TEMA 2

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Contenidos

1. Tangente a una curva.
2. Variación y derivada primera.
3. Extremos y derivada cero.
4. Extremos en intervalos cerrados.
5. Problemas de optimización.
6. Curvatura. Puntos de inflexión.
7. Representación gráfica.

Tiempo estimado

16 sesiones

Criterios de Evaluación

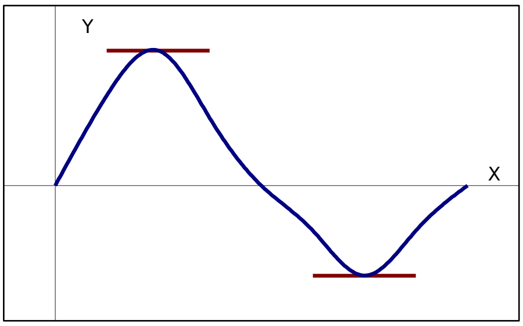
1. Conocer la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de una curva o de la recta tangente.
2. Saber usar la derivada de una función para conocer las regiones de crecimiento / decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos así como sus regiones de concavidad / convexidad y sus puntos de inflexión.
3. Saber aplicar los conocimientos anteriores para hallar la representación gráfica de las funciones tras conocer sus asíntotas.
4. Utilizar los conocimientos anteriores para resolver problemas de optimización, procedentes de situaciones reales de carácter económico y sociológico, cuya expresión analítica vendría dada en el texto.

©José Álvarez Fajardo bajo una licencia Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 2.5 Spain de Creative Commons

1.Tangente a una curva.

El problema de obtener la recta tangente a una curva es muy antiguo, y se trataba inicialmente de un problema geométrico. Posteriormente el matemático francés Fermat lo relacionó con un problema con el que, aparentemente, no guardaba relación: ¿cuáles son los valores máximos y mínimos de una función?

La gráfica siguiente quizá nos permita observar la conexión entre ambos:

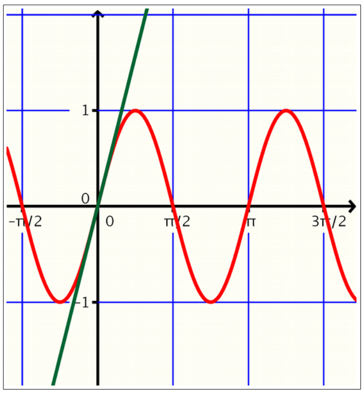


Observemos que en los puntos de los extremos tenemos que la tangente es horizontal: la pendiente en ellos es cero. Esto conduce a la cuestión más general de la determinación de la pendiente de una curva en un punto cualquiera.

Esto llevó directamente al concepto de derivada, que puede usarse para definir la recta tangente a la gráfica de una función:

> La tangente a la curva $y = f(x)$ de una función derivable en el punto de abscisa $x = x_0$ tiene de pendiente $m = f'(x_0)$.
>
> Por ello, la ecuación de dicha recta tangente es:
>
> $$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

☞ Ejemplo: obtengamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(2x)$ para $x = 0$.



- ✔ Derivamos $\quad f(x) = \text{sen}(2x) \;\rightarrow\; f'(x) = 2\cos(2x)$
- ✔ Sustituimos $\quad f(0) = 0 \quad , \quad f'(0) = 2$
- ✔ Su ecuación es: $\quad y - 0 = 2 \cdot (x - 0) \;\rightarrow\; y = 2x$

☞ Ejemplo: averigüemos en qué punto de la parábola $y = x^2 - 4$ la recta tangente es paralela a $2x - y + 1 = 0$.

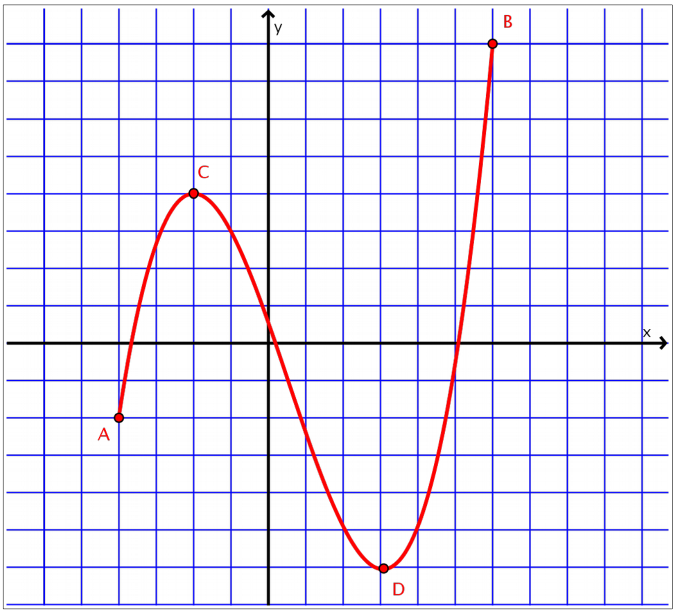
- ✔ La tangente debe tener la misma pendiente que la recta dada:
$$2x - y + 1 = 0 \rightarrow y = 2x + 1 \rightarrow m = 2$$
- ✔ La pendiente de la tangente es la derivada, así debe ser:
$$y' = 2x \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$$
- ✔ Sustituyendo $x = 1$ obtenemos $y = -3$. Luego el punto es:
$$P = (1\,, -3)$$

2.Variación y derivada primera.

Gráficamente.

Cuando tenemos la gráfica de una función cualquiera, es fácil reconocer en qué intervalos es creciente o decreciente, y dónde alcanza sus valores máximos y mínimos.

Vamos a estudiarlo con la función $f : [-4\,,6] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica tenemos a continuación:



Monotonía:

La función es creciente en el intervalo $[-4\,,-2]$ y en el intervalo $[3\,,6]$. Así, en esos intervalos al aumentar la variable independiente (x) también aumenta la dependiente (y).

Y es claro que en el intervalo $[-2\,,3]$ la función es decreciente. Así, en ese intervalo, al aumentar la variable x disminuye la variable y.

En general:

Sea f una función definida en un intervalo I.

Decimos que f es creciente en el intervalo, y escribimos $f \nearrow$ en I, si

$$x < x' \text{ en } I \longrightarrow f(x) \leq f(x')$$

Decimos que f es decreciente en el intervalo, y escribimos $f \searrow$ en I, si

$$x < x' \text{ en } I \longrightarrow f(x) \geq f(x')$$

Si las desigualdades son estrictas, se dice que
a) f es estrictamente creciente en I (f $\nearrow\nearrow$ en I) en el primer caso.
b) f es estrictamente decreciente en I (f $\searrow\searrow$ en I) en el segundo.

Nota: puede ocurrir que una función sea constante en un tramo. Para esos casos usaremos las expresiones "no creciente" o "no decreciente"

Extremos relativos:

Hay un mínimo relativo para $x = -4$: A es el punto más bajo de su entorno.

Hay un mínimo relativo para $x = 3$: el punto D es el más bajo de su entorno.

Hay un máximo relativo para $x = -2$: C es el punto más alto de su entorno.

Hay un máximo relativo para $x = 6$: el punto B es el más alto de su entorno.

Extremos absolutos:

Para $x = 3$ la función alcanza su mínimo absoluto, pues el punto D es el más bajo de todo el intervalo donde está definida.

Para $x = 6$ la función alcanza su máximo absoluto, pues el punto B es el más alto de todo el intervalo donde está definida.

En general:

Sea f una función definida en un intervalo I y sea $a \in I$.

Decimos que f presenta un máximo relativo para $x = a$ si en un entorno suyo la función no es superior a $f(a)$.

Si, además, es $f \leq f(a)$ en todo el intervalo I se dice que el máximo absoluto de la función en I se alcanza para $x = a$.

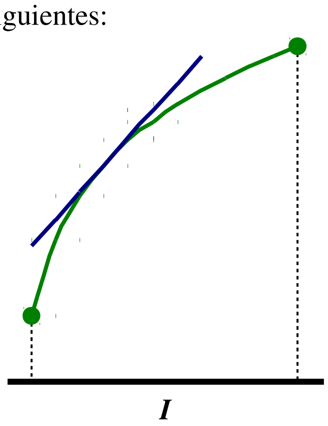
Decimos que f presenta un mínimo relativo para $x = a$ si en un entorno suyo la función no es inferior a $f(a)$.

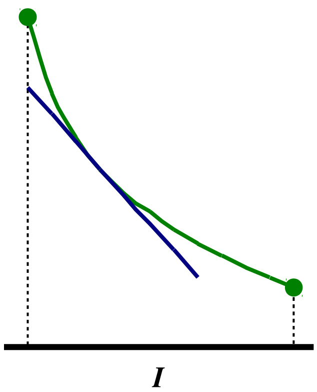
Si, además, es $f \geq f(a)$ en todo el intervalo I se dice que el mínimo absoluto de la función en I se alcanza para $x = a$.

Se dice que un extremo relativo es interior si el valor en el que se alcanza está en el interior del intervalo I.

Algebraicamente.

Veremos que la derivada de una función derivable $y = f(x)$ nos suministra una gran información sobre su variación. Observemos las gráficas siguientes:





La recta tangente marca el crecimiento y el decrecimiento de la función:

- ✔ Si en todos los puntos de un intervalo I las rectas tangentes son crecientes (pendiente positiva), la función crece en I.
- ✔ Si en todos los puntos de un intervalo I las rectas tangentes son decrecientes (pendiente negativa), la función decrece en I.

De ahí se deduce la siguiente propiedad de las derivadas:

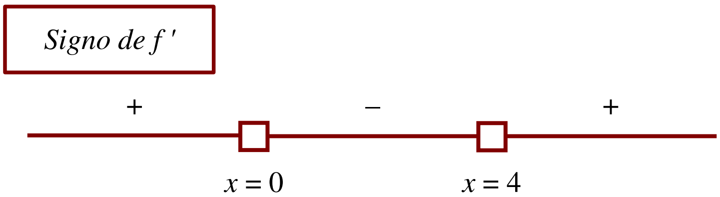
> Sea $y = f(x)$ una función derivable en todo punto del intervalo I.
> - Si $f' > 0$ en I entonces f es creciente en I.
> - Si $f' < 0$ en I entonces f es decreciente en I.

> Tenemos así un procedimiento sencillo para averiguar en qué intervalos es creciente o decreciente una función f:
>
> a) Hallamos su derivada.
>
> b) Estudiamos el signo (ceros e intervalos) de la derivada.
>
> c) Para un intervalo *I*:
>
> f' positiva en *I* → f ↗ en *I*
>
> f' negativa en *I* → f ↘ en *I*

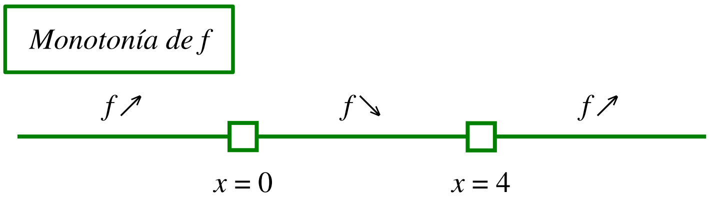
☞ Ejemplo: estudiemos la variación de la función $f(x) = x^3 - 6x^2$.

a) Hallamos la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 12x$

b) Estudiamos el signo de la derivada (ceros e intervalos de signo):



c) Deducimos el siguiente esquema de monotonía de la gráfica:



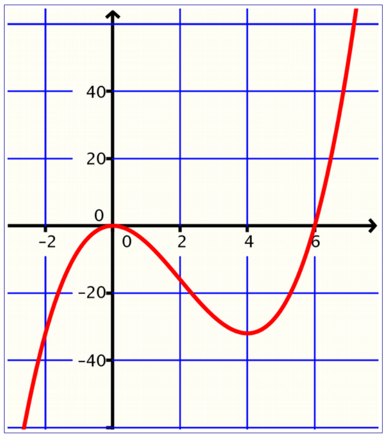
d) Extremos:

Para $x = 0$ hay un máximo relativo (la función pasa de subir a bajar).

Para $x = 4$ hay un mínimo relativo (se pasa de bajar a subir).

e) La siguiente tabla resume la variación de f:

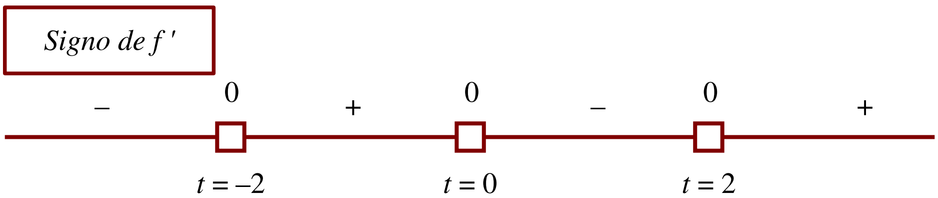
x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↘	-32	↗	$+\infty$



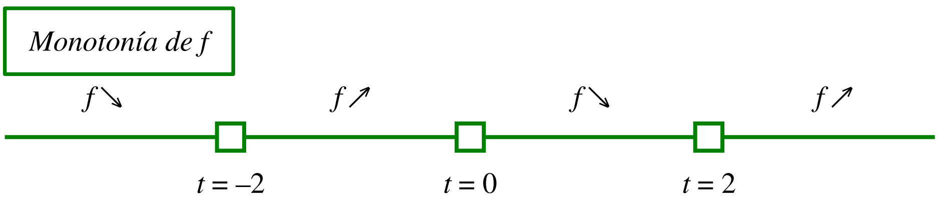
☞ Ejemplo: Estudiemos la variación de la función $y = t^4 - 8t^2 + 10$.

a) Hallamos la derivada: $y' = 4t^3 - 16t$

b) Estudiamos el signo de la derivada (ceros e intervalos de signo):



c) Deducimos el siguiente esquema de monotonía de la gráfica:



d) Extremos:

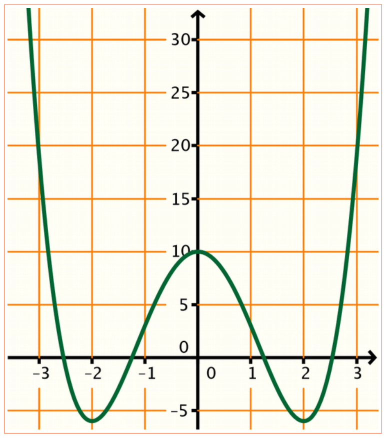
Para $t=-2$ hay un mínimo relativo (se pasa de bajar a subir).

Para $t=0$ hay un máximo relativo (la función pasa de subir a bajar).

Para $t=2$ hay un mínimo relativo (se pasa de bajar a subir).

e) La siguiente tabla resume la variación de f:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-6	↗	10	↘	-6	↗	$+\infty$



3. Extremos y derivada cero.

❑ Derivada cero y extremos.

De lo estudiado anteriormente deducimos que si una función derivable tiene un extremo relativo interior, la derivada será cero:

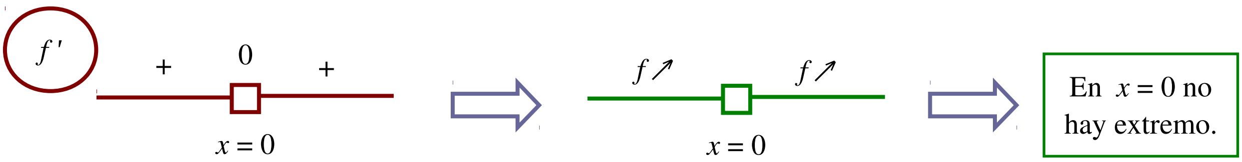
> Sea $y=f(x)$ una función derivable en todo punto del intervalo I y sea $x=x_0$ un punto interior de I.
>
> Si f presenta un extremo relativo en $x=x_0$ entonces $f'(x_0)=0$.

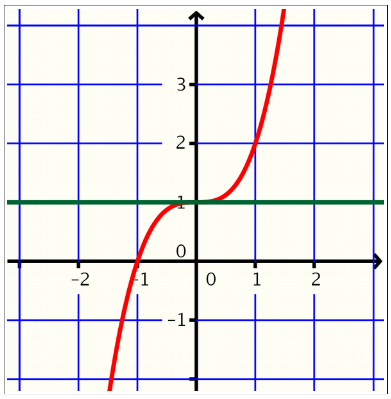
En efecto, si f es derivable en un extremo interior, la derivada no puede ser ni positiva ni negativa y por ello ha de ser cero.

Pero, cuidado: la derivada también puede ser cero y no ser en un extremo. Veamos un caso típico.

☞ <u>Ejemplo</u>: consideremos la $f(x)=x^3+1$.

Para estudiar su variación, hallemos su derivada y estudiemos su signo. Es $f'(x)=3x^2$:





En el punto $(0,1)$ la derivada de la función es cero: resulta así que la recta tangente en dicho punto es horizontal, pero ese punto no es ni un máximo ni un mínimo: observemos que la curva es creciente antes y después de ese punto, que se parece a un "rellano o descansillo". La gráfica tiene el aspecto de una silla y el punto sería el asiento, por ello algunos matemáticos lo denominan "punto de silla".

En la gráfica observamos cómo en el punto $(0,1)$ la recta tangente es la recta horizontal $y=1$, que atraviesa a la curva. Esto puede no estar de acuerdo con nuestra idea intuitiva de que una recta tangente corta a una curva de tal modo que en el punto de tangencia no la atraviesa.

Criterio del cambio de signo de la derivada.

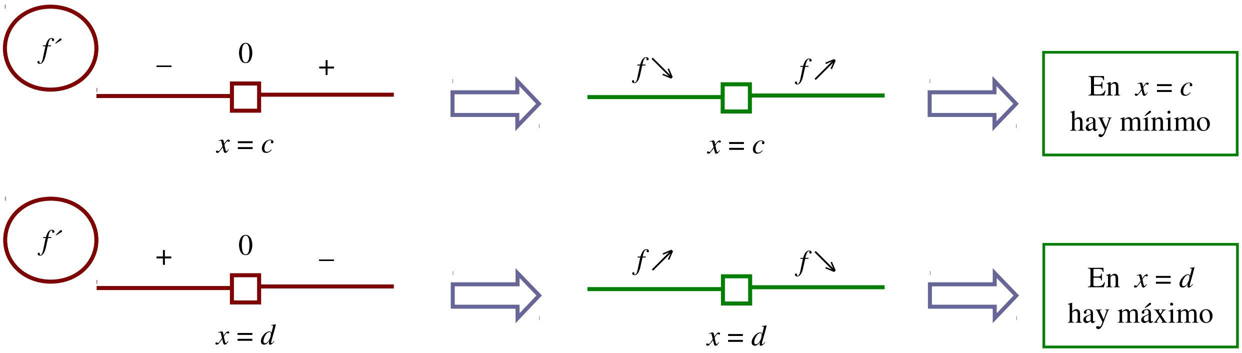
Aquí tenemos un sencillo criterio que nos garantiza un caso en el que la derivada es cero y sí hay extremo relativo.

Sea $y = f(x)$ una función derivable en todo punto del intervalo I y sea un $x = x_0$ punto interior de I.

- Si $f' < 0$ para $x < x_0$ y $f' > 0$ para $x > x_0$ entonces f tiene un mínimo relativo para $x = x_0$.
- Si $f' > 0$ para $x < x_0$ y $f' < 0$ para $x > x_0$ entonces f tiene un máximo relativo para $x = x_0$.

Importante: el criterio de la izquierda es válido incluso si para x = x₀ no hay derivada.

Así, tenemos los siguientes esquemas de signo:



☞ Ejemplo: estudiemos los extremos de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

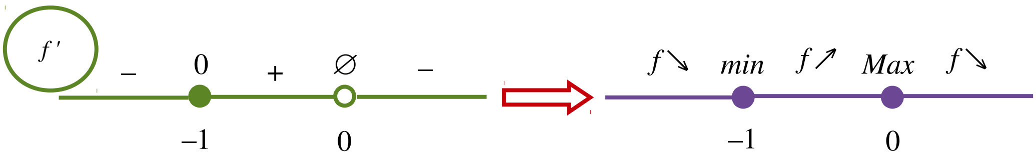
$$f(x) = \begin{cases} x\,e^x & \text{si} \quad x \le 0 \\ -x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Estudiando la derivabilidad vemos que $x = 0$ es punto anguloso y que:

$$f'(x) = \begin{cases} (x+1)\,e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ -2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Importante: podemos determinar que x=0 es un máximo relativo estudiando el signo de la derivada, aunque no hay derivada para x=0.

Analizamos la variación estudiando el signo de la derivada:



Criterio de la derivada segunda.

Criterio para existencia de extremo usando la derivada segunda:

Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto dos veces derivable en el punto interior $x = x_0$.

- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ entonces hay un mínimo relativo en $x = x_0$.
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ entonces f presenta un máximo relativo para $x = x_0$.

4. Extremos en intervalos cerrados.

Comencemos con una sencilla pero muy importante propiedad de las funciones continuas en intervalos compactos (cerrados y acotados).

> Si $y = f(x)$ es una función continua en intervalo compacto $[a\,,b]$, entonces está acotada y alcanza en él sus valores extremos.

> Un intervalo cerrado y acotado se denomina usualmente intervalo compacto.

Si además podemos usar las derivadas, haremos:

- ✔ Un estudio de signo de la derivada.
- ✔ Un esquema de variación cuidando de incluir los extremos del intervalo, puntos angulosos si los hubiese y los ceros de la derivada.

☞ Ejemplo: en un experimento que dura cuatro horas, la temperatura de un objeto viene dada por la siguiente fórmula:

$$T = 4t^3 - 18t^2 + 15t - 2$$

donde T es la temperatura en grados centígrados y t es el tiempo, en horas, transcurrido desde el inicio de la medición.

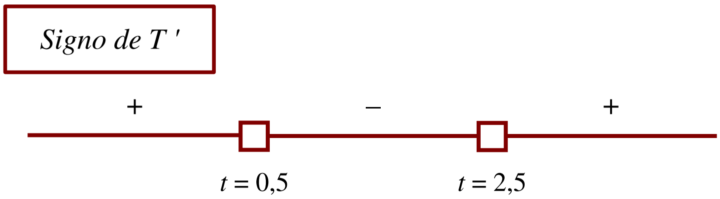
> Observemos que como la función temperatura es continua, alcanzará sus valores máximo y mínimo en cualquier intervalo cerrado.

Obtengamos las temperaturas máxima y mínima.

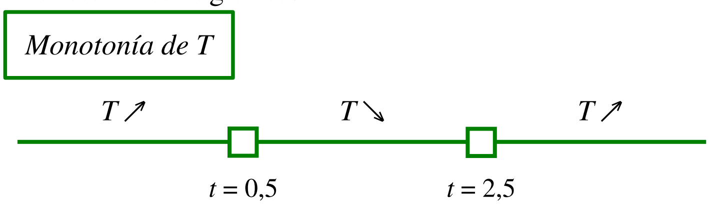
a) Hallamos la derivada:

$$T' = 12t^2 - 36t + 15$$

b) Estudiamos el signo de la derivada (ceros e intervalos de signo):



c) Del esquema de signos de la derivada deducimos el siguiente esquema de monotonía de la gráfica:



> Es muy importante formar la tabla de variación de T , pues el máximo y el mínimos absolutos pueden alcanzarse tanto en los valores inicial o final como en los extremos relativos interiores.

d) Tabla de variación de la temperatura:

t	0		0,5		2,5		4
T	–2	↗	1,5	↘	–14,5	↗	26

e) Conclusión:

La temperatura máxima fue 26 ºC y se alcanzó a las cuatro horas.

La temperatura mínima fue –14,5 ºC y se alcanzó a las 2 horas y media del inicio.

5. Problemas de optimización.

Son unos problemas en los que se intenta determinar bajo qué circunstancias una determinada magnitud alcanza su valor máximo o mínimo. Esa magnitud puede ser el área, volumen, velocidad, consumo,... e intentará expresarse como una función de una variable, para estudiar su variación a través de la derivada.

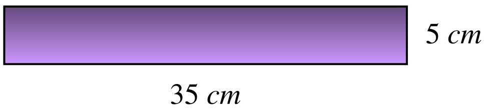
Para dar respuesta a un problema de optimización, leamos bien el enunciado. A continuación intentemos un acercamiento: unos ejemplos, casos particulares…

Veamos un par de ejemplos como muestra.

Problema 1: se trata de obtener las dimensiones del rectángulo –si es que lo hay– con perímetro 80 *cm*. y que tenga la mayor superficie posible.

Muchos creen que dos figuras con igual perímetro encerrarán la misma superficie. Pero aquí tenemos dos rectángulos con perímetro 80 *cm* y distintas superficies:

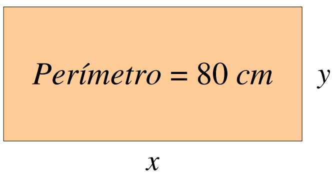
$$S = 30 \times 10 = 300\ cm^2$$



$$S = 35 \times 5 = 175\ cm^2$$

Ahora debemos intentar una formulación algebraica.

Con los datos del problema siempre podremos expresar la magnitud que desea optimizarse como función de una variable. En este caso el perímetro nos permitirá expresar la altura, por ejemplo, en función de la base y así expresar la superficie como función sólo de la base:

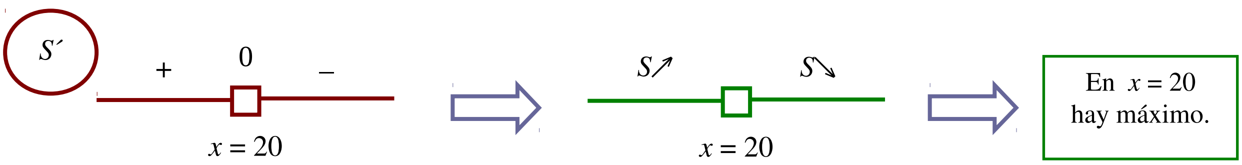


$$\begin{cases} p = 80 \\ 2x + 2y = 80 \\ x + y = 40 \\ y = 40 - x \end{cases}$$

Deseamos que sea máxima la función

$$S = x \cdot (40 - x) = 40x - x^2$$

Derivamos $S'(x) = 40 - 2x$ y realizamos un estudio de la variación:



La altura es $y = 40 - 20 = 20$ y la superficie $S = 20 \cdot (40 - 20) = 400$.

Concluimos que el rectángulo de perímetro 80 *cm* con área máxima es un cuadrado de lado 20 *cm*, siendo su área igual a 400 cm^2.

Problema 2: un grupo de jóvenes monta una una tienda en Internet de venta de móviles. La compañía distribuidora pondrá a su disposición un paquete de 1.000 móviles al mes, con un precio de 100 euros cada uno. A ese precio los vendería todos, y por cada euro que aumente el precio dejará de vender un móvil. ¿Cuál es el precio que le reportará mayores ingresos mensuales?

Si los vende a 200 euros, ¿cuáles serán los ingresos? ¿Y si los vende a 400?

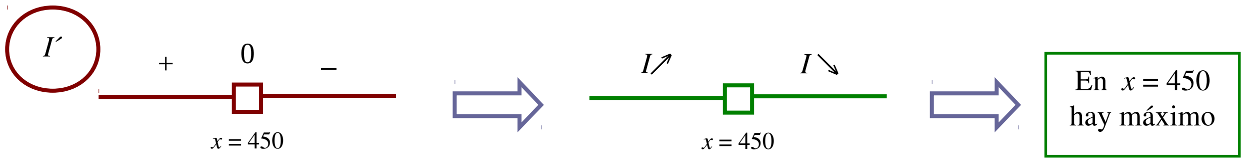
Llamemos x a los euros que aumentaremos el precio desde los 100 que pagamos nosotros por ellas, así:

$$I(x) = (100 + x) \cdot (1000 - x)$$

Derivamos

$$I(x) = 100000 + 900x - x^2 \rightarrow I'(x) = 900 - 2x$$

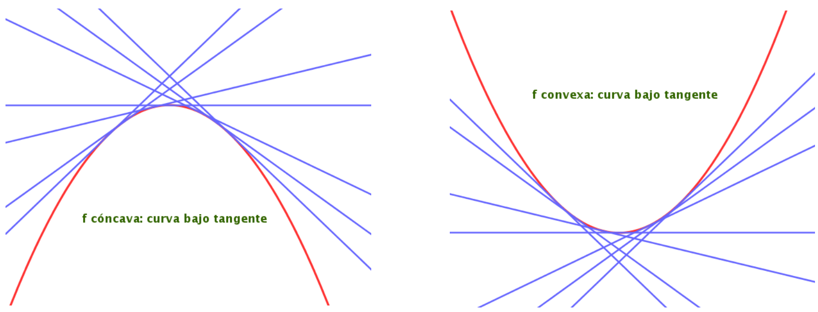
y realizamos un estudio de la variación:



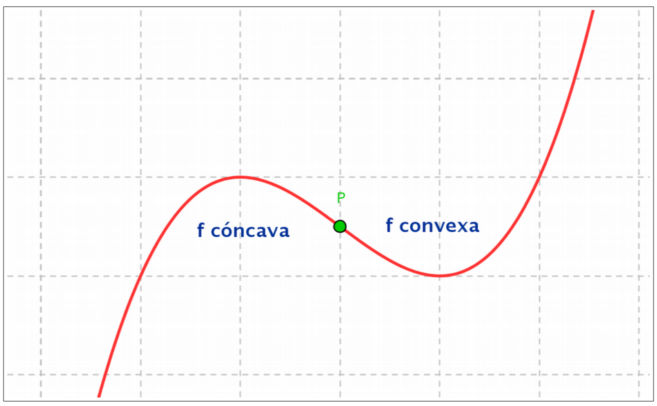
Concluimos por fin: el precio al que deben vender cada móvil, para obtener el mayor ingreso posible, es de 100+450=550 euros. En ese caso los ingresos brutos mensuales ascenderán a 302509 euros.

6.Curvatura. Puntos de inflexión.

Recordemos los conceptos de función cóncava y convexa:



A los puntos en los que cambia la curvatura se les llama puntos de inflexión:



El criterio es sencillo y puede deducirse del relativo a la monotonía:

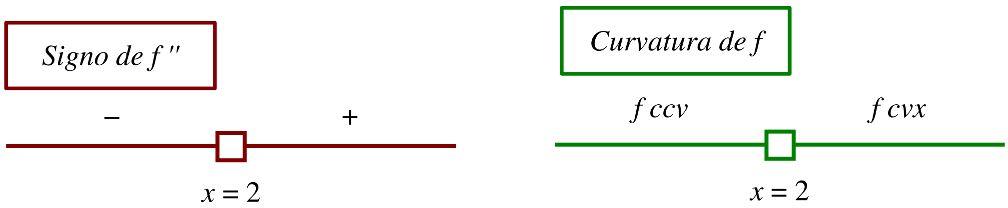
Sea $y = f(x)$ una función dos veces derivable en cada punto de I.

- Si $f'' > 0$ en todo punto entonces f es convexa en el intervalo I .
- Si $f'' < 0$ en todo punto entonces f es cóncava en el intervalo I .

☞ Ejemplo: estudiemos la curvatura de la función $f(x) = x^3 - 6x^2$.

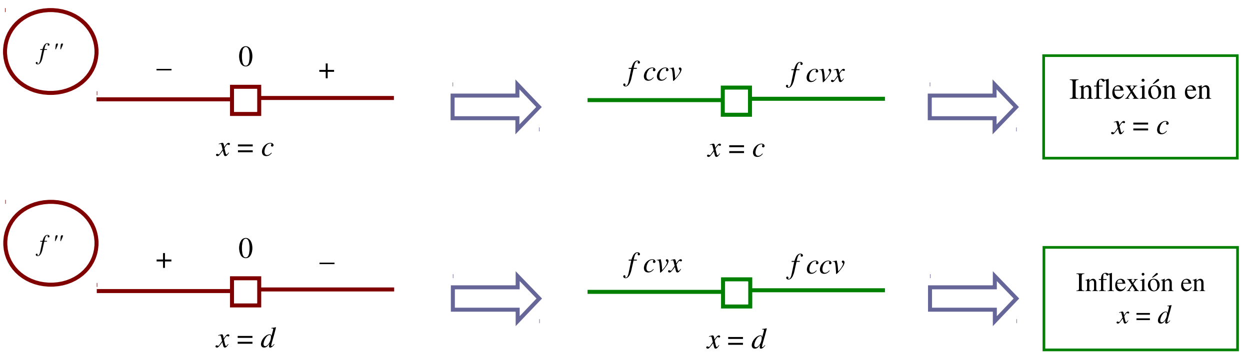
a) Hallamos la derivada segunda: $f‘(x) = 6x - 12$

b) Estudiamos el signo de la derivada segunda: y deducimos el esquema de curvatura:



c) Para $x = 2$ hay un punto de inflexión, pues cambia la curvatura.

Observemos cómo encontrar los puntos de inflexión:



☞ Nota: Observemos que si una función dos veces derivable tiene punto de inflexión entonces la derivada segunda es cero, pero esto no es suficiente: debe cambiar el signo de la derivada segunda.

☞ Ejemplo: Hallemos a y b sabiendo que $(2\,,-4)$ es un punto de inflexión de la curva $y = x^3 + ax^2 + bx - 10$.

a) Primero hallamos la derivada segunda:

$$f\,(x) = x^3 + ax^2 + bx - 10 \to f'\,(x) = 3x^2 + 2ax + b \to f''\,(x) = 6x + 2a$$

b) Como el punto $(2\,,-4)$ está en la curva, entonces $f\,(2) = -4$:

$$2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 10 = -4$$

c) En la inflexión la derivada segunda debe ser cero, así $f''\,(2) = 0$:

$$6 \cdot 2 + 2a = 0$$

d) De (b) y (c) deducimos que $a = -6$ y $b = 11$.

7.Representación gráfica.

Hubo un tiempo, no muy lejano, en el que las gráficas de las funciones sólo podían obtenerse de una forma: a mano. Uno tomaba unos bolígrafos de colores, una cuartilla de papel (cuadriculada si era posible) y una regla. Si eras afortunado, tenías una calculadora.

Con la fórmula delante, $y = f(x)$, se pasaba a estudiar los siguientes puntos:

- ✔ Dominio.
- ✔ Continuidad. Asíntotas verticales.
- ✔ Monotonía.
- ✔ Extremos.
- ✔ Prolongación en el infinito. Asíntotas horizontales u oblicuas.
- ✔ Tabla de variación.

Una vez concluido ese análisis, se pasaba a dibujar en primer lugar las asíntotas -si las había- y los puntos remarcados en la tabla de variación. Finalmente, con un poco de pericia, se realizaba el dibujo a mano alzada.

Bastante tiempo después se popularizaron las computadoras personales, y con las hojas de cálculo podían obtenerse buenas gráficas siguiendo un proceso que aún no nos libraba de estudiar buena parte de esos puntos. Pero suponía un gran salto cualitativo.

En el momento de escribir esto disponemos ya de programas de computación, muy fáciles de usar, que nos liberan de todo ese trabajo, y nos permiten centrarnos en la interpretación y en la obtención de soluciones.

No obstante lo anterior, vamos a realizar el estudio señalado arriba estudiando y representando:

El hecho de que existan esos programas, fáciles de usar, no significa que no debamos saber realizar el estudio de los puntos anteriores.

Todos debemos memorizar las tablas de multiplicar, y saber realizar **simples** productos y divisiones manualmente. Pero una pero una vez aprendido esto, los productos tediosos los hacen las calculadoras ;-)

$$a(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \le -1 \\ x^2 - 3x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases} \qquad b(x) = |x-1| + |x+2|$$

$$c(x) = x \cdot |x-3| \qquad d(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$e(x) = \frac{3x-2}{x-1} \qquad f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{x-2} \qquad h(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}$$

$$i(x) = \frac{2x}{x^2-4} \qquad j(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

$$k(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad l(x) = \ln \frac{x-3}{x-1}$$

$$m(x) = \sqrt{4-x^2} \qquad n(x) = x - 2\,\mathrm{sen}\,x\,,\ x \in [-\pi\,,\pi]$$

Ejercicios

1. [S/06] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x)=\ln(x^2+1)$$

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función f (puntos y valores de la función).

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión de abscisa negativa.

2. [S/06+15] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x)=x^2-|x|$$

a) Estudia la derivabilidad de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).

3. [S/06] Determina un punto de la curva de ecuación
$$y=x\,\mathrm{e}^{-x^2}$$
en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

4. [S/06] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=x^2+px+q$. Calcula los valores de p y q sabiendo que la función f tiene un extremo en $x=-6$ y su valor en él es -2.

5. [S/06] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$$

a) Determina $a,b\in\mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(2,2)$ y tiene un punto de inflexión de abscisa $x=0$.

b) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

6. [S/07] Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x}}$$

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas y ordenadas).

b) Calcula el punto de inflexión de la gráfica de f.

7. [S/07] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x)=2x^3+12x^2+ax+b$$
Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y=2x+3$.

8. [S/07] Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x)=x^2\ln(x)$$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\sqrt{e}$

9. [S/07] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x)=x^2\,\mathrm{e}^{-x}$$

a) Determina los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

10. [S/07] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x)=(x-3)\,\mathrm{e}^{x}$$

a) Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

11. [S/08] Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x)=\frac{x+1}{\mathrm{e}^{x}}$$
determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

12. [S/08] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x)=(3x-2x^2)\,\mathrm{e}^{x}$$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

b) Calcula los extremos relativos de la función (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

13.[S/08] Sea $f:[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\mathrm{e}^{x}(\operatorname{sen} x+\cos x)$$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

14.[S/09] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

Calcula los valores de a,b,c,d sabiendo que:

- Es $(0,1)$ un punto de inflexión de su gráfica.
- f tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x=1$
- La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$ tiene pendiente 1.

15.[S/09] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=x^2\cdot|x+3|$$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f.

b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f. Calcula sus extremos relativos (abscisas y ordenadas)

16.[S/09] La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

sabemos que tiene extremos relativos en $(0,0)$ y $(2,2)$. Calcula a,b,c,d.

17.[S/10] Sea la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } 0\le x\le 2\\ cx & \text{si } 2<x\le 4\end{cases}$$

a) Sabiendo que f es derivable en todo el dominio y que verifica $f(0)=f(4)$, determina los valores de a, b y c.

b) Para $a=-3, b=4, c=1$ halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

18.[S/10] Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=a\operatorname{sen}(x)+bx^2+cx+d$$

determina los valores de las constantes a, b, c, d sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto $(0,4)$ y que la segunda derivada de f es $f''(x)=3\operatorname{sen}(x)-10$.

19.[S/11] Sea la función definida por

$$f(x)=\frac{3x^4+1}{x^3} \quad \text{si } x\neq 0$$

a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.

b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

20.[S/11] Sea la función $f:\left[\frac{1}{\mathrm{e}},4\right]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x-\ln(x)+a & \text{si } \frac{1}{\mathrm{e}}\le x\le 2\\ bx+1-\ln(2) & \text{si } 2<x\le 4\end{cases}$$

a) Calcula los valores de a y b para que f sea derivable en el intervalo $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},4\right)$.

b) Para $a=0$ y $b=\frac{1}{2}$ halla los extremos absolutos de f (abscisas y valores obtenidos).

21.[S/11] En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad, x, es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula $-x^2+70x$, mientras que para edades iguales o superiores a 50 años los ingresos están determinados por la expresión,

$$\frac{400x}{x-30}$$

Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a qué edad se alcanza.

22.[S/12] Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$$

a) Halla los extremos absolutos de f en $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$.

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\mathrm{e}$.

23.[S/12] Sea la función f definida por

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x} \quad \text{si } x\neq 1$$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función f.

b) Halla sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

24.[S/12] Sea la función definida por

$$f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} \quad \text{si} \quad x\neq -1\,,\, x\neq 2$$

a) Estudia y calcula las asíntotas de su gráfica.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

c) Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de f donde ésta corta a la asíntota horizontal.

25.[S/12] Sea la función $f:[1\,,\mathrm{e}] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x^2-8\ln(x)$$

a) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

b) Calcula los extremos absolutos y relativos de la función f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) Estudia los intervalos de curvatura.

26.[S/12] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\mathrm{e}^x\left(x^2-x+1\right)$$

a) Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.

c) Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f.

27.[S/12] Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\mathrm{e}^x(x-2)$$

a) Calcula las asíntotas de f .

b) Halla los extremos relativos (abscisas y valores) y los intervalos de monotonía.

c) Determina, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de f .

28.[S/12] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\ln\left(x^2+3x+3\right)-x$$

a) Halla sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas y valores que se alcanzan).

b) Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-2$.

29.[S/13] Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

Determina a, b y c sabiendo que la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y+x=-3$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x=1$.

30.[S/13] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de f tiene abscisa $x=1$ y que f tiene un mínimo relativo en $x=2$ de valor – 9. Calcula a, b y c.

31.[S/14] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

d) Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga tiene un punto de inflexión de abscisa $x=\dfrac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x=0$ tenga de ecuación $y=5-6x$.

e) Para $a=3$, $b=-9$ y $c=8$, calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

32. [S/14] Determina el punto de la gráfica de la función definida por $f(x)=\dfrac{1}{2x}+\ln x$ en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

33.[S/14] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función derivable definida por

$$f(x)=\begin{cases} a-x & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{b}{x}+\ln x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) [1,25] Calcula a y b.

b) [1,25] Para $a=3$ y $b=2$ calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[0\,,\mathrm{e}]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

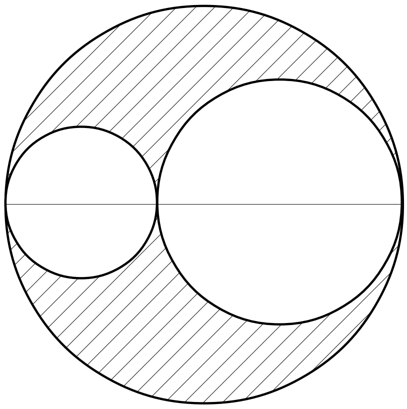
34.[S/15] Determina los coeficientes de una función f polinómica de tercer grado sabiendo que presenta un extremo local en el punto de abscisa $x=0$, que $(1\,,0)$ es punto de inflexión de su gráfica de f así como que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3.

Optimización

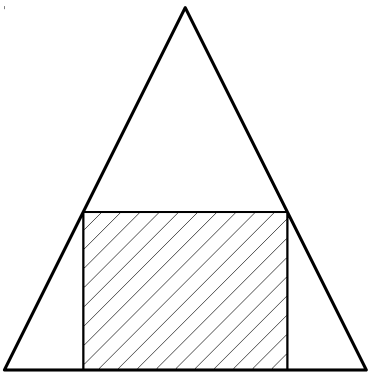
35.[S/96] En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta a 500 metros río arriba se ha construido una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta 1.200 ptas. el metro y que el tendido sobre el agua cuesta 2.000 ptas. el metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?

36.[S/97] Dada una circunferencia de radio r, se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a la circunferencia dada.

¿Qué longitud debe tener cada uno de estos diámetros para que sea máxima el área de la región comprendida entre las circunferencias interiores y la exterior (la región rayada en la figura)

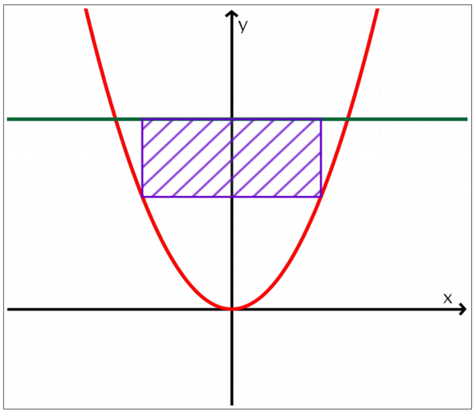


37.[S/97] Dado un triángulo isósceles de base 8 cm. Y altura 5 cm., calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse dentro de dicho triángulo como se indica en la figura



38.[S/00] Una empresa quiere fabricar vasos de cristal de forma cilíndrica con una capacidad de 250 centímetros cúbicos. Para utilizar la mínima cantidad posible de cristal, se estudian las medidas apropiadas para que la superficie total del vaso sea mínima. ¿Cuáles deben ser esas medidas? Justifica la respuesta

39.[S/02] Considera el recinto limitado por la curva $y = \frac{1}{3}x^2$ y la recta $y = 9$. De entre todos los rectángulos situados como el de la figura, determina el que tiene área máxima.



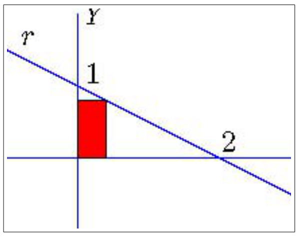
40.[S/04] Se desea construir una caja de base cuadrada con una capacidad de 80 cm³. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1 € / cm² y para la base se emplea un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

41.[S/06] Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima.

42.[S/07] Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

43.[S/07] Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es 2 y 3 euros por centímetro cuadrado, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 metro. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?

44.[S/07] De todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación (ver figura), determina el que tiene mayor área.



45.[S/08] De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto $(1\,,2)$, encuentra aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Halla el área de dicho triángulo.

46.[S/08] De entre todos los rectángulos de perímetro 8 *cm*, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

47.[S/09] Se divide un segmento de longitud L = 20 cm. en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura.

Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

48.[S/09] De entre todos los rectángulos cuya área mide 16 cm^2, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud .

49.[S/09] De todos los triángulos cuya base y altura suman 20 cm., ¿qué base tiene el de área máxima?

50.[S/10] La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm . Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo?

(Recuerda que el volumen del cono es: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$)

51.[S/10] Una hoja de papel tiene que contener 18 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm . Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

52.[S/11] Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m^2 . Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

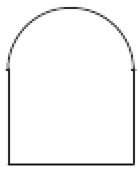
53.[S/11] En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y = -x^2 + 3$.

Determina las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

54.[S/11] Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro.

¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?

55.[S/11] Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo.



De entre todas las ventanas normandas de perímetro 10 m , halla las dimensiones del marco de la de área máxima.

56.[S/11] Sea $f:[1\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2\,,0)$. ¿Cuál es esa distancia?

57.[S/12] Un alambre de 2 m de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.

58.[S/12] De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 unidades, determina las dimensiones del de área máxima.

Representación de Gráficas

59. [97] Considera la función f definida para $x \neq 0$ por la relación

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 4}{x}$$

a) Halla sus asíntotas.

b) Determina sus extremos locales.

c) Dibuja la gráfica de f indicando su posición respecto de las asíntotas.

60. [99+] Dada la función $f : (0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x}$$

a) Obtén sus asíntotas.

b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales si los hay.

c) Esboza la gráfica de f.

61. [99+] Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

Dibuja su gráfica determinando previamente los siguientes elementos: asíntotas, extremos locales, intervalos de monotonía y la existencia de simetrías.

62. [S/00] Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 2} \quad (x \neq -2)$$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f .

b) Determina los intervalos de monotonía y los extremos locales de f .

c) Haz un esbozo de la gráfica de f .

63. [S/02] Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{9x - 3}{x^2 - 2x} \quad (x \neq 0\,,\, x \neq 2)$$

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f .

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

c) Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de f .

64. [S/03] Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (x + 3)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Esboza su gráfica obteniendo previamente sus asíntotas, extremos y puntos de inflexión.

65. [S/04 +S/14] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$$

Esboza su gráfica obteniendo previamente sus asíntotas, intervalos de monotonía y puntos donde alcanza sus extremos relativos.

66. [S/05+15] Sea f la función definida para $x \neq 1$ por

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x - 1}$$

a) Halla las asíntotas de su gráfica

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

c) Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de la función.

d) Esboza la gráfica de f.

67. [S/05] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{5x + 8}{x^2 + x + 1}$$

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados.

b) Halla las asíntotas de la gráfica de f .

c) Determina los intervalos de monotonía de f y calcula sus extremos relativos o locales.

d) Esboza la gráfica de f .

68. [S/05] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = (x - 1)^2\,\mathrm{e}^{-x}$$

Esboza su gráfica obteniendo previamente sus asíntotas, intervalos de monotonía y puntos donde alcanza sus extremos relativos.

69. [S/06] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Esboza su gráfica obteniendo previamente sus asíntotas, intervalos de monotonía y puntos donde alcanza sus extremos relativos.

70.[S/06] Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{x^4+3}{x} \quad (x \neq 0)$$

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f.

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f.

c) Esboza la gráfica de f.

71.[S/07] Sea f la función definida, para $x \neq 2$ y $x \neq -2$, por

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

a) Determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) Esboza la gráfica de f.

72.[S/08] Esboza la gráfica de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$$

73.[S/09] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$$

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, así como sus extremos.

b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f.

c) Determina las asíntotas de la gráfica de f.

d) Esboza la gráfica de f.

74.[S/10] Sea f la función definida como

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} \text{ si } x \neq \pm 1$$

Esboza su gráfica obteniendo previamente sus asíntotas, intervalos de monotonía y puntos donde alcanza sus extremos relativos.

Cuestiones

1. Explica por qué una función polinómica de segundo grado siempre tiene un punto de tangente horizontal.

2. La recta tangente a una curva, ¿puede cortarse con ella en varios puntos o sólo en uno?

3. Dibuja la gráfica de una curva con infinitos puntos en los que la tangente es la recta horizontal $y = 1$.

4. Una función tiene en un punto una recta tangente horizontal. ¿Debe ser ese punto un extremo relativo?

5. Si una función polinómica tiene para $x = a$ una inflexión, ¿cuánto es la derivada segunda para ese valor?

6. ¿Cuántos puntos de inflexión como máximo puede tener una función polinómica de cuarto grado?

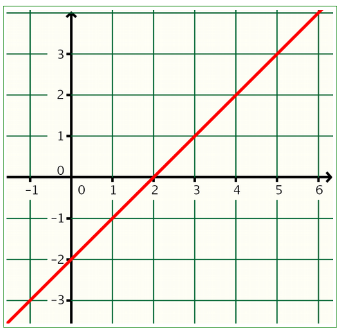
7. La función $y = |x - 2|$ tiene un mínimo para $x = 2$, pero no es la derivada igual a cero. ¿Cómo es eso posible?

8. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo para $x = a$. ¿Debe ser entonces $f'(a) = 0$? ¿Y si f es una función derivable?

9. Dibuja la gráfica de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya derivada sea positiva para $x < 3$ y negativa para $x > 3$, pero que no tenga un máximo relativo para $x = 3$. (Sugerencia: ¿discontinua en $x = 3$?)

10.*Averigua en qué punto de la curva $y = x^3 - 3x^2$ la recta tangente tiene pendiente mínima.

11. La gráfica de la función derivada $y = f'(x)$ es:



a) Estudia la monotonía de f y determina dónde alcanza sus extremos.

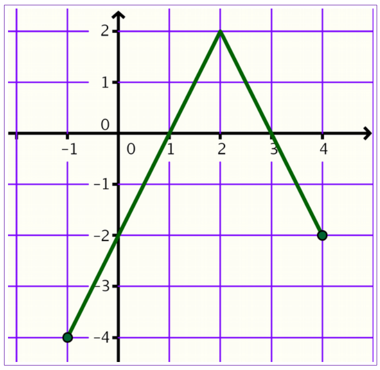
b) Estudia la curvatura de f. ¿Tiene puntos de inflexión?

12. La gráfica de la derivada de la función $y = f(x)$ es una parábola cóncava que corta al eje de abscisas para $x = -1$ y para $x = 3$.

a) Estudia la monotonía de $y = f(x)$. ¿Dónde alcanza sus extremos?

b) Estudia la curvatura de la gráfica de f. ¿Tiene puntos de inflexión?

13. La gráfica de la derivada de $f : [-1\,,4] \to \mathbb{R}$ es:



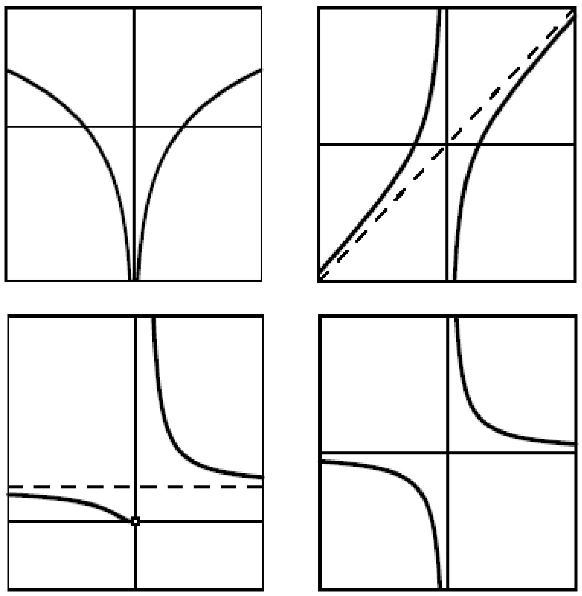
a) Estudia la monotonía de f y determina dónde alcanza sus extremos relativos.

b) Estudia la curvatura de f. ¿Tiene puntos de inflexión?

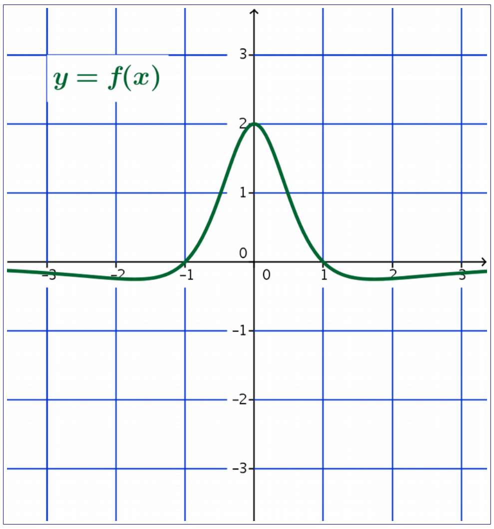
14.[S/05] Obtén las asíntotas de las funciones:

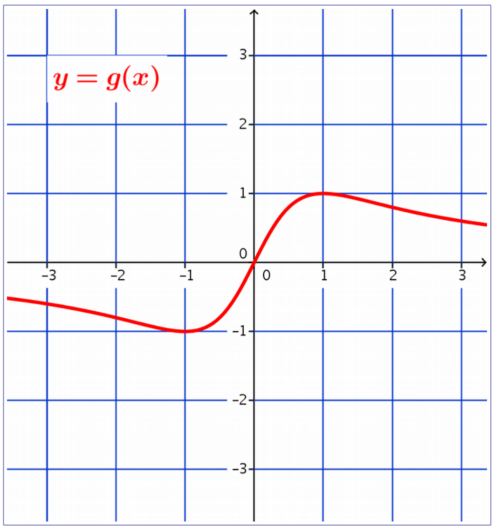
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \quad , \quad g(x) = e^{1/x} \quad , \quad h(x) = \ln|x|$$

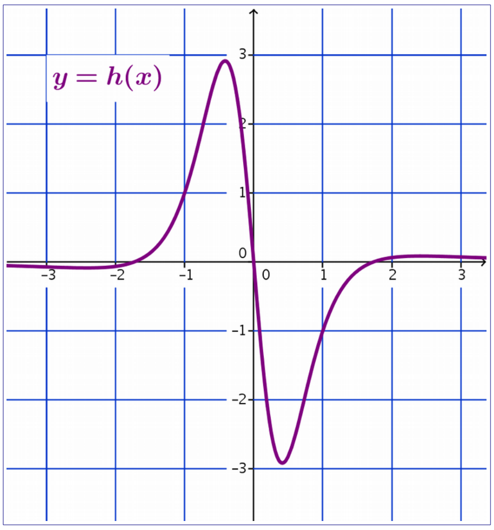
¿Qué gráfica corresponde a cada función?



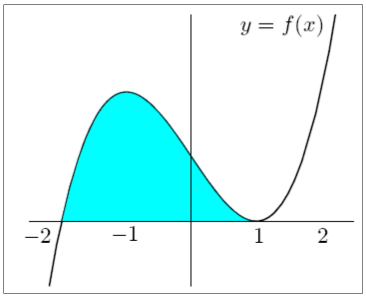
15. Las tres gráficas siguientes corresponden a la una función, a la de su derivada y a la de su derivada segunda. ¿Cuál es cada una?







16. [S/05] Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax + bx + c$ cuya gráfica es:



17. La derivada segunda de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es positiva en todo punto.

a) ¿Como es la gráfica $y = f(x)$?

b) ¿Y cómo es la gráfica $y = f'(x)$ de su función derivada?

<u>Distribución temática ejercicios</u>

Tangente / Normal

1b , 3 , 5b , 8b , 10b , 11 , 22b , 28b

Monotonía / Extremos

1a , 2bc , 6a , 8a* , 9a , 10 a , 12 , 13 a , 15b , 19b , 21 , 23b , 24b , 25 a , 26b , 27b , 28 a , 31b , 32*

Extremos en intervalo compacto

17b , 20b , 22 a , 25b , 33b

Curvatura / Inflexión

1b , 6b , 10b , 11 , 13b , 26c , 27c , 5b

Obtener parámetros

4 , 5 a , 7 , 14 , 16 , 18 , 29 , 30 , 31a , 34

Límites / Asíntotas

9b , 19 a , 23 a , 24ac , 26a , 27 a

Continuidad / Derivabilidad

2 a , 15 a , 17 , 20 a

Autoevaluación

1. Consideremos la función f definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+3} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función.

b) Analiza su derivabilidad.

c) Halla el valor máximo y el valor mínimo que alcanza la función en el intervalo $[-2\,,2]$.

d) Obtén las asíntotas de la gráfica de f.

2. Determina a, b y c en la función f definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

en estos dos casos:

a) Sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión para $x = 1$ y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y = -3x + 3$.

b) Si su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x = 1$ y tiene un extremo relativo en el punto $(-1\,,4)$.

3. Sea $f : (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

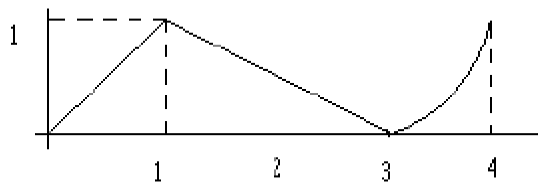
$$f(x) = x^2 \ln(x) \quad , \quad x > 0$$

a) Estudia la monotonía de f y calcula el valor mínimo que toma la función.

b) ¿Cuánto debería ser $f(0)$ para que fuese continua para $x = 0$?

c) Obtén la ecuación de la tangente para $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.

4. De una función $f : [0\,,4] \to \mathbb{R}$ se sabe que $f(1) = 3$ y que la gráfica de su función derivada es



a) Halla la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. ¿En qué punto alcanza la función su máximo absoluto?

c) Estudia la concavidad y la convexidad de f.

5. Determina los puntos de la parábola de ecuación

$$y = 5 - x^2$$

que están mas próximos al origen de coordenadas.

Calcula la distancia entre los puntos obtenidos y el origen de coordenadas.

Autoevaluación

1.

a) Como está construida con un trozo de función continua y uno de función racional, sólo puede ser discontinua para $x=-3$ (cero del denominador) y para $x=0$ (separa-fórmulas).

Veamos detenidamente en estos puntos:

$\boxed{x=-3}$

V: $f(-3)=\emptyset$

L: $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=\left[\dfrac{3}{0}\right]=\pm\infty$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x=-3$.

$\boxed{x=0}$

V: $f(0)=0$

$$\text{L: } \lim_{x\to 0} f(x)\ \begin{cases} f(0-)=\dfrac{-0}{3}=0 \\ f(0+)=0\cdot \mathrm{e}^{0}=0 \end{cases}$$

Concluimos que es continua para $x=0$.

a) Podemos derivar cada trozo directamente:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-3}{(x+3)^2} & \text{si} \quad x<0 \\ (1-x)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

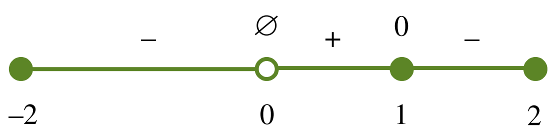
Para $x=-3$ es claro que no hay derivada.

Para $x=0$, como f es continua, podemos obtener así las derivadas laterales:

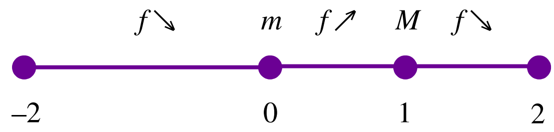
$$\text{D.L.} \begin{cases} f'_{-}(0)=\dfrac{-3}{9}=-\dfrac{1}{3} \\ f'_{+}(0)=(1-0)\,\mathrm{e}^{-0}=1 \end{cases}$$

Como no coinciden, tenemos que f no es derivable para $x=0$ (es un punto *anguloso*).

b) Estudiamos el signo de la derivada en $[-2\,,2]$, obteniendo:



De ahí deducimos:



Una tabla de variación nos dará la respuesta:

x	-2		0		1		2
y	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	$\frac{2}{\mathrm{e}^2}$

El valor máximo es 2, que se alcanza para $x=-2$, y el valor mínimo es 0, que se alcanza para $x=0$.

c) Verticales: del estudio de la continuidad deducimos que sólo tiene una asíntota vertical:

$$x=-3$$

Horizontales: los límites en el infinito son

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{x+3}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{x}}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

Vaya, usemos la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$$

Concluimos que hay dos asíntotas horizontales:

$y=-1$ para $x\to -\infty$

$y=0$ para $x\to +\infty$

2. Primero, derivemos dos veces la función:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \to f''(x)=6ax+2b$$

a) Para $x=1$ hay inflexión así:

$$f''(1)=0\to 6a+2b=0$$

Como la tangente para $x=1$ es $y=-3x+3$ entonces sustituyendo obtenemos:

$$f(1)=-3\cdot 1+3=0\to a+b+c=0$$

Y la derivada es igual a la pendiente:

$$f'(1)=-3\to 3a+2b+c=-3$$

Reuniéndolo todo y resolviendo el sistema correspondiente obtenemos:

$$a=3\,,\ b=-9\,,\ c=6$$

b) Como corta al eje OX para $x = 1$:

$$f(1) = 0 \to a + b + c = 0$$

Como pasa por el punto $(-1\,, 4)$:

$$f(-1) =\to -a + b - c = 4$$

Tiene un extremo para $x = -1$:

$$f'(-1) = 0 \to 3a - 2b + c = 0$$

Reuniéndolo todo y resolviendo el sistema correspondiente obtenemos:

$$a = 3\,,\; b = 2\,,\; c = -5$$

3.

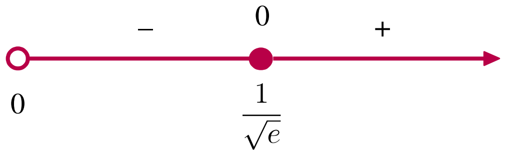
a) Derivemos en primer lugar. Para $x > 0$ es

$$f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

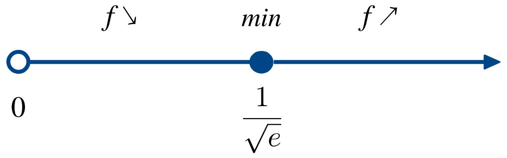
Ceros:

$$2 \ln x + 1 = 0 \to \ln x = \frac{-1}{2} \to x = \mathrm{e}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

Intervalos de signos de la derivada:



De ahí deducimos la monotonía de la función:



En el esquema de monotonía apreciamos que la función tiene un mínimo absoluto. Calculemos:

$$x = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \to y = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^2 \ln \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} = -\frac{1}{2\,\mathrm{e}}$$

b) El valor debería coincidir con el límite:

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x\to 0+} \left(x^2 \ln x\right) = [0 \cdot (-\infty)] \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right] = \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-2/x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{-2} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

c) La tangente para $x = \sqrt{\mathrm{e}}$ es:

$$y - f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)\left(x - \sqrt{\mathrm{e}}\right)$$

Sustituyendo:

$$y - \frac{\mathrm{e}}{2} = 2\sqrt{\mathrm{e}}\left(x - \sqrt{\mathrm{e}}\right)$$

Simplificando

$$y = 2\sqrt{\mathrm{e}}\,x - \frac{3\,\mathrm{e}}{2}$$

4.

a) La recta tangente para $x = 1$ es:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

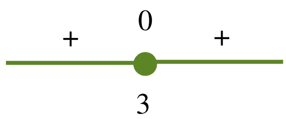
Sustituyendo:

$$y - 3 = 1 \cdot (x - 1$$

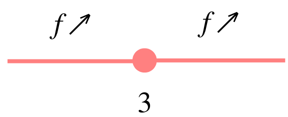
Y simplificando

$$y = x + 2$$

b) El signo de la derivada primera lo vemos en la gráfica:

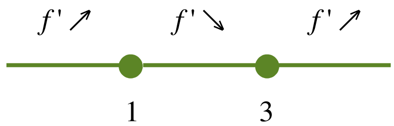


De ahí deducimos la monotonía de f:

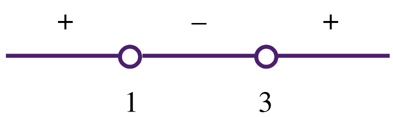


Como vemos, la función siempre crece, con lo que alcanza su máximo absoluto para $x = 4$.

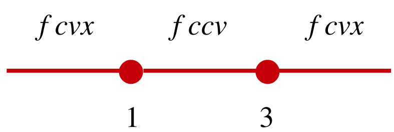
c) De la monotonía de la derivada f':



deducimos el signo de la derivada segunda f'':



Así, la curvatura de f nos queda:



Para $x = 1$ y para $x = 3$ hay sendos puntos de inflexión, al cambiar la curvatura en ellos.

5. Sea $P = (x\,,y)$ un punto genérico de la gráfica. Es:

$$y = 5 - x^2 \quad (L)$$

Queremos que la distancia de $P = (x\,,y)$ a $O = (0\,,0)$ sea mínima:

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (F)$$

Para expresar la función con sólo una variable, lo más fácil es despejar de la ligadura x^2:

$$y = 5 - x^2 \;\rightarrow\; x^2 = 5 - y$$

Así ahora ya nos queda la función distancia sólo con la variable y:

$$d = \sqrt{5 - y + y^2}$$

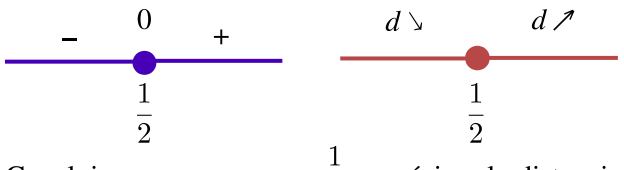
Derivamos:

$$d' = \frac{2y-1}{2\sqrt{5-y+y^2}}$$

Igualamos a cero:

$$d' = 0 \rightarrow 2y - 1 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Del signo de la derivada deducimos la monotonía:



Concluimos que para $y = \dfrac{1}{2}$ es mínima la distancia, siendo

$$d = \sqrt{5 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

Vamos a hallar la x:

$$y = \frac{1}{2} \xrightarrow{x^2=5-y} x^2 = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

De donde

$$x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Así, hay dos puntos en la parábola cuya distancia al origen es mínima:

$$P_1 = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\,,\frac{1}{2}\right) \;,\; P_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\,,\frac{1}{2}\right)$$

Y dicha distancia mínima es

$$d = \frac{\sqrt{19}}{2}$$