TEMA 3

CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Contenidos

1. Concepto de primitiva.
2. Integral indefinida. La notación de Leibnitz.
3. Propiedades lineales.
4. Integrales inmediatas.
5. Integrales de formas compuestas.
6. Integración por partes.
7. Integración de funciones racionales sencillas.
8. Integración por sustitución.

Tiempo estimado

12 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Comprender el concepto de primitiva de una función, y conocer la notación de Leibnitz .
2. Dadas dos funciones, mediante sus expresiones analíticas o mediante sus representaciones gráficas, saber reconocer si una es primitiva de la otra.
3. Dada una familia de primitivas, saber determinar una cuya gráfica pase por un punto dado.
4. Dada una familia de primitivas, saber determinar una cuya gráfica pase por un punto dado.
5. Saber aplicar correctamente la linealidad de la integración
6. Saber obtener primitivas de funciones elementales aplicando inversamente la regla de la cadena.
7. Conocer la técnica de integración por cambio de variable.
8. Conocer el método de integración por partes y saber aplicarlo reiteradamente.
9. Saber calcular integrales indefinidas de funciones racionales en las que las raíces del denominador son reales.

1.Concepto de primitiva.

Dada una función derivable F, mediante el proceso de derivación que hemos estudiado, se le puede asociar otra función f, que es su derivada:

$$F \xrightarrow{D} f$$

En este caso escribimos $F'(x) = f(x)$, para todos los valores x en los que la función F es derivable. Por ejemplo:

$$\begin{array}{lcl} F(x) = x^3 & \xrightarrow{D} & f(x) = 3x^2 \\ G(x) = \mathrm{e}^{2x} & \xrightarrow{D} & g(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} \end{array}$$

Busca tú primitivas de las siguientes funciones. Recuerda que has de encontrar una función F cuya derivada sea f:

- $f_1(x) = 1$
- $f_2(x) = \operatorname{sen} x$
- $f_3(x) = \cos(3x)$
- $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$

En ocasiones es preciso volver hacia atrás, considerar el problema recíproco: dada una función f buscar otra F con $F' = f$. Este proceso, que es el inverso a la derivación, se llama integración. Y a la función F se la llama primitiva de f. Veamos algunos ejemplos:

$$\begin{array}{lcl} f(x) = 2x & \xrightarrow{I} & F(x) = x^2 \\ g(x) = \cos x & \xrightarrow{I} & G(x) = \operatorname{sen} x \end{array}$$

Tenemos, así dos operaciones recíprocas:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "derivo"] & f \arrow[l, bend left, "integro"] \end{tikzcd}$$

El proceso por el que se pasa de:

$F(x) = x^2$ a $f(x) = 2x$ se llama derivación.

$f(x) = 2x$ a $F(x) = x^2$ se llama integración.

Por ejemplo, como $\mathcal{D} \arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$ podemos decir que:

- $F(x) = \arctan x$ es una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es la derivada de $F(x) = \arctan x$.

2.Integral indefinida. La notación de Leibnitz.

Es claro que una función continua tiene infinitas primitivas. Por ejemplo:

$$f(x) = \cos x \xrightarrow{integrando} \begin{cases} F_1(x) = \operatorname{sen} x + 1 \\ F_2(x) = \operatorname{sen} x + 3 \\ F_3(x) = \operatorname{sen} x - \dfrac{2}{3} \\ \quad \ldots \end{cases}$$

Todas las primitivas se diferencian sólo en una constante. Luego una primitiva cualquiera de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x + C$ donde C es un número fijo cualquiera.

Veamos la notación y el lenguaje usado:

Consideremos una función continua f definida en un intervalo I.

a) Una primitiva de f es una función F que cumpla $F' = f$ en I.

b) Al proceso por el que se obtiene F a partir de f se le llama integración.

c) Cualquier primitiva de $y = f(x)$ es de la forma $y = F(x) + C$ donde C es una constante cualquiera.

d) Esto se expresa simbólicamente con la notación de Leibnitz:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

y se dice que la integral indefinida de $y = f(x)$ es $y = F(x) + C$.

La notación que se usa para la integral indefinida fue la introducida por Leibnitz:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

El símbolo "diferencial de x" –dx– que aparece puede omitirse, aunque conviene acostumbrarse a él pues en ciertas circunstancias es muy útil.

☞ Ejemplo: $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$

3.Integrales inmediatas.

De las reglas de derivación que ya conocemos se deducen inmediatamente las siguientes primitivas. De ahí el nombre de "integrales inmediatas":

$$\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

Podemos comprobar todas estas integrales observando que al derivar el segundo miembro obtenemos el integrando.

Exponenciales de base cualquiera:

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = a^x \cdot \log_a e + C$$

☞ Ejemplo: Es:

$$\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Observa que decir

$$\int x^2\,\mathrm{dx} = \frac{1}{3}x^3 + C$$

es lo mismo que decir

$$D\left(\frac{1}{3}x^3\right) = x^2$$

4.Propiedades lineales.

Derivar una combinación lineal de funciones es muy sencillo:

$$\mathcal{D}(\alpha \cdot F + \beta \cdot G) = \alpha \cdot F' + \beta \cdot G'$$

De aquí se deduce para la integral:

$$\boxed{\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x}$$

La linealidad equivale a estas dos:

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

$$\int k \cdot f = k \cdot \int f$$

☞ Ejemplo:

$$\int \left(x^2 + 4\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x + 4\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + 4\mathrm{e}^x + C$$

☞ Ejemplo:

$$\int (3\mathrm{e}^x - 5\cos x)\,\mathrm{d}x = 3\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - 5\int \cos x\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^x - 5\,\mathrm{sen}\,x + C$$

☞ Ejemplo:

$$\int (3\,\mathrm{sen}\,x + 2\cos x)\,\mathrm{d}x = -3\cos x + 2\,\mathrm{sen}\,x + C$$

☞ Ejemplo: para $x > 0$ es

$$\int \frac{2x^2 + 3x + 1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \left(2x + 3 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = x^2 + 3x + \ln x + C$$

5.Integrales de formas compuestas.

Con lo visto hasta el momento podemos obtener las primitivas de las funciones anteriores y de sus combinaciones lineales.

De la aplicación de la regla de la cadena para derivar funciones compuestas podemos obtener un procedimiento para obtener primitivas de más funciones. Por ejemplo:

$$\mathscr{D}\,\mathrm{sen}\left(x^3\right) = \cos\left(x^3\right) \cdot 3x^2 \;\rightarrow\; \int 3x^2 \cos\left(x^3\right)\mathrm{d}x = \mathrm{sen}\left(x^3\right) + C$$

En general:

$$\mathscr{D}\,\mathrm{sen}\,u(x) = \cos u(x) \cdot u'(x) \;\rightarrow\; \int u'(x)\cos u(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{sen}\,u(x) + C$$

Observa que la primitiva se deduce de la derivada de una composición.

Esta es la que se denomina forma compuesta de la integral del coseno. Veamos otro ejemplo:

$$\mathscr{D}\mathrm{e}^{\mathrm{sen}\,x} = \mathrm{e}^{\mathrm{sen}\,x} \cdot \cos x \;\rightarrow\; \int \cos x\,\mathrm{e}^{\mathrm{sen}\,x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mathrm{sen}\,x} + C$$

Aquí tenemos una tabla de las formas compuestas inmediatas.

$$\int u'(x)\,u(x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}u(x)^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|u(x)| + C$$

$$\int u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{u(x)} + C$$

$$\int u'(x)\,\cos u(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} u(x) + C$$

$$\int u'(x)\,\operatorname{sen} u(x)\,\mathrm{d}x = -\cos u(x) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}\,\mathrm{d}x = \tan u(x) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2 u(x)}\,\mathrm{d}x = -\cot u(x) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsen} u(x) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}\,\mathrm{d}x = \arctan u(x) + C$$

Se deducen inmediatamente de la regla de la cadena.

Para comprobar las integrales, derivamos el segundo miembro y obtendremos los integrandos

☞ Ejemplo: veamos algunas formas exponenciales

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\,\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1} + C$$

$$\int x^2\mathrm{e}^{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3x^2\,\mathrm{e}^{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+1} + C$$

$$\int \mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int 5\,\mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} + C$$

¿Eres capaz de encontrar la función argumento u?

☞ Ejemplo: vemos algunas formas de tipo seno y coseno

$$\int x^2\cos x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3x^2\cos x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\operatorname{sen} x^3 + C$$

$$\int \mathrm{e}^x\operatorname{sen}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\cos\mathrm{e}^x + C$$

$$\int x\cos(x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2-1) + C$$

$$\int \operatorname{sen}(4x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4\operatorname{sen}(4x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos(4x) + C$$

☞ Ejemplo: vemos algunas formas de tipo logarítmico

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(\mathrm{e}^x+1)+C$$

$$\int \frac{x^3}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)+C$$

$$\int \frac{3x^2+2x-1}{x^3+x^2-x-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x^3+x^2-x-1|+C$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$$

☞ Ejemplo: vemos algunas formas de tipo potencial

$$\int x\left(x^2-1\right)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\left(x^2-1\right)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(x^2-1\right)^4+C$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x+C$$

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,\mathrm{d}x = \int (\ln x)^3\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\ln x)^4+C$$

☞ Ejemplo: vemos algunas formas de tipo arco–seno

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}(3x)+C$$

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x} = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-(\mathrm{e}^x)^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsen}\left(\mathrm{e}^x\right)+C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(x^2\right)+C$$

☞ Ejemplo: vemos algunas formas de tipo arco–tangente

$$\int \frac{1}{1+(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x+2)+C$$

$$\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x = \arctan(\operatorname{sen} x)+C$$

$$\int \frac{1}{1+25x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{5}{1+(5x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\arctan(5x)+C$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\arctan\left(x^3\right)+C$$

☞ Ejemplo: vemos algunas formas de tipo tangente–cotangente

$$\int \frac{1}{\cos^2(5x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{5}{\cos^2(5x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\tan(5x)+C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x+1)}\,\mathrm{d}x = -\cot(x+1)+C$$

6.Integración por partes.

Debemos tener en cuenta que no todas las primitivas pueden obtenerse con las formas compuestas de las funciones básicas. Observemos, por ejemplo, las dos integrales siguientes, que son muy diferentes:

$$I_1 = \int x \cdot \cos x^2 \, \mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x$$

La primera integral es una forma compuesta, ya que el integrando se obtiene de la simple aplicación de la Regla de la Cadena. Pero no así la segunda, pues proviene de la derivada de un producto.

Como la derivada de un producto no es el producto de las derivadas, esa segunda integral no es $I = \dfrac{x^2}{2} \cdot \operatorname{sen} x + C$. ¿Cómo calcular esa integral?

Para obtenerla se emplea el denominado "método de integración por partes":

Si f y g son derivables con derivadas continuas, es

$$\int (f \cdot g) = f \cdot G - \int (f' \cdot G)$$

donde $G' = g$.

Expresión clásica, con la notación de Leibniz:

$$\int u \, \mathrm{d}v = u \cdot v - \int v \, \mathrm{d}u$$

☞ Demostración:

Como	$(f \cdot G)' = f' \cdot G + f \cdot g$
Es	$f \cdot g = (f \cdot G)' - f' \cdot G$
Integrando:	$\int (f \cdot g) = \int (f \cdot G)' - \int (f' \cdot G)$
De ahí	$\int (f \cdot g) = f \cdot G - \int (f' \cdot G)$ *c.q.d.*

☞ Notas:

En el método se intenta reducir el cálculo de la primitiva de $f \cdot g$ al de la primitiva de $f' \cdot G$, con la esperanza que este cálculo sea más sencillo.

☞ Ejemplo: obtengamos $I = \int x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x$

Elegimos $\left\{ \begin{array}{lcl} f(x) = x & \xrightarrow{D} & f'(x) = 1 \\ g(x) = \cos x & \xrightarrow{\int} & G(x) = \operatorname{sen} x \end{array} \right.$

Elegir bien cuál es la parte que se debe derivar y cuál es la parte que se debe integrar es cuestión de práctica. Si vemos que la integral que aparece es más complicada, cambiaremos la elección.

Así, tenemos:

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, \mathrm{d}x &= x \cdot \operatorname{sen} x - \int 1 \cdot \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \\ &= x \cdot \operatorname{sen} x - (-\cos x) + C = x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x + C \end{aligned}$$

☞ Ejemplo: obtengamos $I = \int x^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} \int x^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x &= x^2 \mathrm{e}^x - \int 2x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \\ &= x^2 \mathrm{e}^x - \left(2x \, \mathrm{e}^x - \int 2 \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \right) = \\ &= x^2 \mathrm{e}^x - 2x \, \mathrm{e}^x + 2 \, \mathrm{e}^x + C \end{aligned}$$

Este caso es un ejemplo de integración por partes reiterada: aplicamos la integración por partes y a la integral obtenida volvemos a aplicarle la integración por partes.

☞ Ejemplo: obtengamos $I = \int \mathrm{e}^{2x} \cos x \, \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} I &= \int \mathrm{e}^{2x} \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen} x - \int 2 \, \mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \\ &= \mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen} x - \left[2 \, \mathrm{e}^{2x} (-\cos x) - \int 4 \, \mathrm{e}^{2x} (-\cos x) \, \mathrm{d}x \right] = \\ &= \mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen} x + 2 \, \mathrm{e}^{2x} \cos x - 4I \end{aligned}$$

Este caso vuelve a aparecer de nuevo la integral que se intenta obtener. Despejamos la integral, como si de una ecuación se tratase

Hemos obtenido

$$I = \mathrm{e}^{2x} (\operatorname{sen} x + 2 \cos x) - 4I$$

Despejando

$$I = \frac{1}{5} \mathrm{e}^{2x} (\operatorname{sen} x + 2 \cos x) + C$$

☞ Ejemplo: obtengamos $I = \int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x$.

Elegimos $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x(-\cos x) - \int \cos x(-\cos x) \, \mathrm{d}x = \\ &= -\operatorname{sen} x \cos x + \int (\cos x)^2 \mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, \mathrm{d}x \\ &= -\operatorname{sen} x \cos x + x - I \end{aligned}$$

Observemos que hemos usado la fórmula

$$\begin{gathered} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \downarrow \\ \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \end{gathered}$$

para volver a obtener la integral original.

Intenta hallar, de la misma forma

$$\int \cos^2 \mathrm{x} \, \mathrm{dx}$$

Hemos obtenido

$$I = -\operatorname{sen} x \cos x + x - I$$

Despejando

$$I = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{2} x + C$$

☞ Ejemplo: obtengamos $I = \int \ln x \, \mathrm{d}x$

Truco: elegimos $f(x) = \ln x$ y $g(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \int \ln x \, \mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \\ &= x \cdot \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - x + C \end{aligned}$$

Las integrales de ciertas funciones se obtienen integrando por partes considerando la unidad como uno de los factores

$$\int \mathrm{f} = \int (1 \cdot \mathrm{f})$$

Así se halla, por ejemplo, la integral del logaritmo, del arco seno o del arco tangente.

7.Integración de funciones racionales.

Se trata de calcular la integral de funciones racionales, esto es, de la forma

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

donde p y q son polinomios.

Lo primero que haremos para calcular la primitiva de una función racional es intentar que el grado del numerador sea menor que el del denominador.

Si eso no fuese así dividiremos el numerador entre el denominador, así:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} c(x) & r(x) \end{array} \quad \longrightarrow p(x) = q(x)\cdot c(x) + r(x) \quad \longrightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

❑ Fracciones simples

Son de la forma

$$I = \int \frac{a}{mx+n}\,\mathrm{d}x$$

A este tipo de funciones racionales se las denomina "fracciones simples".

Se trata de integrales de tipo logarítmico:

$$I = \frac{a}{m}\int \frac{m}{mx+n}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{m}\ln|mx+n| + C$$

☞ Ejemplo: obtengamos $I = \displaystyle\int \frac{5}{2x-1}\,\mathrm{d}x$

$$I = \frac{5}{2}\int \frac{2}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\ln|2x-1| + C$$

☞ Ejemplo: obtengamos $I = \displaystyle\int \frac{x^3+1}{x-1}\,\mathrm{d}x$

Dividiendo.

$$\left(x^3+1\right) : (x-1) \;\rightarrow\; \begin{cases} c(x) = x^2+x+1 \\ r(x) = 2 \end{cases}$$

Luego:

$$\frac{x^3+1}{x-1} = x^2+x+1+\frac{2}{x-1}$$

Ahora integramos la descomposición:

$$I = \int \left(x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|+C$$

❑ Fracciones sencillas

Se intentará expresar el cociente como una suma de fracciones simples. Lo veremos a través de un ejemplo.

Intentemos obtener $\quad I = \displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x$

Observemos que el denominador puede factorizarse de la siguiente forma:

$$x^2 - 2x = x(x-2)$$

Así, intentaremos la siguiente descomposición:

$$\frac{x+1}{x^2-2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} \qquad (*)$$

De ahí, que deba ser:

$$\frac{x+1}{x^2-2x} = \frac{a(x-2)+bx}{x(x-2)}$$

Como tienen el mismo denominador, los numeradores serán iguales:

$$x+1 = a(x-2)+bx \longrightarrow \begin{cases} \text{si } x=0 \to 1 = a(-2) \to a = -\dfrac{1}{2} \\ \text{si } x=2 \to 3 = b\cdot 2 \to b = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Observa que sustituimos en ambos miembros por los ceros del denominador.

De la descomposición de (*) resulta:

$$I = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x-2} \right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-2| + C$$

☞ <u>Ejemplo</u>: Comprueba que

$$\int \frac{3x^2+12x+1}{x^3+3x^2-x-3}\,\mathrm{d}x = -\ln|x+3| + 2\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C$$

❑ Fracciones múltiples.

También intentaremos expresar el radicando como una suma de fracciones simples, aunque es es un poco más complejo. A través de un ejemplo.

Intentemos obtener $\quad I = \displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}\,\mathrm{d}x$

Fíjate ahora cómo es la descomposición:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \qquad (*)$$

De ahí, que deba ser:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a(x-1)^2 + b(x+2)(x-1) + c(x+2)}{(x-1)^2(x+2)}$$

Como tienen el mismo denominador, los numeradores serán iguales:

$$x+1=a(x-1)^2+b(x+2)(x-1)+c(x+2)$$

Haciendo $x=1$ obtenemos:

$$2=c\cdot 3\rightarrow c=\frac{2}{3}$$

Haciendo $x=-2$ obtenemos:

$$-1=a\cdot 9\rightarrow a=-\frac{1}{9}$$

Ahora haciendo, por ejemplo, $x=0$ obtenemos:

$$1=a-2b+2c\rightarrow 2b=-\frac{1}{9}+\frac{4}{3}-1=\frac{2}{9}\rightarrow b=\frac{1}{9}$$

Observa que primero sustituimos en ambos miembros por los ceros del denominador y luego un valor cualquiera conveniente.

De la descomposición de (*) resulta:

$$\int\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{9}\ln|x+2|+\frac{1}{9}\ln|x-1|-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+C$$

☞ Ejemplo: Comprueba, aplicando el procedimiento anterior, que:

$$\int\frac{3x-2}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x=-2\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

8.Integración por sustitución.

❑ La notación de Leibniz

Repasemos brevemente la notación que usaba Leibniz para las derivadas de las funciones, que es muy útil para el cálculo de ciertas integrales.

Para ilustrarlo, consideremos la función $y=x^3+x^2$. Al derivar, nosotros empleamos esta notación:

$$y=x^3+x^2\quad\xrightarrow{D}\quad y'=3x^2+2x$$

La notación de Leibniz es más compleja, pero resalta la variable "dependiente", y la variable "independiente".

$$\mathrm{d}y=\left(3x^2+2x\right)\mathrm{d}x$$

Veamos algunos otros:

$$e=t^2+5t\qquad\rightarrow\qquad \mathrm{d}e=(2t+5)\,\mathrm{d}t$$

$$u=\mathrm{sen}\,(ax)\qquad\rightarrow\qquad \mathrm{d}u=a\cos\,(ax)\;\mathrm{d}x$$

$$v^2=\mathrm{e}^{3t}\qquad\rightarrow\qquad 2v\,\mathrm{d}v=3\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t$$

En la expresión

$$\mathrm{d}u=a\cos(ax)\mathrm{d}x$$

se señala que se ha derivado la variable u respecto de la variable x.

❑ El método del cambio de variable.

Vamos a ilustrarlo con la siguiente integral compuesta de tipo seno/coseno:

$$\int 2x\cos x^2\,\mathrm{d}x$$

Ya sabemos cómo obtener esta primitiva. Sólo vamos a practicar con ella el método de sustitución o cambio de variable.

Veamos cómo queda haciendo el "cambio de variable" $u = x^2$:

$$u = x^2 \quad \to \quad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$$

La integral queda:

$$\int 2x\cos x^2\,\mathrm{d}x \overset{[a]}{=} \int \cos u\,\mathrm{d}u = \operatorname{sen} u + C \overset{[b]}{=} \operatorname{sen} x^2 + C$$

Donde en

$[a]$ hemos hecho el cambio de variable

$[b]$ hemos deshecho el cambio de variable

El método no se usa para estas primitivas tan simples que se obtienen directa y fácilmente de la tabla de integrales compuestas. Veamos:

El método de cambio de variable es útil para intentar reducir determinadas integrales a inmediatas. Pero en muchos casos es difícil encontrar la sustitución adecuada.

☞ Ejemplo: Obtengamos $I = \displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$ haciendo $t = \ln x$.

Es:

$$t = \ln x \ \to\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int t^{-2}\mathrm{d}t = \\ &= \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C \end{aligned}$$

☞ Ejemplo: Obtengamos $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}\,\mathrm{d}x$ haciendo $t = \dfrac{3}{2}x^2$.

Tenemos:

$$t = \frac{3}{2}x^2 \ \to\ 2t = 3x^2 \ \to\ 2\mathrm{d}t = 6x\,\mathrm{d}x$$

Observemos que

$$\sqrt{4-(3x^2)^2} = \sqrt{4-(2t)^2} = \sqrt{4-4t^2} = \sqrt{4(1-t^2)} = 2\sqrt{1-t^2}$$

Así:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{6}\int \frac{6x}{\sqrt{4-9x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{6}\operatorname{arcsen} t + C = \frac{1}{6}\operatorname{arcsen}\left(\frac{3x^2}{2}\right) + C \end{aligned}$$

También hay cambios de variables directos, como vemos en el siguiente

☞ Ejemplo: Obtengamos $I = \displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ haciendo $x = u^2$.

Es: $\qquad x = u^2 \ \to\ \mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2u}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int\left(2 - \frac{2}{1+u}\right)\,\mathrm{d}u = 2u - 2\,|1+u| + C \\ &\overset{[*]}{=} 2\sqrt{x} - 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C \end{aligned}$$

[*] Deshacemos el cambio con $u^2 = x \ \to\ u = \sqrt{x}$.

9.Apéndice: algunos tipos especiales

Funciones con radicales.

Cuando nos encontramos expresiones racionales con radicales de la forma

$$\sqrt[p]{ax+b}, \ldots, \sqrt[q]{ax+b}$$

si es n es el mínimo común múltiplo de los índices, intentamos el cambio

$$ax+b=t^n$$

☞ Ejemplo: Obtengamos

$$I=\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

El mínimo común múltiplo de los índices es 6. Por ello, hacemos

$$x=t^6 \to \mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$$

Sustituyendo en el integrando

$$I=\int \frac{\sqrt[6]{t^6}}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}}\cdot 6t^5\mathrm{d}t=\int \frac{t}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\mathrm{d}t=\int \frac{6t^4}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

Con este cambio se reduce el cálculo al de una función racional.

Dividiendo

$$\left(6t^4\right):(t+1) \;\to\; \begin{cases} c(t)=6t^3-6t^2+6t-6 \\ r=6 \end{cases}$$

Comprueba que integrando y deshaciendo el cambio nos queda:

$$I=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C$$

Funciones trigonométricas.

Las integrales del tipo

$$I=\int R(\operatorname{sen}x,\cos x)\,\mathrm{d}x$$

donde R es una función racional se pueden obtener:

Caso 1. R impar en seno $t=\cos x$

Caso 2. R impar en coseno $t=\operatorname{sen}x$

Caso 3. R par en seno y coseno: $t=\tan x$

Con estos cambio se reduce el cálculo al de una función racional.

En los dos primeros casos suele usarse la identidad elemental

$$\operatorname{sen}^2x+\cos^2x=1$$

y en el tercero, más complejo, se usan

$$\operatorname{sen}x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad \mathrm{d}x=\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

☞ Ejemplo: Obtengamos

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x$$

Como es impar en seno:

$$t = \cos x \to \mathrm{d}t = -\operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x$$

Sustituyendo:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1 - t^2}{t^2}(-\mathrm{d}t) = \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$$

Integrando y deshaciendo el cambio:

$$I = t + \frac{1}{t} = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$$

☞ Ejemplo: la integral

$$I = \int \operatorname{sen}^5 x\, \mathrm{d}x$$

es impar en seno. Haciendo el cambio adecuado, comprueba que

$$I = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

☞ Ejemplo: la integral

$$I = \int \frac{1}{\cos x}\, \mathrm{d}x$$

Sugerencia: multiplica numerador y denominador por cos(x). Y luego en el denominador aplicamos la fórmula fundamental de trigonometría.

es impar en coseno. Haciendo el cambio adecuado, comprueba que

$$I = \frac{1}{2}\ln(\operatorname{sen} x + 1) - \frac{1}{2}\ln(\operatorname{sen} x + 1) + C$$

❑ Función racional sin raíces reales (I).

Si nos encontramos con una fracción del tipo

$$I = \int \frac{1}{x^2 + bx + c}\, \mathrm{d}x$$

donde el denominador no tiene raíces reales, entonces encontramos que sus raíces son un par de números complejos conjugados $\alpha \pm \beta i$.

De esta manera:

$$I = \int \frac{1}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}\, \mathrm{d}x$$

Esta última puede calcularse mediante el cambio

$$x - \alpha = \beta t \to \mathrm{d}x = \beta \mathrm{d}t$$

como vemos:

$$I = \int \frac{\beta}{(\beta t)^2 + \beta^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}\arctan(t) + C = \frac{1}{\beta}\arctan(\frac{x - \alpha}{\beta}) + C$$

☞ Ejemplo: en la integral

$$I = \int \frac{3}{x^2+4x+9}\,\mathrm{d}x$$

el denominador no tiene raíces reales:

$$x^2-4x+9=0 \to x = \frac{4\pm\sqrt{-20}}{2} = 2 \pm i\sqrt{5}$$

Luego aplicando lo visto arriba:

$$I = \int \frac{3}{(x-2)^2+(\sqrt{5})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)+C$$

☞ Ejemplo: comprobemos aplicando el método que

$$I = \int \frac{2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

❑ Función racional sin raíces reales (II).

Si nos encontramos el tipo general

$$I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$$

donde el denominador no tiene raíces reales, entonces intentaremos expresar

$$mx+n = A(2ax+b)+B$$

Quedando

$$I = A\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$$

La primera es un logaritmo y la segunda un arco-tangente que calculamos como estudiamos arriba

☞ Ejemplo: en la integral

$$I = \int \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$$

el denominador no tiene raíces reales:

$$x^2+2x+5=0 \to x = \frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2} = -1\pm 2i$$

Descomponiendo el numerador:

$$x+3 = A(2x+2)+B \to A = \frac{1}{2}\,,\; B = 2$$

Ahora separamos el logaritmo del arco-tangente:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{(x+1)^2+2^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + 2\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C = \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C \end{aligned}$$

☛ Ejemplo: comprobemos aplicando el método que

$$\int \frac{x+4}{x^2+2x+8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\,x+8\right) + \frac{3}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{7}}\right) + C$$

Ejercicios

1. Obtén una función cuya derivada sea:

a) $f(x) = 1$

b) $f(x) = 3x^2 + 1$

c) $f(x) = \cos x - 1$

d) $f(x) = 3\mathrm{e}^x - x^2$

e) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ si $x > 0$

2. Halla la primitiva de la función $y = 2x - 1$ que corta al eje de abscisas para $x = -1$.

3. Obtén la primitiva de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x - 1$ que pasa por $P = (2, 1)$

b) $f(x) = x - \mathrm{e}^x$ que pasa por el origen.

c) $f(x) = \operatorname{sen} x + 1$ que se anula para $x = \pi$.

4. Obtén la primitiva de la función $y = x^2 - \operatorname{sen} x$ que pasa por el origen de coordenadas.

5. Obtén la expresión de una función f tal que

$$f'(x) = x^2 + 2\,\mathrm{e}^x$$

sabiendo que se anula para $x = 0$.

6. Obtén $f(x)$ sabiendo que tiene un extremo relativo en el punto $(-1\,, 1)$ y que su derivada segunda viene dada por:

$$f''(x) = 6x - 12$$

7. Determina la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que para $x = 1$ tiene de tangente a $x + 12y = 13$ y tal que

$$f''(x) = x^2 - 1$$

8. Obtén la primitiva de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

que pasa por el punto $P = (1\,, 4)$.

9. [*] Obtén

$$\int |2x - 2|\, \mathrm{d}x$$

¿Qué primitiva por el origen de coordenadas?

10. Halla las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int 5\, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int x\, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int x^3\, \mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x^5}\, \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}\, \mathrm{d}x$ h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\, \mathrm{d}x$

11. Halla las primitivas de los siguientes polinomios:

a) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 5x + 2$

b) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 7x$

c) $f(x) = 3x^6 + 4x^2 - 1$

12. Obtén las siguientes integrales indefinidas

a) $\displaystyle\int (x^2 - e^x)\, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x^4} - x^4\right) \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \left(1 - \frac{3}{x^5}\right) \mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \left(x - \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int (3x - 2\operatorname{sen} x)\, \mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int (3\,\mathrm{e}^x - \cos x)\, \mathrm{d}x$

13. Descomponiendo en sumandos las fracciones obtén

a) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x}\, \mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{3}{x}\right) \mathrm{d}x = \ldots$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 5x + 1}{x}\, \mathrm{d}x = \int \left(x - 5 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \ldots$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2}\, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 5}{2x^3}\, \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - 2x}{x^2}\, \mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{3x}{x+4}\, \mathrm{d}x = 3\int \frac{(x+4) - 4}{x+4}\, \mathrm{d}x = \ldots$

g) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = 5\int \frac{(x^2+1) - 1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \ldots$

14. Obtén las siguientes integrales de formas compuestas relacionadas con senos y cosenos:

a) $\displaystyle\int \cos(2x-1)\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int x\cos(x^2+1)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int 3x^4 \operatorname{sen}\left(x^5\right)\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(10x)\,\mathrm{d}x$

15. Obtén las siguientes integrales de formas compuestas relacionadas con la función exponencial:

a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x-2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int 3x^2\,\mathrm{e}^{x^3-4}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\cos x}\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int (2x-1)\,\mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x$

16. Obtén las siguientes integrales logarítmicas:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3-8}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x-2x}{\mathrm{e}^x-x^2+5}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

17. Obtén las siguientes integrales de formas compuestas relacionadas con arco–seno:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^4}}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,\mathrm{d}x$

18. Obtén las siguientes integrales de formas compuestas relacionadas con arco–tangente:

a) $\displaystyle\int \frac{5}{1+(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x$

19. Obtén las siguientes integrales de formas compuestas relacionadas con tangente o cotangente.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(3x)}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{3}{\operatorname{sen}^2(5x)}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \sec^2(3x)\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \tan^2(4x)\,\mathrm{d}x$

20. Obtén las siguientes integrales de formas compuestas de forma potencial:

a) $\displaystyle\int (3x-2)^3\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int 6x\left(3x^2-2\right)^5\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,\mathrm{d}x$

21. Obtén las siguientes integrales irracionales realizando el cambio de variable sugerido:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ $\left(x=t^2\right)$

b) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$ $\left(x+1=t^2\right)$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ $\left(x=t^2\right)$

d) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$ $\left(x+1=t^2\right)$

e) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{x+4}}\,\mathrm{d}x$ $\left(x+4=t^2\right)$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ $\left(x=t^3\right)$

g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x$ $\left(x=t^2\right)$

22. Obtén las siguientes integrales realizando el cambio de variable sugerido:

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,\mathrm{d}x$ $(t=\operatorname{sen}x)$

b) $\displaystyle\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$ $(t=\operatorname{sen}x)$

c) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}x}\,\mathrm{d}x$ $(t=\operatorname{sen}x)$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x(2+3\ln x)^4}\,\mathrm{d}x$ $(t=2+3\ln x)$

23. Obtén con el método de integración por partes:

a) $\displaystyle\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int x\cos(3x)\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$

24. Obtén con el método de integración por partes:

a) $\displaystyle\int \arctan x \, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \cos^2(3x) \, \mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen} 5x \, \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \cos(\ln x) \, \mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x) \cos(2x) \, \mathrm{d}x$

25. Obtén las integrales de las funciones racionales siguientes:

a) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x-1} \, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{x+11}{x^2-9} \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-4} \, \mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x(x+2)^2} \, \mathrm{d}x$

26. [S/06] Calcula

a) $\displaystyle\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} \, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int (2x-3) \cdot \tan(x^2 - 3x) \, \mathrm{d}x$

27. [S/06] Halla la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.

28. [S/06] Calcula

$$\int (x^2 - 1) \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$$

29. [S/06] Sea $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ una función tal que su función derivada viene dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x & \text{si} \quad 0 < x < 3 \\ -2x + 8 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de f sabiendo que $f(1) = \dfrac{16}{3}$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

30. [S/07] Calcula

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1} \, \mathrm{d}x$$

31. [S/07] Determina una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada viene dada por

$$f'(x) = x^2 + x - 6$$

y que el valor que alcanza f en su punto máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto mínimo (relativo).

32. [S/07] Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas

33. [S/07] Sea

$$I = \int \frac{2}{2 - \mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}x$$

a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t = \mathrm{e}^x$.

b) Calcula I .

34. [S/07] Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que

$$f''(x) = x^2 - 1$$

y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = 1$.

35. [S/08] Sean $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \quad , \quad g(x) = x^3 \cdot \ln x$$

a) Halla la primitiva de f que toma el valor 1 cuando $x = \dfrac{\pi}{3}$(sugerencia: $t = \cos x$).

b) Calcula

$$\int g(x) \, \mathrm{d}x$$

36. [S/09] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - 9x^4}}$$

Halla la primitiva F de f que cumple $F(0) = 3$ (*sugerencia*: $t = \dfrac{3}{2}x^2$).

37. [S/09] Calcula

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$

38.[S/10] Sea

$$I = \int \frac{5}{1+\sqrt{\mathrm{e}^{-x}}}\,\mathrm{d}x$$

a) Expresa I haciendo el cambio $t^2 = \mathrm{e}^{-x}$.

b) Determina I .

39.[S/10] Determina la primitiva F de f tal que $F(1) = 1$, estando la función f dada por :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x} \quad \text{si } x \neq -1 \ , \ x \neq 0$$

40.[S/11] Halle la primitiva de $f:(0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ cuya gráfica pasa por $P(1\,,1)$, siendo

$$f(x) = x(1-\ln x)$$

41.[S/11] Halla la función $f:(0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ cuya gráfica tiene tangente horizontal en $P(1\,,1)$ y es

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

42.[S/11] Calcula:

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$$

43.[S/11] Halla

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^{2x}-1)\,(\mathrm{e}^x+1)}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \mathrm{e}^x$.

44.[S/12] Determina la primitiva de $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuya gráfica pasa por el punto $(\pi, 0)$, siendo

$$f(x) = x^2\cos(x)$$

45.[S/12] Sea

$$I = \int \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

a) Expresa la integral I aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1-x}$.

b) Calcula el valor de I.

46.[S/12] Halla una primitiva de f definida por

$$f(x) = \frac{2}{x^2-1} \ \text{si } x \neq 1\,, x \neq -1$$

47.[S/12] Determine la primitiva que pasa por el punto $P\,(-1\,,0)$ de la función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$$

48.[S/13] Determina una función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ y cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

49.[S/13] Sea $g:(0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

Determina la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto $P(1\,,0)$.

50.[S/13] Haciendo el cambio $t = \sqrt{x}$, calcule

$$\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

51.[S/13] Halle la primitiva de $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que pasa por el origen de coordenadas, siendo

$$g(x) = \ln(x^2+1)$$

52.[S/14] Sea la función f definida por

$$f(x) = x\cdot\ln(x+1) \quad , \quad x > -1$$

Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1\,,0)$.

53.[S/14] Determina una función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f(1) = 1$ y que

$$f'(x) = \begin{cases} x^2-2x & \text{si} \quad x<0 \\ \mathrm{e}^x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

54.[S/14]Sea $f:(-1\,,3) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x+9}{(x+1)\,(x-3)}$$

Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1\,,0)$.

55.[S/14] Calcula

$$\int \frac{1}{2x\,(x+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: hágase el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

56.[S/14] Obtén la primitiva de $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \mathrm{e}^x\cos x$$

cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

57.[S/15] Calcula

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$$

58.[S/15] Determina la función $f:(0\,,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=\ln x$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1\,,2)$.

59. [S/15] Calcula

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{x+2}}$$

Sugerencia: $\sqrt{x+2}=t$.

60.[S/15] Calcula

$$\int \mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$$

61.[S/15] Sea f la función definida por

$$f(x)=\frac{\ln x}{2x}\qquad(x>0)$$

y F la primitiva de f tal que $F(1)=2$.

a) Calcula $F'(\mathrm{e})$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x=\mathrm{e}$.

62.[S/15] Sea f definida por

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2(x-1)}\qquad(x\neq0\,,\,x\neq1)$$

Determina la primitiva F que pasa por $P(2\,,\ln 2)$.

Cuestiones

1. Prueba que si $F:\mathbb{D}\rightarrow\mathbb{R}$ es una primitiva de la función f, entonces lo es también la función

$$x\in\mathbb{D}\longmapsto F(x)+C$$

donde C es una constante cualquiera.

2. Consideremos la función f definida por

$$f(x)=\frac{1}{x}\quad,\quad x\neq0$$

¿Es una primitiva de f la función F definida por

$$F(x)=\ln(x)\quad,\quad x>0?$$

3. [*] Dos funciones f y g tienen la misma función derivada. ¿Es entonces $f-g$ una función constante? ¿Es $f-g$ constante en cada intervalo del dominio de derivabilidad?

4. Una función coincide en todo punto con su derivada. ¿De qué función puede tratarse?

5. Halla $f(x)$ sabiendo que

a) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^3-x+C$

b) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\ln(3x+1)+C$

c) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\operatorname{sen}(2x+1)+C$

6. Comprueba que si $n\neq1$:

$$\int\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+C$$

7. Usando las identidades

$$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha\quad,\quad\cot^2\alpha+1=\csc^2\alpha$$

calcula las integrales

a) $\displaystyle\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int\cot^2 x\,\mathrm{d}x$

8. Si $a>0$, con el cambio $x=at$ comprueba que:

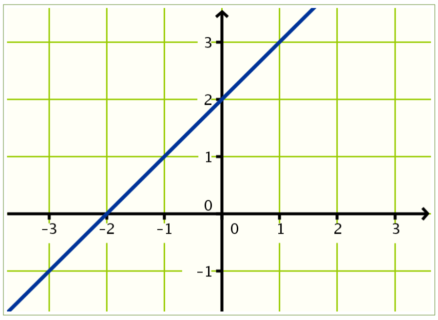
a) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

b) $\displaystyle\int\frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$

9. Una primitiva de la función continua f es la función F. Obtén una primitiva de f que pase por el origen de coordenadas.

10. Si la gráfica de una función $y=f(x)$ es una línea recta, ¿cómo es la gráfica de una primitiva de ella?

11. Obtén una primitiva de la función representada a continuación:

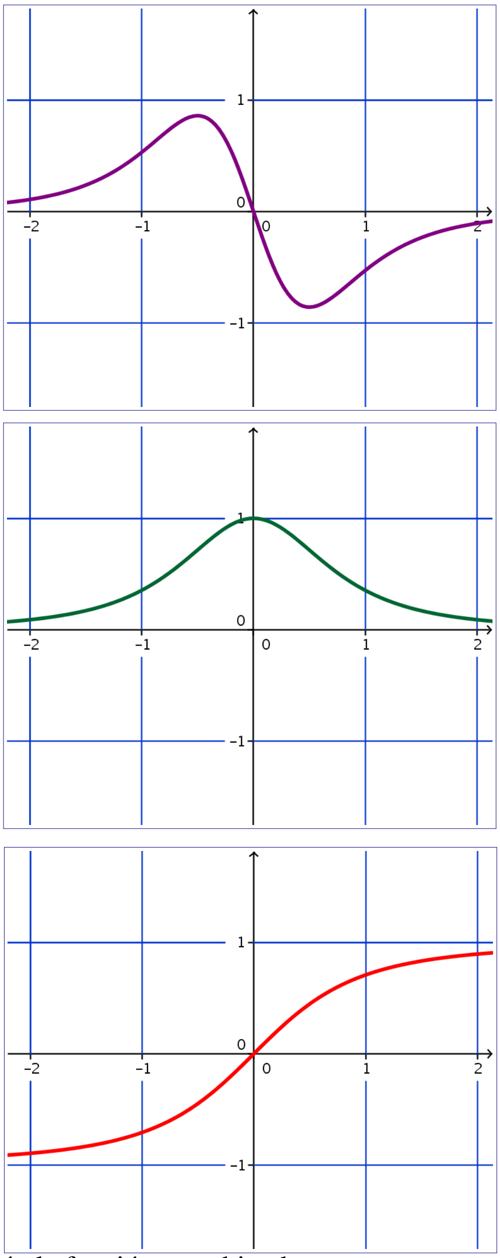


12. Comprueba que

$$\int 2x\cos x\,\mathrm{d}x\neq x^2\operatorname{sen}x+C$$

13.¿Es la integral indefinida de un producto el producto de las integrales indefinidas de los factores?

14. Las gráficas corresponden a la de una función f, a la de su derivada f' y a la de una primitiva suya F. Indica cuál es cada una:



15. Obtén la función u sabiendo que:

$$\int 2x \cos\left(x^2\right)\, \mathrm{d}x = u\left(x^2\right) + C$$

16.[*] Demuestra que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

no es la función derivada de ninguna $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

17.[*] Dada la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

encuentra una función continua $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

i. $F'(x) = f(x) \quad , \quad x \neq 0$

ii. $F(0) = 5$

¿Es F derivable para $x = 0$?

Autoevaluación

1. Obtén la primitiva de las funciones

a) $\displaystyle\int \left(x^3 - 3x^4\right) \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \left(5\,\mathrm{e}^x - \frac{5}{x}\right) \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int (3\cos x - 6\,\mathrm{sen}\, x)\, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x - \sqrt{x}}{x^3}\, \mathrm{d}x$

2. Halla la expresión de una función $y = f(x)$ sabiendo que $f''(x) = 12x^2 - 6x$ y que en el punto $(1\,,2)$ presenta un extremo relativo.

3. Calcula las integrales compuestas siguientes:

a) $\displaystyle\int 3x^4 \cos\left(x^5 - 1\right) \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \left(3x^2 + 1\right) \mathrm{e}^{x^3+x-1}\, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{3x}{4x^2 - 1}\, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 4}\, \mathrm{d}x$

4. Calcula la siguiente integral:

$$\int \mathrm{sen}(\ln x)\, \mathrm{d}x$$

5. Obtén la integral siguiente, descomponiendo adecuadamente:

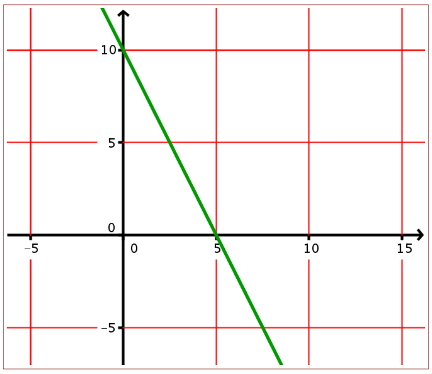
$$\int \frac{x - 1}{x^2 - 16}\, \mathrm{d}x$$

6. Obtengamos la siguiente integral indefinida

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[3]{x}}\, \mathrm{d}x$$

Sugerencia: cambio $x = t^3$.

7. Un cuerpo que se mueve en línea recta ha sido lanzado desde el punto O que sirve para observarlo. La gráfica de su velocidad es:



Obtén la ecuación $y = e(t)$ que expresa la distancia que separa al móvil de O en función del tiempo.

Autoevaluación

1. Aplicando la linealidad:

a) $I = \int x^3\,\mathrm{d}x - 3\int x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{5}x^5 + C$

b) $I = 5\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - 5\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 5\,\mathrm{e}^x - 5\ln x + C$

c) $I = 3\int \cos x\,\mathrm{d}x - 6\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

$= 3\operatorname{sen} x + 6\cos x + C$

d) $I = \int \left(1 + 3x^{-2} - x^{-\frac{5}{2}}\right)\mathrm{d}x$

$= x - 3x^{-1} + \frac{2}{3}x^{-3/2} + C$

2. Al ser $f''(x) = 12x^2 - 6x$ obtendremos la primera derivada integrando:

$$f'(x) = \int \left(12x^2 - 6x\right)\mathrm{d}x = 4x^3 - 3x^2 + C$$

Como para $x = 1$ hay un extremo, para este valor se anula la derivada:

$$f'(1) = 0 \;\rightarrow\; 4 - 3 + C = 0 \;\rightarrow\; C = -1$$

Así:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1$$

Ahora integrando ésta obtendremos la función:

$$f(x) = \int \left(4x^3 - 3x^2 - 1\right)\mathrm{d}x = x^4 - x^3 - x + C$$

Como la gráfica pasa por el punto $(1\,,2)$:

$$f(1) = 2 \;\rightarrow\; 1 - 1 - 1 + C = 2 \;\rightarrow\; C = 3$$

Tenemos, pues:

$$f(x) = x^4 - x^3 - x + 3$$

3. Observemos que son integrales de formas compuestas:

a) Es de tipo seno y coseno:

$$I = \frac{3}{5}\int 5x^4\cos\left(x^5 - 1\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\operatorname{sen}\left(x^5 - 1\right) + C$$

b) Es de tipo exponencial:

$$\int \left(3x^2 + 1\right)\mathrm{e}^{x^3 + x - 1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^3 + x - 1} + C$$

c) Es de tipo logarítmico:

$$I = \frac{3}{8}\int \frac{8x}{4x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\ln\left(4x^2 - 1\right) + C$$

d) Es de tipo potencial:

$$I = \frac{1}{2}\int 2x\left(x^2 - 4\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\left(x^2 - 4\right)^{\frac{4}{3}} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^2 - 4)^4} + C$$

4. Tenemos que hallar

$$I = \int \operatorname{sen}(\ln x)\,\mathrm{d}x$$

$$I = x\operatorname{sen}(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x\operatorname{sen}(\ln x) - \int 1\cdot\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$$

Ahora volvemos a aplicar el método a esta segunda integral:

$$I = x\operatorname{sen}(\ln x) - \left[x\cos(\ln x) + \int x\operatorname{sen}(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right]$$
$$= x\operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - I$$

Despejando I:

$$\int x\operatorname{sen}(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\operatorname{sen}(\ln x) - \frac{x}{2}\cos(\ln x) + C$$

5. Descompongamos en fracciones simples:

$$\frac{x - 1}{x^2 - 16} = \frac{a}{x - 4} + \frac{b}{x + 4}$$

De ahí, que deba ser:

$$\frac{x - 1}{x^2 - 16} = \frac{a(x + 4) + b(x - 4)}{x^2 - 16}$$

Como tienen el mismo denominador, los numeradores serán iguales:

$$x - 1 = a(x + 4) + b(x - 4) \rightarrow \begin{cases} x = 4 & \rightarrow \quad a = \frac{3}{8} \\ x = -4 & \rightarrow \quad b = \frac{5}{8} \end{cases}$$

De la descomposición en fracciones simples resulta:

$$I = \int \frac{x - 1}{x^2 - 16}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\frac{3}{8}}{x - 4} + \frac{\frac{5}{8}}{x + 4}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3}{8}\ln|x - 4| + \frac{5}{8}\ln|x + 4| + C$$

6. Para obtener

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

hacemos el cambio

$$x = t^3 \to \mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$$

Así nos queda, cambiando la variable

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{t^3 + t} \cdot 3t^2\mathrm{d}t$$

Simplificando y descomponiendo:

$$\frac{3t^3}{t^3 + t} = \frac{3t^2}{t^2 + 1} = 3 - \frac{3}{t^2 + 1}$$

Ahora integramos:

$$I = 3t - 3\arctan(t) + C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t = \sqrt[3]{x}$:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = 3\sqrt[3]{x} - 3\arctan(\sqrt[3]{x}) + C$$

7. Como vemos, la gráfica de la velocidad es una recta que pasa por los puntos $A\,(0\,,10)$ y $B\,(0\,,5)$. Es fácil encontrar su ecuación:

$$v(t) = -2t + 10$$

Como la derivada de la posición respecto del tiempo es la velocidad, integrando ésta obtendremos la función que nos da en cada instante la posición del móvil:

$$e(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int (-2t + 10)\,\mathrm{d}t = \\ = -t^2 + 10t + C$$

Teniendo en cuenta que partió del punto origen:

$$e(0) = 0 \ \to \ C = 0$$

Concluimos que

$$e(t) = -t^2 + 10t$$