 - 1 \quad , \quad g(x) = 2x + 2$$

a) Esboza las gráficas de $f$ y $g$.

b) Halla el área del recinto limitado por las gráficas.

**5.** [S/08] Calcula

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2 - x)(x-1)}$$

**6.** [S/08] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$$

a) Justifica que la recta de ecuación $y = -2\,\mathrm{e}\,x$ es la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = -1/2$.

b) Calcula el área el recinto limitado por la gráfica de $f$, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.

**7.** [S/08] Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad g(x) = 3x - 6$$

a) Determina los puntos de corte de sus gráficas.

b) Halla el área del recinto limitado por las gráficas.

**8.** [S/08] Calcula

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x+1)\,\mathrm{d}\,x$$

**9.** [S/08] Sean $f\,, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = a$$

donde es $a > 0$. Se sabe que el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones $\dfrac{4}{3}$. Calcula el valor de la constante $a$.

**10.** [S/08] Calcula

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$$

**11.** [S/08] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot |x| & \text{si} \quad x \le 2 \\ 6 - x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Esboza su gráfica.

b) Calcula el área comprendida entre la gráfica de $f$ y el eje de abscisas.

**12.** [S/08] Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$$

a) Esboza su gráfica.

b) Determina la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 2$.

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $g$ y el eje de abscisas

**13.** [S/09] Considerar las funciones $f\,, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = |x| \quad , \quad g(x) = 6 - x^2$$

a) Esboza el recinto limitado por sus gráficas

b) Calcula el área de dicho recinto.

**14.**[S/09] La recta tangente a la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=mx^2+nx-3$$

en el punto $(1\,,-6)$, es paralela a la recta $y=-x$.

a) [1,25] Determina las constantes $m$ y $n$. Halla la ecuación de dicha recta tangente

b) [1,25] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, la recta tangente anterior y el eje de ordenadas.

**15.**[S/09] La curva

$$y=\frac{1}{2}x^2$$

divide en dos recintos el rectángulo de vértices

$$A=(0\,,0)\,,\ B=(2\,,0)\,,\ C=(2\,,1)\,,\ D=(0\,,1)$$

a) Dibujar dichos recintos

b) Hallar el área de cada uno de ellos

**16.**[S/09] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x|x-1|$$

a) Esboza su gráfica.

b) Comprueba que la recta de ecuación $y=x$ es la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x=0$.

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f$ y la de dicha tangente.

**17.**[S/09] Considera la curva de ecuación

$$y=x^3-3x$$

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x=-1$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la curva dada y la recta $y=2$.

**18.**[S/09] Sea $f:(0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=1+\ln x$$

a) [1] Comprueba que la recta de ecuación $y=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=e$.

b) [1,5] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f$ , el eje de abscisa y la recta tangente del apartado a)

**19.**[S/09+15] Sean $f:[0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x)=\sqrt{3x}\quad,\quad g(x)=\frac{1}{3}x^2$$

a) Haz un esbozo de sus gráficas

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráficas de ambas funciones.

**20.**[S/09] Sean $f\,,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x)=-x^2+1\quad,\quad g(x)=x-1$$

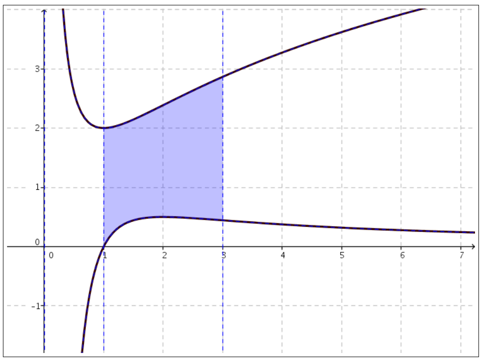
Calcula el área el recinto limitado por sus gráficas

**21.**[S/09] Las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f:(0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{2}{x}+2\ln x$$

y a la de su derivada $f':(0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$.

a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de $f$ y cuál la de $f'$.



b) Calcula el área de la región sombreada

**22.**[S/09] Considera las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=x^2+x\quad,\quad g(x)=2$$

a) Determina los puntos de corte de las graficas de $f$ y $g$. Esboza dichas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por dichas graficas

**23.**[S/09] Calcula un número positivo $a$, menor que $4$, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y=x^2$ y las dos rectas de ecuaciones $y=4$ e $y=a$, tenga un área de $\dfrac{28}{3}$ unidades cuadradas.

**24.**[S/10] Calcula el valor de $a > 0$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ vale 36 unidades cuadradas

**25.**[S/10] Calcula

$$\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen} \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$$

Sugerencia: Efectúa el cambio $\sqrt{x} = t$ .

**26.**[S/10] Considera la función $f$ dada por $f(x) = 5 - x$ y la función $g$ definida como $g(x) = \dfrac{4}{x}$ para $x \neq 0$

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de $f$ y $g$ indicando sus puntos de corte.

b) Calcula el área de dicho recinto.

**27.**[S/10] Dada la función $f$ definida por

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 5x + 4} \text{ si } x \neq 1 \text{ , } x \neq 4$$

Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f$ , el eje de abscisas, y las rectas $x = 2$ , $x = 3$ .

**28.**[S/10] Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x\,|2 - x|$$

a) Esboza su gráfica.

b) Obtén el área del recinto limitado por esa gráfica, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x = 3$ .

**29.**[S/10] Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 2 - x^2 \quad , \quad g(x) = |x|$$

a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f$ y $g$ .

**30.**[S/10] Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \ln x$$

a) Comprueba que la recta de ecuación $y = -\mathrm{e}x + 1 + \mathrm{e}^2$ es la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = \mathrm{e}$ .

b) Halla el área de la región limitada por la gráfica de $f$ , el eje de abscisas y dicha recta normal.

**31.**[S/10] Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 + 4$$

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 1$ .

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de $f$ , el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y = 2x + 3$ . Calcula su área.

**32.**[S/10] Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ y } g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

a) Esboza las gráficas de $f$ y $g$ , y halla su punto de corte.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y el eje de ordenadas.

**33.**[S/11] Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 6x - x^2 \text{ y } g(x) = x^2 - 2x$$

a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f$ y $g$ .

**34.**[S/11] Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = -2$ .

b) Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x + 5$ . Calcula el área de este recinto.

**35.**[S/11] Calcula el valor de $b > 0$ , sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = bx$ es de 3 unidades cuadradas.

**36.**[S/11] Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = 4 - 3\,|x| \qquad g(x) = x^2$$

a) Esboza sus gráficas y halla sus puntos de corte.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f$ y $g$ .

**37.**[S/11] Calcula:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

**38.**[S/11] Calcula un número $a$, positivo y menor que $2$, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y=\dfrac{1}{2}x^2$ y las dos rectas horizontales de ecuaciones $y=a$ e $y=2$, tenga un área de $\dfrac{14}{3}$ unidades cuadradas.

**39.**[S/11] Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-2x^2+3x-1$, se pide:

a) Prueba que las rectas $y=-x+1$ e $y=3x-1$ son tangentes a su gráfica.

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de $f$ y las rectas mencionadas en el apartado anterior.

**40.**[S/11] Sea la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x+1)$.

a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de $f$, el eje $OY$ y la recta $y=1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.

b) Halla el área del recinto anterior.

**41.**[S/12] Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\operatorname{sen}(x) \text{ y } g(x)=\cos(x)$$

a) Realiza un esbozo de las gráficas de $f$ y $g$ en el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas $x=0$ y $x=\dfrac{\pi}{2}$

**42.**[S/12] Sea $f$ una función continua en el intervalo $[2,3]$ y $F$ una función primitiva de $f$ tal que $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcula:

a) $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_2^3 (5f(x)-7)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

**43.**[S/12] Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-4x$.

a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de $f$ y la recta $y=-x-2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.

b) Calcula el área del recinto anterior.

**44.**[S/12] Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x)=x^2-2x \qquad g(x)=-x^2+4x$$

a) Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.

b) Calcula el área de dicho recinto.

**45.**[S/12] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\frac{9-x^2}{4}$$

Esboza el recinto limitado por la gráfica de $f$, la recta $x+2y=5$ y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

**46.**[S/12] Sea $f$ una función definida por

$$f(x)=\frac{2}{x^2-1} \text{ si } x\neq 1,\, x\neq -1$$

a) Halla una primitiva de $f$.

b) Calcula el valor de $k$ para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de $f$ en el intervalo $[2,k]$ sea $\ln(2)$.

**47.**[S/12] Calcula los valores de $a$ y $b$ sabiendo que la función $f:(0+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=ax^2+b\ln(x)$$

tiene un extremo relativo en $x=1$ y que

$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=27-8\ln(4)$$

**48.**[S/12] Sean las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\frac{x^2}{4} \quad , \quad g(x)=2\sqrt{x}$$

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de $f$ y $g$. Realiza un esbozo del recinto que limitan.

b) Calcula el área de dicho recinto.

**49.**[S/12] Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las líneas

$$y = 4x \quad , \quad y = 8 - 4x \quad , \quad y = 2x - x^2$$

a) Realiza un esbozo de dicho recinto.

b) Calcula su área.

**50.**[S/13] Considera las funciones f y g definidas por

$$f(x) = 2 - x \quad , \quad g(x) = \frac{2}{x+1} \ (x \neq -1)$$

a) Calcula los puntos de corte entre sus gráficas.

b) Esboza en los mismos ejes las gráficas de f y g.

c) Halla el área del recinto limitado por éstas.

**51.**[S/13] Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = -x^2 + 6x - 5$$

a) [0,75] Halla la ecuación de la recta normal a su gráfica en el punto de abscisa $x = 4$.

b) [1,75] Esboza el recinto limitado por la gráfica de $g$ y la recta $x - 2y + 2 = 0$. Calcula el área de este recinto.

**52.**[S/13+15] Sea $g : (0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = |\ln(x)|$$

a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de $g$ y la recta $y = 1$. Calcula sus puntos de corte.

b) Calcula el área del recinto anterior.

**53.**[S/14] Sean $f\,, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas respectivamente por

$$f(x) = \frac{|x|}{2} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

a) Esboza las gráficas de $f$ y $g$ sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f$ y $g$.

**54.**[S/14] Considera el recinto limitado por las curvas

$$y = x^2 \quad , \quad y = 2 - x^2 \quad , \quad y = 4$$

a) Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.

b) Calcula el área del recinto.

**55.** [S/14] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de $f$, la recta $2x + y - 7 = 0$ y el eje $OX$, calculando los puntos de corte.

c) Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

**56.** [S/14] De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

a) Halla, si existe, el punto de la gráfica de $f$ en el que la recta tangente es $y = 3 - x$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f$ y la recta del apartado anterior.

**57.**[S/15] Sea $g$ la función definida por

$$g\,(x) = \ln x \quad ,, \quad x > 0$$

Calcula el valor de $a > 1$ para el que el área del recinto limitado por la gráfica de $g$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ es $1$.

**58.**[S/15] Calcula:

$$\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$

**59.**[S/15] De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f\,(x) = |x^2 - 4|$$

a) [0,75] Haz un esbozo de la gráfica de $f$.

b) [1,75] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f$ y la recta $y = 5$.

**60.**[S/15] Calcula el valor de $a > 1$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = -x^2 + ax$ y la recta $y = x$ es $\dfrac{4}{3}$ .

## Cuestiones

**1.** ¿Para qué funciones se tiene que toda suma de Riemann inferior es igual a toda suma superior?

**2.** El área del recinto situado bajo la curva de ecuación $y = f(x)$ en el intervalo $[a\,,b]$, ¿es siempre igual a la integral de la función en dicho intervalo?

**3.** Dos funciones son opuestas en el intervalo $[a\,,b]$. ¿Qué relación hay entre sus integrales definidas en dicho intervalo?

**4.** Se consideran las funciones

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad , \quad g(x) = |\operatorname{sen} x|$$

a) Dibújalas en el intervalo $[0\,,2\pi]$.

b) Los recintos que delimitan sus gráficas con el eje de abscisas, ¿tienen igual área?

c) Las integrales definidas de las funciones en ese intervalo, ¿son iguales?

**5.** Razona las siguientes cuestiones:

a) ¿Puede ser el área de un recinto un número negativo?

b) ¿Puede ser negativa una integral definida?

**6.** Sea $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

¿Podemos deducir que es $f(x) = 0$ para todo $x$ del intervalo $[a\,,b]$?

**7.** La función continua $g : [1\,,5] \to \mathbb{R}$ verifica

$$\int_1^2 g = 4 \quad \text{y} \quad \int_1^5 g = 7$$

deduce el valor de

$$\int_2^5 g$$

**8.** Sabiendo que

$$\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^5 g\,\mathrm{d}x = \int_1^3 f\,\mathrm{d}x = \int_3^5 g\,\mathrm{d}x = 3$$

calcula

$$\int_3^5 \big(f(x) + 3g(x)\big)\,\mathrm{d}x - \int_1^3 \big(3f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

**9.** Demuestra que

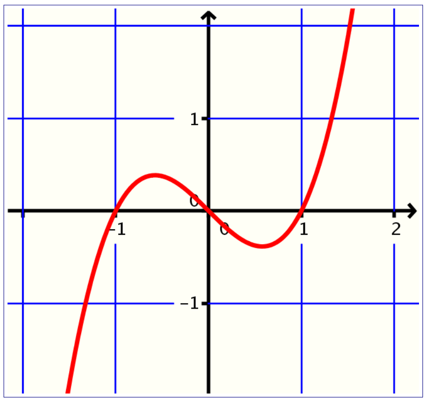
$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^4 x\,\mathrm{d}x \le 2\pi$$

Sugerencia: el seno está acotado entre $-1$ y $1$ .

**10.** El área de la región encerrada por $y = x^3 - x$ y el eje $OX$ no se puede calcular mediante la integral

$$\int_{-1}^{1} \left(x^3 - x\right)\mathrm{d}x$$

Explica por qué, y cómo se ha de proceder, siendo:




**11.** Representa la gráfica de la función

$$y = |x+1|$$

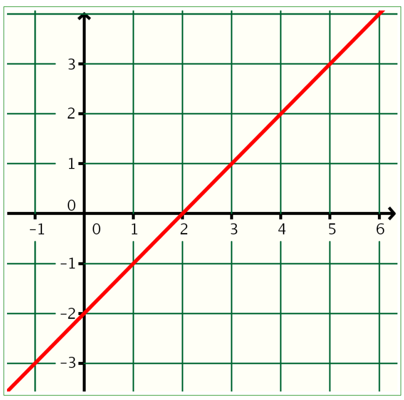
y deduce geométricamente el valor de

$$\int_{-2}^{2} |x+1|\,\mathrm{d}x$$

**12.** Sin usar el Cálculo de Primitivas, deduce geométricamente el valor de

$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$$

siendo la gráfica de $f$ la siguiente:



**13.** Comprueba que es

$$\int_0^2 |2x-1|\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$$

**14.** Sin usar el cálculo de primitivas, deduce que es

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = 0$

b) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9\pi}{2}$

**15.** Dada la función

$$f(x) = |x^2 + x - 2|$$

a) Esboza su gráfica.

b) Halla el área del recinto acotado que determina esa gráfica y el eje $OX$.

c) Obtén

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

**16.** Calcula

$$\int_0^4 x \cdot |x-2|\,\mathrm{d}x$$

**17.** Calcula la derivada de la función

$$F(x) = \int_0^x \cos u\,\mathrm{d}u$$

a) Obteniendo primero la expresión de $F$ y derivando después.

b) Sin calcular la integral, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo.

**18.** Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^x \frac{t-4}{(t^2+4)^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Estudia su monotonía y averigua para qué valores alcanza sus extremos.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ para $x = 0$.

**19.** Demuestra que es siempre creciente la función $f$ definida por

$$f(x) = \int_0^x \frac{3-\cos s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s$$

**20.** Calcula $f(0)$ si sabemos que es

$$\int_1^x f(u)\,\mathrm{d}u = x^3 - 2x^2 + 1$$

**21.** Si $f$ es continua y $u$ derivable, usando la Regla de la Cadena y el T.F.C. es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f[u(x)] \cdot u'(x)$$

Calcula la derivada de $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{1+\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

**22.** Si $u$ y $v$ son derivables en todo punto, obtén la expresión de la derivada de la función definida por:

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

**23.** Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,\mathrm{d}t$$

---

Integrales definidas

3 , 5 , 8 , 10 , 25 , 37 , 42*[TFC] , 58

Cálculo de área

11 , 12 , 27 , 28

Cálculo de área entre dos gráficas

1 , 4 , 7 , 13* , 16* , 17 , 19 , 20 , 21 , 22 , 26 , 29* , 33 , 36* , 41* , 43 , 44 , 48 , 50 , 51 , 52 , 53 , 56, 59

Área de un recinto

2 , 6 , 14 , 15 , 18 , 30 , 31 , 32 , 34 , 39 , 45 , 49 , 54 , 55

Cálculo de parámetros

9 , 23 , 24* , 35 , 38 , 46* , 47 , 57 , 60

## Autoevaluación

**1.** Consideremos la función $f:[0\,,2\pi]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=x\,\mathrm{sen}(x)$$

a) Calculo el área del recinto recinto limitado por la curva $y=f(x)$ con el eje de abscisas.

b) Razona si dicha área coincide o no con el valor de la integral

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

**2.** Sean las funciones $f\,,g:\mathbb{R}\;\to\;\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=|x(x-2)| \quad , \quad g(x)=x+4$$

a) Esboza las gráficas de $f$ y $g$ sobre los mismos ejes. Calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas.

**3.** Consideremos la función $f$ definida por

$$f(x)=\int_1^x \frac{t-3}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

a) Demuestra que $f$ tiene un mínimo absoluto para $x=3$.

b) Obtén la ecuación de su recta tangente para $x=1$
.

**4.** Esboza el recinto limitado por la gráfica de la parábola $y=-(x-2)^2-2$, la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x=3$, el semieje positivo de abscisas y el semieje negativo de ordenadas. Calcula su área.

**5.** Se quiere dividir la región encerrada entre la parábola $y=x^2$ y la recta $y=1$ en dos regiones de igual área mediante la recta $y=a$.

Halla el valor de $a$.

## Autoevaluación

**1.**

a) Resolvemos

$$x \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0 \,, x = \pi \,, x = 2\pi$$

Así que calculamos separadamente

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \quad , \quad \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Calculemos la primitiva de la función, lo haremos por partes:

$$\int x \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C$$

Aplicando ahora la Regla de Barrow a las dos integrales definidas anteriores:

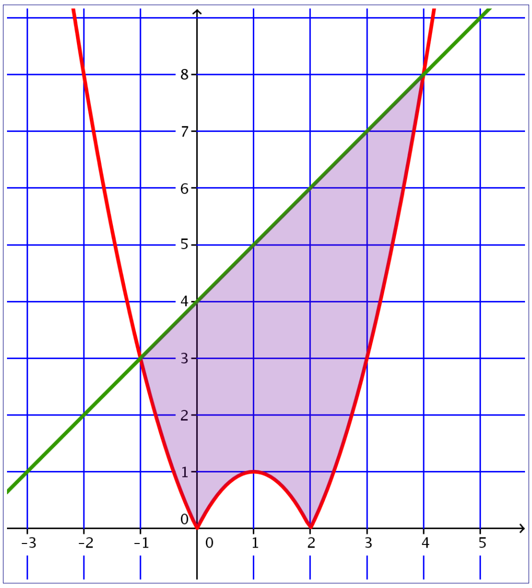
$$a\,(\mathscr{R}) = \pi + 3\pi = 4\pi$$

b) Como la función cambia de signo, la integral no proporciona el área, ya que contabiliza el área bajo el eje de abscisas como un número negativo. Concretamente:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi + (-3\pi) = -2\pi$$

**2.**

a) Las gráficas son:



En la gráfica apreciamos claramente los puntos de corte de ambas: para $x = -1$ y para $x = 4$.

Aún así veamos algebraicamente:

$x < 0$ o $x > 2 \rightarrow f(x) = x^2 - 2x$:

$$x^2 - 2x = x + 4 \rightarrow x = -1 \,, x = 4$$

$0 < x < 2 \rightarrow f(x) = -x^2 + 2x$:

$$-x^2 + 2x = x + 4 \rightarrow \text{no hay solución}$$

b) Para calcular el área, dividimos la zona en las tres correspondientes a los intervalos $[-1\,,0]$, $[0\,,2]$ y $[2\,,4]$:

$$a(\mathscr{R}_1) = \int_{-1}^{0} (-x^2 + 3x + 4)\,\mathrm{d}x = \frac{13}{6}$$

$$a(\mathscr{R}_2) = \int_{0}^{2} (x^2 - x + 4)\,\mathrm{d}x = \frac{26}{3}$$

$$a(\mathscr{R}_3) = \int_{2}^{4} (-x^2 + 3x + 4)\,\mathrm{d}x = \frac{22}{3}$$

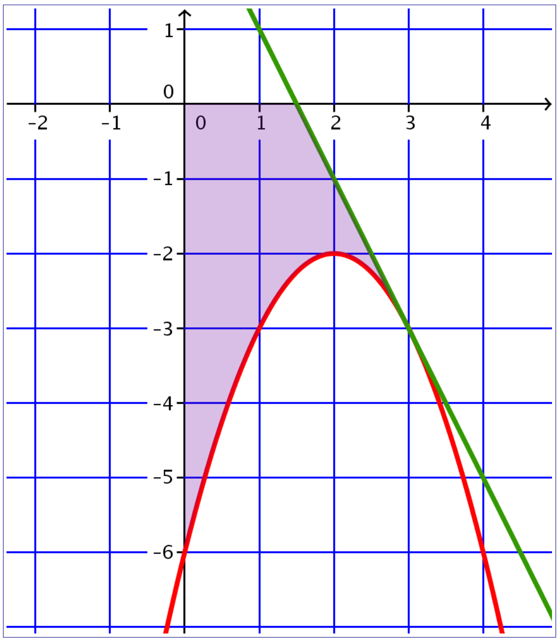
Sumando:

$$a(\mathscr{R}) = \frac{13}{6} + \frac{26}{3} + \frac{22}{3} = \frac{109}{6}$$

**3.** Antes de dibujar el recinto, obtengamos la recta tangente de la que habla el enunciado:

$$y - f(3) = f'(3)(x-3) \;\rightarrow\; y = -2x + 3$$

El gráfico es:



Vemos que en el intervalo $\left[0\,,\frac{3}{2}\right]$ tenemos el área situada entre la parábola y el eje de abscisas, mientras que en $\left[\frac{3}{2}\,,3\right]$ el área es la delimitada entre la tangente (superior) y la parábola (inferior). Así:

$$a(\mathscr{R}_1) = -\int_0^{\frac{3}{2}} (-x^2+4x-6)\,\mathrm{d}x = \frac{45}{8}$$

$$a(\mathscr{R}_2) = \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left(x^2-6x+9\right)\mathrm{d}x = \frac{9}{8}$$

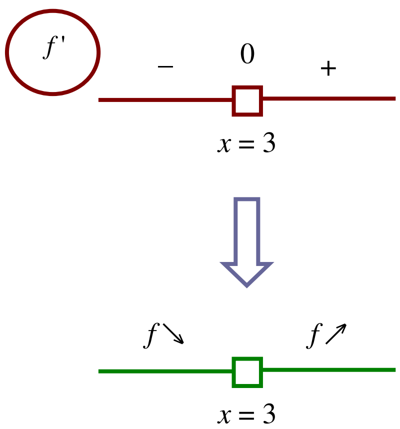
Sumando:

$$a(\mathscr{R}) = \frac{45}{8} + \frac{9}{8} = \frac{27}{4}$$

**4.** Observemos que el integrando es una función continua: es una fracción racional en la que el denominador es siempre positivo. Así aplicaremos el teorema Fundamental del Cálculo, que nos dice que la derivada de la función integral es el integrando:

$$f'(x) = \frac{x-3}{x^4+1}$$

a) El estudio de signo de la derivada es simple:




Deducimos que para $x=3$ hay un mínimo absoluto.

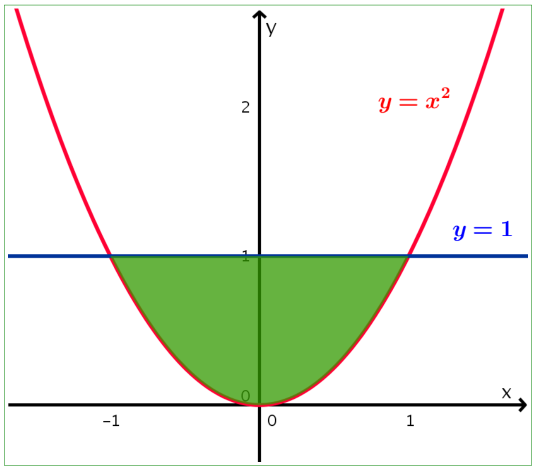
b) Observemos que $f(1)=0$ y $f'(1)=-1$. Luego:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \;\rightarrow\; y = -x+1$$

**5.** La gráfica es sencilla: se trata de la región delimitada por la parábola $y=x^2$ (convexa con vértice en el origen de coordenadas) y la recta horizontal $y=1$. Veamos los cortes:

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

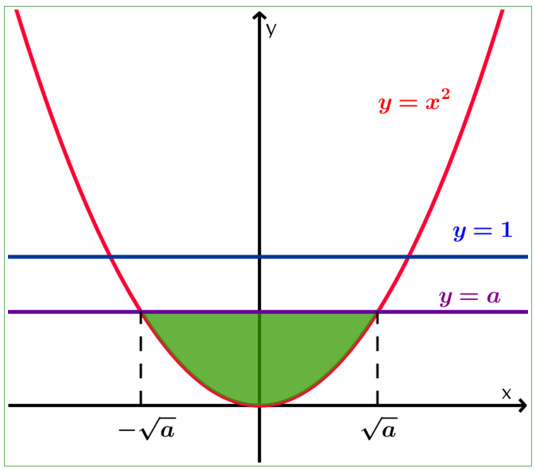
La región es:




Si queremos dividir esa región en dos partes de igual área, cada una de ellas medirá la mitad del total. Así que vamos a calcular ese total:

$$a(\mathscr{T}\,) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

El recinto delimitado por la recta horizontal $y=a$ y la parábola $y=x^2$ es el dibujado:




Observemos los puntos de corte :

$$x^2 = a \rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

El área limitada entre la recta $y=a$ y la parábola es:

$$a(\mathscr{M}) = -\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4a}{3}\sqrt{a}$$

Debe ser la mitad del total:

$$\frac{4a}{3}\sqrt{a} = \frac{2}{3} \rightarrow a\sqrt{a} = \frac{1}{2} \rightarrow a^3 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$