TEMA 3

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Ejercicios de la lección

tomados de Selectividad

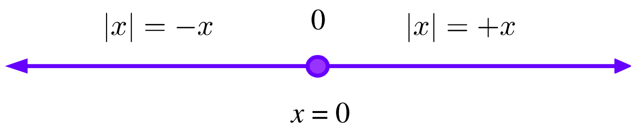
detalladamente resueltos

Cursos
2006 -

Soluciones

EJERCICIO 02 [S/06]

Primero, expresemos como una función a trozos. Observemos:



Luego

$$f(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 + x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Continuidad: sólo podría ser discontinua para $x = 0$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo del dominio. Veamos detenidamente en este punto:

$\boxed{x=0}$

Valor: $f(0) = 0^2 - 0 = 0$

Límites: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \begin{cases} f(0_-) = 0^2 + 0 = 0 \\ f(0_+) = 0^2 - 0 = 0 \end{cases}$

Concluimos que es continua para $x = 0$.

Derrivabilidad: podemos derivar cada trozo directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Para $x = 0$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

D.L. $\begin{cases} f'(0_-) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f'(0_+) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \end{cases}$

Concluimos que f no es derivable para $x = 0$ (es un punto *anguloso*).

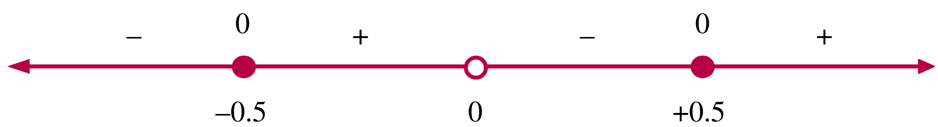
b) Para analizar la variación de la función estudiemos el signo de la derivada.

Ceros:

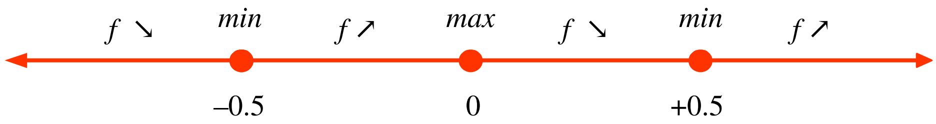
$x < 0 \to 2x + 1 = 0 \to x = -\dfrac{1}{2} = -0.5$

$x > 0 \to 2x - 1 = 0 \to x = \dfrac{1}{2} = 0.5$

Intervalos de signos de la derivada:



De ahí deducimos la monotonía de la función:



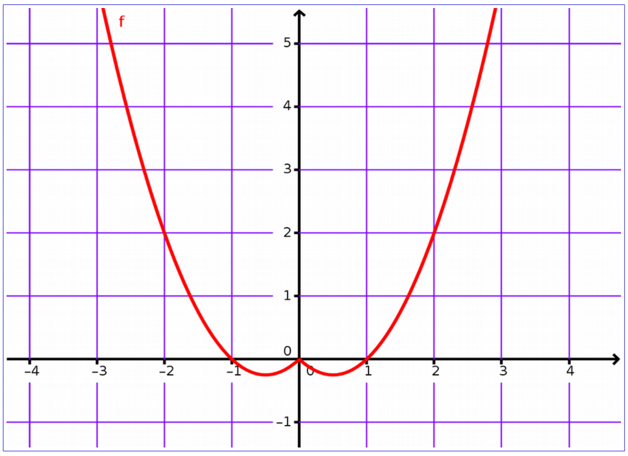
c) En el esquema de monotonía apreciamos los extremos relativos de la función (baja+sube=mínimo y sube+baja=máximo). Obtengamos las abscisas y las ordenadas, tal y como se pide en el enunciado:

Mínimo relativo: $x = -0.5 \to y = 0.25 - 0.5 = -0.25$

Máximo relativo: $x = 0 \to y = 0$

Mínimo relativo: $x = +0.5 \to y = 0.25 - 0.5 = -0.25$

NOTA. Podríamos haber representado la función y realizar el estudio gráficamente:



EJERCICIO 05: [S/06]

Primero, derivemos dos veces la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + cx + 1 \;\to\; f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \;\to\; f''(x) = 6x + 2a$$

a) El punto $(2\,,2)$ está en la gráfica, por ello si $x = 2$ es $y = 2$:

$$f\,(2) = 2 \;\to\; 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1 = 2 \;\to\; 4a + 2b = -7 \text{ [*]}$$

Para $x = 0$ hay un punto de inflexión, así que se anula la derivada segunda:

$$f''(0) = 0 \;\to\; 6 \cdot 0 + 2a = 0 \;\to\; a = 0 \text{ [**]}$$

Concluimos de [*] y [**] que

$$a = 0\,,\, b = -\frac{7}{2}$$

b) La recta tangente pedida es:

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \;\to\; y - 1 = -\frac{7}{2}\,(x - 0) \;\to\; y = -\frac{7}{2}x + 1$$

La recta normal pedida es:

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)} \cdot (x - 0) \;\to\; y - 1 = \frac{2}{7}\,(x - 0) \;\to\; y = \frac{2}{7}x + 1$$

EJERCICIO 7 [S/07]

Necesitamos saber dónde tiene el punto de inflexión:

$$f(x)=2x^3+12x^2+ax+b \;\rightarrow\; f'(x)=6x^2+24x+a \;\rightarrow\; f''(x)=12x+24$$

Se nos asegura que la función tiene un punto de inflexión: será el cero de la derivada segunda.

$$f''(x)=0 \;\rightarrow\; 12x+24=0 \;\rightarrow\; x=-2$$

Concluimos que la función tiene el punto de inflexión para $x=-2$.

Tenemos así que para $x=-2$ la recta tangente es $y=2x+3$:

La pendiente de la tangente es la derivada en el punto de tangencia:

$$m=2 \;\rightarrow\; f'(-2)=2 \;\rightarrow\; 6\cdot(-2)^2+24\cdot(-2)+a=2 \;\rightarrow\; a=26$$

Hallamos el punto de tangencia:

$$\text{si } \; x=-2 \;\text{ es }\; y=2\cdot(-2)+3=-1$$

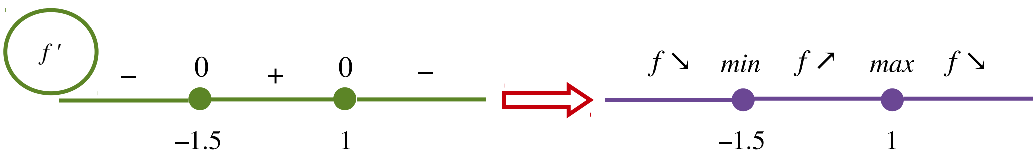
Luego:

$$f(-2)=-1 \xrightarrow{a=26} 2\cdot(-2)^3+12\cdot(-2)^2+26\cdot(-2)+b=-1 \;\rightarrow\; b=19$$

EJERCICIO 12 [S/08]

$$f(x)=\left(3x-2x^2\right)\mathrm{e}^x \;\rightarrow\; f'(x)=(3-4x)\,\mathrm{e}^x+\left(3x-2x^2\right)\mathrm{e}^x=\left(-2x^2-x+3\right)\mathrm{e}^x$$

a) Para estudiar la variación (monotonía y extremos) estudiamos el signo de la derivada primera:



b) Nótese que del esquema de monotonía deducimos los extremos relativos (baja+sube=mínimo y sube+baja=máximo). Obtengamos las abscisas y las ordenadas, tal y como se pide en el enunciado:

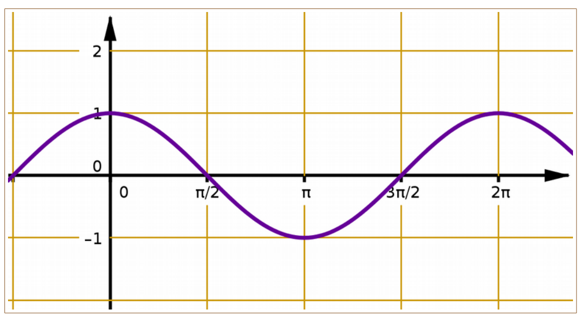
Mínimo relativo: $x=-1.5 \;\rightarrow\; y=-9\,\mathrm{e}^{-1.5}\approx-2.01$

Máximo relativo: $x=0 \;\rightarrow\; y=\mathrm{e}$

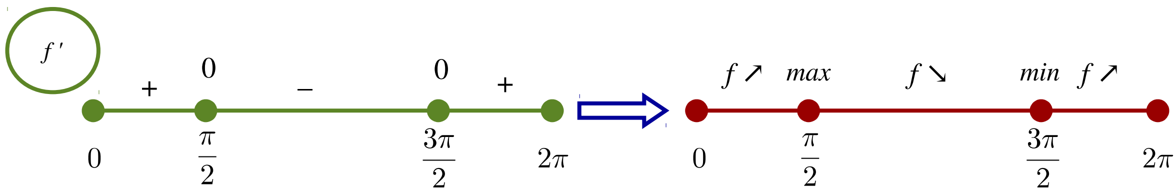
EJERCICIO 13 [S/08]

$$f(x)=\mathrm{e}^x(\operatorname{sen}x+\cos x) \;\rightarrow\; f'(x)=2\,\mathrm{e}^x\cos x \;\rightarrow\; f''(x)=2\,\mathrm{e}^x(\cos x-\operatorname{sen}x)$$

a) Observemos que la derivada primera tiene el mismo signo que la función coseno, pues la exponencial siempre es positiva. Recordemos::



Así tenemos:



b) Para obtener los puntos de inflexión necesitamos los ceros de la derivada segunda

$$2\,\mathrm{e}^x\,(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0 \;\rightarrow\; \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \;\rightarrow\; \operatorname{sen} x = \cos x \;\rightarrow\; \tan x = 1$$

Con la calculadora encontramos que es: $\arctan 1 = 45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$

Partiendo de este dato y teniendo en cuenta que la tangente es positiva en los cuadrantes primero y tercero:

$$\tan x = 1 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \\[2ex] x = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

Así que la función tiene sus puntos de inflexión para esos dos valores.

EJERCICIO 14 [S/09]

Primero, derivemos dos veces la función:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \;\rightarrow\; f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \;\rightarrow\; f''(x) = 6ax + 2b$$

Si en $(0\,,1)$ hay un punto de inflexión deducimos dos cosas:

La derivada segunda es cero: $f''(0) = 0 \;\rightarrow\; 2b = 0 \;\rightarrow\; b = 0$

La gráfica pasa por ese punto: $f(0) = 1 \;\rightarrow\; d = 1$

Ahora se nos dice que hay un extremo local para $x = 1$, por ello debe ser:

$$f'(1) = 0 \;\rightarrow\; 3a + 2b + c = 0 \;\rightarrow\; 3a + c = 0 \text{ [*]}$$

Por último se nos dice que para $x = 2$ la pendiente de la tangente es $m = 1$, de donde

$$f'(2) = 1 \;\rightarrow\; 12a + 4b + c = 1 \;\rightarrow\; 12a + c = 1 \text{ [**]}$$

De [*] y [**] obtenemos:

$$a = \frac{1}{9}\,,\; b = -\frac{1}{3}$$

EJERCICIO 16 [S/09]

Primero, derivemos dos veces la función:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \;\rightarrow\; f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Si en $(0\,,0)$ hay un extremo relativo deducimos dos cosas:

La derivada primera es cero: $f'(0) = 0 \;\rightarrow\; c = 0$

La gráfica pasa por ese punto: $f(0) = 0 \;\rightarrow\; d = 0$

Si en $(2\,,2)$ hay un extremo relativo deducimos dos cosas:

La derivada primera es cero: $f'(2)=0 \;\to\; 12a+4b=0$ [*]

La gráfica pasa por ese punto: $f(2)=2 \;\to\; 8a+4b=2$ [**]

De [*] y [**] obtenemos:

$$a=-\frac{1}{2}\,,\; b=\frac{3}{2}$$

EJERCICIO 20 [S/11]

a) Como se nos indica que debe ser derivable en dicho intervalo, es continua en él. En particular, es continua para $x=2$. Así, se cumple:

$$f(2-)=f(2+) \;\to\; 2-\ln 2+a=2b+1-\ln 2 \;\to\; a=2b-1 \text{ [*]}$$

Observemos que la función es derivable en particular para $x=2$:

$$f'(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x} & \text{si } \dfrac{1}{\mathrm{e}}<x<2 \\ b & \text{si } 2<x<4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(2_-)=\dfrac{1}{2} \\ f'(2_+)=b \end{cases}$$

Como las derivadas laterales para $x=2$ deben coincidir, obtenemos igualando que es $b=\dfrac{1}{2}$ y sustituyendo en [*] nos queda $a=0$.

b) Cuando buscamos los extremos absolutos en un intervalo compacto los candidatos son:

- los puntos inicial y final,

- los extremos relativos interiores. Como es derivable, deben ser ceros de la derrivada:

$$\frac{1}{\mathrm{e}}<x<2 \;\to\; 1-\frac{1}{x}=0 \;\to\; x=1$$

$$2<x<4 \;\to\; \frac{1}{2}=0 \;\to\; \text{no}$$

Vamos a construir una tabla de variación de f en el intervalo compacto dado:

x	$\frac{1}{\mathrm{e}}$		1		4
y	$\frac{1}{\mathrm{e}}+1\approx 1.37$	↘	1	↗	$3-\ln 2\approx 2.31$

Mínimo absoluto: $(1\,,1)$

Máximo absoluto: $(4\,,3-\ln 2)$

EJERCICIO 62 [S/00]

a) <u>Asíntotas verticales</u>: sólo puede haber discontinuidad de tipo infinito para $x=-2$ (cero del denominador)

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2}{x+2}=\left[\frac{4}{0}\right]=\pm\infty$$

Concluimos que $x=-2$ es una asíntota vertical.

Asíntota horizontal: calculemos el límite en el infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x+2} \overset{*}{=} \pm\infty$$

Donde en (*) hemos usado la regla de los grados (grado numerador > grado denominador).

Concluimos que no hay asíntota horizontal:

Asíntota oblicua: podría haber una asíntota $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+2x} \overset{*}{=} 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x}{x+2} \overset{*}{=} -2$$

Donde en (*) hemos usado la regla de los grados (grado numerador = grado denominador)

Concluimos que $y = x - 2$ es una asíntota oblicua.

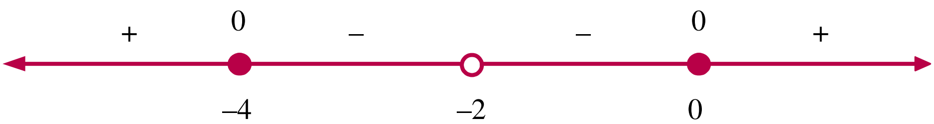
b) Para analizar la variación de la función estudiemos el signo de la derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

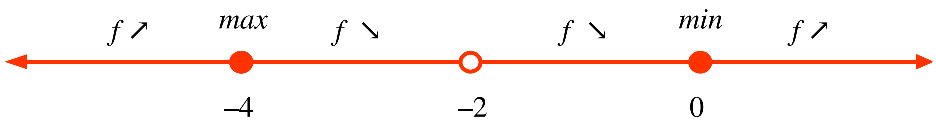
Ceros del numerador: $x^2 + 4x = 0 \;\rightarrow\; x\,(x+4) = 0 \;\rightarrow\; x = 0\,,\; x = -4$

Cerros del denominador: $(x+2)^2 = 0 \;\rightarrow\; x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

Intervalos de signos de la derivada:

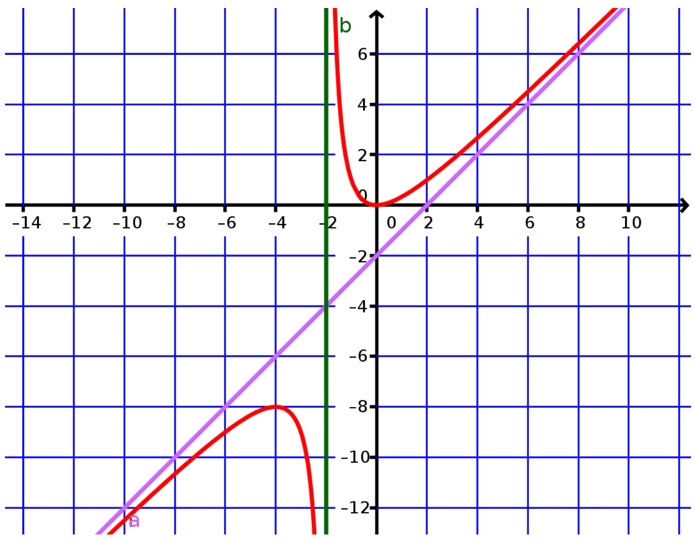


De ahí deducimos el esquema de monotonía de la función:



Es baja+sube=mínimo relativo en $x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$ y sube+baja=máximo relativo en $x = -4 \;\rightarrow\; y = -8$.

c) La gráfica:



EJERCICIO 66 [S/05]

a) <u>Asíntotas verticales</u>: sólo puede haber discontinuidad de tipo infinito para $x = 1$ (cero del denomindador)

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{e^x}{x-1} = \left[\frac{e}{0}\right] = \pm\infty$$

Concluimos que $x = 1$ es una asíntota vertical.

<u>Asíntota horizontal</u>: calculamos el límite en el infinito, recordando que $e^{-\infty} = 0$ y $e^{+\infty} = +\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = \left[\frac{+\infty}{1}\right] = +\infty$$

Concluimos y=0 es asíntota horizontal (aunque sólo para $x \to -\infty$)

<u>Asíntota oblicua</u>: podría haber una asíntota $y = mx + n$ para $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2 - x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Concluimos que no hay asíntota oblicua.

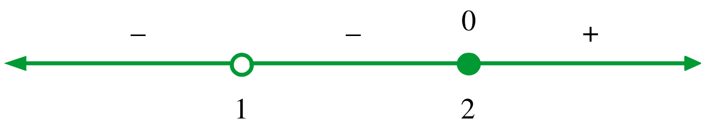
b) Para analizar la variación de la función estudiemos el signo de la derivada:

$$f'(x) = \frac{e^x\,(x-2)}{(x-1)^2}$$

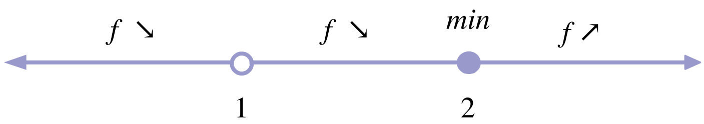
Ceros del numerador: $e^x\,(x-2) = 0 \;\to\; x - 2 = 0 \;\to\; x = 2$

Cerros del denominador: $(x-1)^2 = 0 \;\to\; x - 1 = 0 \;\to\; x = 1$

Intervalos de signos de la derivada:



De ahí deducimos el esquema de monotonía de la función:



Hay baja+sube=mínimo relativo en $x = 2 \;\to\; y = e^2 \approx 7.39$.

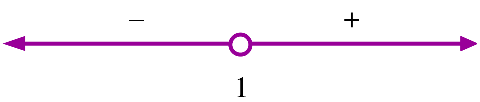
c) Para analizar la curvatura de la gráfica estudiemos el signo de la derivada segunda:

$$f'(x) = \frac{e^x\left(x^2 - 4x + 5\right)}{(x-1)^3}$$

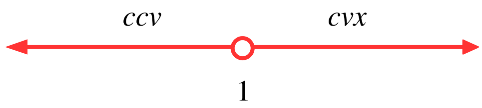
Ceros del numerador: $e^x\left(x^2 - 4x + 5\right) = 0 \;\to\; x^2 - 4x + 5 = 0 \;\to\; \text{no}$

Cerros del denominador: $(x-1)^3 = 0 \;\to\; x - 1 = 0 \;\to\; x = 1$

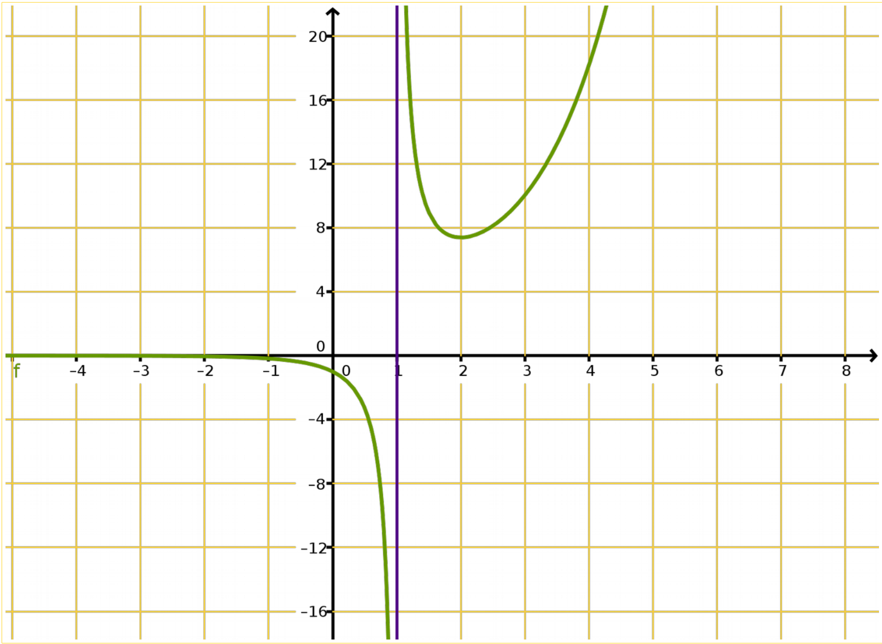
Intervalos de signos de la derivada segunda:



De ahí deducimos el esquema de curvatura de la función:



d) La gráfica:



EJERCICIO 71 [S/05]

a) <u>Asíntotas verticales</u>: sólo puede haber discontinuidad de tipo infinito para $x = \pm 2$ (ceros del denominador)

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \left[\frac{7}{0}\right] = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to +2} f(x) = \lim_{x\to +2} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \left[\frac{7}{0}\right] = \pm\infty$$

Concluimos que $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

<u>Asíntota horizontal</u>: calculamos el límite en el infinito, usando la regla de los grados:

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{1}{1} = 1$$

Concluimos $y = 1$ es asíntota horizontal

<u>Asíntota oblicua</u>: no puede haber por lo anterior.

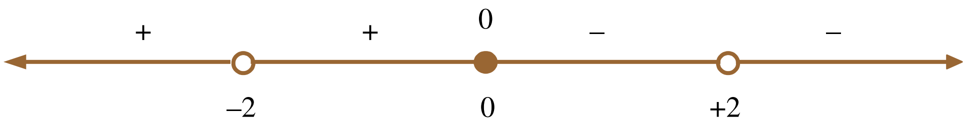
b) Para analizar la variación de la función estudiemos el signo de la derivada:

$$f'(x) = \frac{-14x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

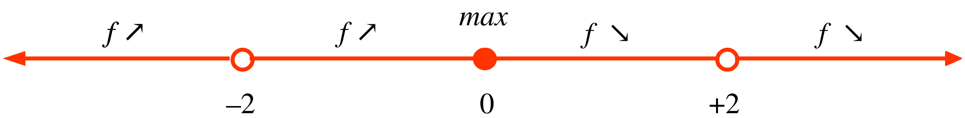
Ceros del numerador: $-14x = 0 \to x = 0$

Cerros del denominador: $\left(x^2-4\right)^2 = 0 \to x^2 - 4 = 0 \to x = \pm 2$

Intervalos de signos de la derivada:



De ahí deducimos el esquema de monotonía de la función:



Hay sube+baja=máximo relativo en $x = 0 \rightarrow y = -0.75$.

c) La gráfica: