TEMA 1

AMPLIACIÓN DE DERIVADAS

Contenidos

1. Derivada y función derivada.
2. Tangencia
3. Continuidad y derivabilidad.
4. Regla de L'Hôpital.
5. Derivada cero.
6. Ampliación: Teoremas del valor medio.
7. Anexo: Cálculo de Derivadas

Tiempo estimado

15 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Conocer el concepto de derivada de una función en un punto.
2. Conocer el concepto de función derivada y entre ésta y la derivada de una función en un punto. Saber hallar el dominio de derivabilidad de una función.
3. Identificar a partir de la expresión analítica o gráfica de una función los puntos donde ésta es derivable y los puntos donde no lo es (dominio de derivabilidad)
4. Saber determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de una función en un punto.
5. Reconocer la relación entre continuidad y derivabilidad.
6. Saber estudiar la derivabilidad de una función, particularmente las definidas a trozos partiendo de funciones elementales.
7. Conocer la regla de L'Hôpital y saber aplicarla al cálculo de límites para resolver indeterminaciones.
8. Conocer y saber aplicar la regla de la cadena, así como su aplicación al cálculo de las derivadas de funciones elementales..

1.Función derivada.

Recuerda que ya en el curso anterior realizamos una introducción a las derivadas. Comenzamos con la definición de derivada de una función en un punto y repasando aspectos básicos.

❑ Definición.

Sea f una función definida en un intervalo abierto I y sea $x \in I$.

La derivada $f'(x)$ está definida como sigue si el límite existe:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Al límite anterior también se le llama tasa de variación de *f* en x.

¡Atención! Puede ocurrir que dicho límite no exista en algunos valores: diremos que en ellos la función no es derivable.

☞ Ejemplo: hallemos la derivada de la función $f(x) = x^2$.

Calculemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

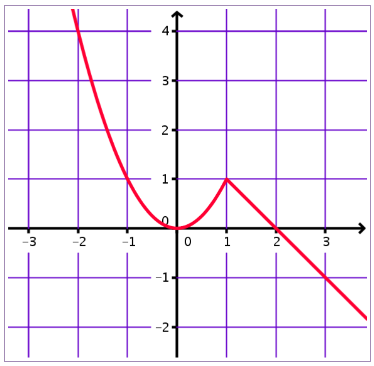
☞ Ejemplo: comprobemos que para $f(x) = 3x$ es $f'(x) = 3$.

☞ Gráfica: la gráfica de una función derivable es suave. Si una gráfica para $x = x_0$ está rota o es angulosa, no es derivable para dicho valor.

Recuerda: derivable = suaaaave

☞ Ejemplo: estudiemos gráficamente la derivabilidad de f siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -x + 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



Observamos que es derivable para $x \neq 1$ pero para $x = 1$ no hay derivada pues nos encontramos con un punto anguloso.

Ampliación: calcula los limites laterales que definen la derivada para $x = 1$ y observa que no coinciden: ¡no hay derivada!

❑ Notación.

La derivada de $y = f(x)$ para $x = x_0$ suele escribirse así:

$$f'(x_0) = Df(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

Esta última se lee "la derivada de y respecto de x para el valor x_0". Es una notación debida al matemático y filósofo Leibniz.

La última es llamada "notación diferencial" y en las Ciencias Experimentales es la más usada, al resumir qué es la derivada e indicar las variables. Por ejemplo, en la función $e = t^2$ la expresión

$$v(5) = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(5) = 10$$

nos señala que la velocidad en un instante es la derivada del espacio recorrido (*e*) respecto del tiempo (*t*).

La velocidad se obtiene "dividiendo un incremento infinitamente pequeño de espacio entre un incremento infinitamente pequeño de tiempo":

$$v(5) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

❑ Función derivada. Derivadas sucesivas

Observemos que esa fórmula define una función, que a cada valor de x le asocia la derivada de f para dicho valor de x.

Se llama función derivada de la función f a la definida mediante

$$x \to f'(x)$$

para aquellos valores en los que es f es derivable, y se designa por $f'(x)$.

Dada la función y=f(x) con dominio D, al conjunto
D' = {x ∈ D : f es derivable en x}
se le llama dominio de derivabilidad.

☞ Ejemplo: comprueba que la función derivada de $f(x) = 2x$ es la definida por $f'(x) = 2$.

La derivada f' es una función y, a su vez, puede intentar derivarse. A la función derivada de f' se la llama derivada segunda de f y se la designa por f''.

A una función f podemos asociarle, derivando sucesivamente, las funciones derivadas $f', f'', f''', \ldots$. A éstas se les llama derivadas sucesivas de f.

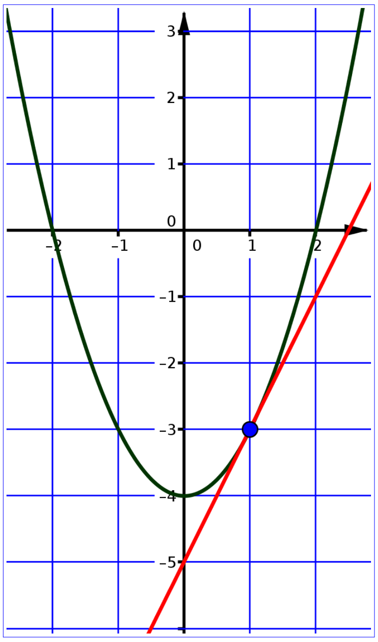
$$f \xrightarrow{D} f' \xrightarrow{D} f'' \xrightarrow{D} f''' \xrightarrow{D} \ldots$$

☞ Ejemplo: Observemos las derivadas sucesivas siguientes:

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{D} f'(x) = 2x \xrightarrow{D} f''(x) = 2 \xrightarrow{D} f'''(x) = 0 \xrightarrow{D} \ldots$$

2.Tangente a una curva.

Ya el año pasado estudiamos el problema de obtener la ecuación de la recta tangente a una curva. Esta cuestión lleva directamente al concepto de derivada, que se usa para definir la recta tangente a la gráfica de una función:



La tangente a la curva $y = f(x)$ de una función derivable en el punto de abscisa $x = x_0$ tiene de pendiente

$$m = f'(x_0)$$

Por ello, la ecuación de dicha recta tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

☞ Ejemplo: obtengamos la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 4$ para $x = 1$.

✔ Derivamos

$$f(x) = x^2 - 4 \ \to \ f'(x) = 2x$$

✔ Sustituimos

$$f(1) = -3 \quad , \quad f'(1) = 2$$

✔ Su ecuación es:

$$y - (-3) = 2 \cdot (x - 1) \ \to \ y = 2x - 5$$

Observemos que la pendiente $m = 2$ es la derivada para dicho valor.

3.Continuidad y derivabilidad

Las funciones que nos encontramos son derivables para todos los valores del dominio salvo, tal vez, en determinados puntos especiales (singularidades).

Para estudiar la derivabilidad de una función conviene previamente estudiar su continuidad, porque hay una estrecha relación entre la continuidad y la derivabilidad de una función:

> Sea f definida en un intervalo abierto I y $x_0 \in I$.
>
> Se cumple:
>
> f es derivable en $x = x_0 \rightarrow f$ es continua en $x = x_0$.

> En la práctica se usa mucho esta propiedad a través del llamado contra-recíproco:
>
> f no es continua en $x = a$
>
> $\downarrow$
>
> f es no es derivable en $x = a$

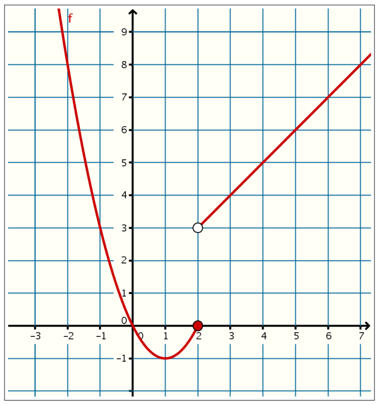
☞ Práctica: A la hora de analizar la continuidad recordemos algunos puntos en los que puede ser discontinua una función: separa-fórmulas, ceros del denominador y ceros del argumento de un logaritmo.

A la hora de estudiar la derivabilidad, podremos derivar directamente los trozos en todos los valores que no sean separa-fórmulas. Y entonces analizamos detenidamente.

☞ Ejemplo: Estudiemos la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x + 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

y obtengamos su función derivada.



¿Cómo sería un breve análisis gráfico sabiendo que su gráfica es la representada a la derecha?

Pasemos a un estudio algebraico:

Continuidad: como está construida con trozos de funciones continuas, sólo puede ser discontinua para $x = 2$ (separa-fórmulas). Veamos:

$x = 2$

VALOR: $f(2) = 0$

LÍMITE: $$\lim_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2-} (x^2 - 2x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2+} (x + 1) = 3 \end{cases}$$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

Derivabilidad: como está construida con trozos de funciones derivables, podemos derivar directamente para $x \neq 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Ahora, en el separa-fórmulas, detenidamente:

$x = 2$

Como no es continua, no puede ser derivable en $x = 2$.

Pero si la función es continua en $x = x_0$, entonces puede ser derivable para ese valor o puede no serlo. La siguiente propiedad nos será de gran ayuda:

Sea f continua en un intervalo abierto I y $x_0 \in I$.

Si f es derivable para $x \neq x_0$, entonces las derivadas laterales para $x = x_0$ vienen dados por:

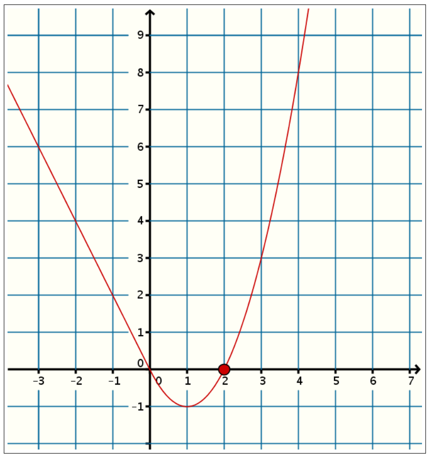
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} f'(x) \quad , \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f'(x)$$

Y f sólo es derivable para $x = x_0$ si ambos números coinciden.

Esos límites laterales de la derivada se designan por:
f ' (a-) y f ' (a+)

☞ Ejemplo: Estudiemos la derivabilidad de la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$



y obtengamos su función derivada.

Continuidad: como está construida con trozos de funciones continuas, sólo puede ser discontinua para $x = 0$ (separa-fórmulas). Veamos:

$x = 0$

VALOR: $f(0) = 0$

LÍMITE: $$\lim_{x \to 0} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0-} (-2x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0+} (x^2 - 2x) = 0 \end{cases}$$

Concluimos que es continua en $x = 0$.

Derivabilidad: como está construida con trozos de funciones derivables, podemos derivar directamente para $x \neq 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Ahora, en el separa-fórmulas, detenidamente:

$x = 0$

$$f \text{ continua en } x = 0 \to \begin{cases} f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0-} (-2) = -2 \\ f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0+} (2x - 2) = -2 \end{cases}$$

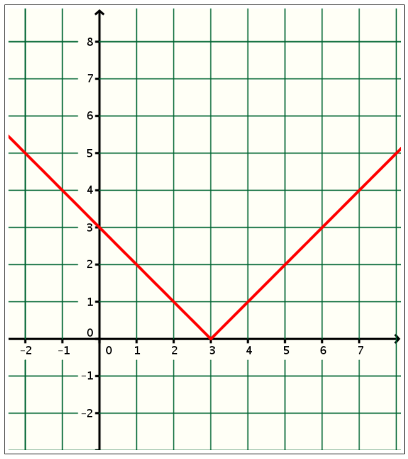
Concluimos que es derivable en este valor con $f'(0) = -2$.

Resumiendo:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

☞ <u>Ejemplo</u>: Estudiemos la derivabilidad de función valor absoluto:

$$f(x) = |x-3|$$



Es fácil expresarla como una función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -x+3 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$$

<u>Continuidad</u>: como está construida con trozos de funciones continuas, sólo puede ser discontinua para $x = 3$ (separa-fórmulas). Veamos:

$x = 3$

VALOR: $f(3) = 0$

LÍMITE: $$\lim_{x \to 3} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3-} (-x+3) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3+} (x-3) = 0 \end{cases}$$

Concluimos que f es continua en $x = 3$.

<u>Derivabilidad</u>: como está construida con trozos de funciones derivables, podemos derivar directamente para $x \neq 3$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 3 \\ -1 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$$

Para $x = 3$, como es continua, hallamos las derivadas laterales:

$$D.L. \begin{cases} f'_-(3) = \lim\limits_{x \to 3-} (-1) = -1 \\ f'_+(3) = \lim\limits_{x \to 3+} (1) = 1 \end{cases}$$

Como no coinciden concluimos que no es derivable en este valor.

> Cuando una función es continua pero no derivable en un valor, se dice que tiene un **punto anguloso**. Observemos el punto en la gráfica de la función.

4.Regla de L'Hôpital

En el curso pasado estudiamos los límites de funciones y aprendimos a calcularlos en casos sencillos. Así, por ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} \left(x^2+1\right) = 2^2+1 = 5$$

Observemos: como sabemos que $f(x) = x^2+1$ es una función continua el límite para $x \to 2$ coincide con el valor, que es $f(2) = 5$.

> Guillermo Francisco Antonio, marqués de L'Hôpital, la dio a conocer en 1692 en un libro sobre Cálculo Diferencial. Pero se sabe que la regla se debe a Bernoulli, que fue quien la desarrolló y demostró.

Un caso especial que estudiamos es el que sigue:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x}{x-1} = \left[\frac{2}{0}\right] = ¿?$$

Ahora tenemos que la función no es continua para $x = 1$ pues no tiene valor al ser un cero del denominador. En este caso el valor no proporciona directamente el límite, pero permite averiguar cuál es. ¿Lo recuerdas?

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x}{x-1} = \left[\frac{2}{0}\right] = \pm\infty$$

Hay discontinuidad de salto infinito y por ello $x = 1$ es una asíntota vertical.

También aprendimos a calcular un límite como el siguiente:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=¿?$$

En este caso tampoco hay valor y por ello sustituir no nos da directamente el límite. Pero indica el camino para obtenerlo:

(1) Esa expresión señala que puede dar cualquier límite (finito o infinito)

(2) Para obtenerlo es conveniente factorizar y simplificar:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{2(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{2}=3$$

Esa expresión se denomina indeterminación. Las más frecuentes $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$

La Regla de L'Hôpital muestra una propiedad de las derivadas que permite deshacer fácilmente muchas de las dos primeras indeterminaciones señaladas y, con trucos, algunas de las dos últimas.

Aquí un primer enunciado para límites en un punto:

Sean f y g funciones derivables en el intervalo $I=(a\,,b)$ con $g'(x)\neq 0$ si $x\in I$ y supongamos que

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right] \text{ó } \lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Si es

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

entonces

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

También es válida, con ciertos retoques:
- para límites por la izquierda
- límites sin laterales

☞ Ejemplo: Calculemos $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-4x+4}{2x^2-2}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-4x+4}{2x^2-2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'Hôp}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-4}{4x}=-\frac{3}{4}$$

☞ Ejemplo: Calculemos $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

En (*) hemos aplicado la Regla de L'Hôpital.

Observemos que hemos aplicado reiteradamente la regla, pues al aplicarla la primera vez hemos obtenido de nuevo indeterminado y estamos en condiciones de volver a aplicarla.

☞ Ejemplo: Calculemos, según los valores de la constante a el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\operatorname{sen} x}{x^3}$$

Sol.: $a\neq 1\to L=\infty \quad , \quad a=1\to L=\frac{1}{6}$

Recuerda: $a\neq 0\to\frac{a}{0}=\infty$

Fíjate cómo puede usarse para resolver una indeterminación $[\infty-\infty]$:

☞ Ejemplo: Calculemos $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\csc x\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\csc x\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = $$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\operatorname{sen} x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{*}{=} \ldots = 0$$

Recuerda que si $k \neq 0$:

$$\frac{k}{\infty}=0$$
$$\frac{k}{0}=\frac{\infty}{k}=k\cdot\infty=\infty$$

Aquí un segundo enunciado para límites en el infinito:

Sean f y g funciones derivables en el intervalo $I=(a\,,\infty)$ con $g'(x)\neq 0$ si $x\in I$ y supongamos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right] \text{ó } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Si es

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

También es válida, con ciertos retoques para $x\to-\infty$

☞ Ejemplo: Calculemos $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x+1}$.

Recuerda: $\ln(0+)=-\infty$ y $\ln(+\infty)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x+1}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]\overset{L'H\hat{o}p}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Observa cómo puede usarse para resolver una indeterminación $[0\cdot\infty]$:

☞ Ejemplo: Calculemos $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Recuerda: $\mathrm{e}^{-\infty}=0$ y $\mathrm{e}^{+\infty}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = [-\infty\cdot 0] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{+x}}=\left[\frac{+\infty}{\mathrm{e}^{+\infty}}=\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$
$$\overset{L'H\hat{o}p}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}=\left[\frac{1}{\mathrm{e}^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}\right]=0$$

☞ Ejemplo: Comprueba tú que es $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$.

¡Cuidado! A veces esta regla no puede aplicarse o es mejor de otra forma:

☞ Ejemplo: Por la regla de los grados:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x^2+1}{4x^2-1}=-\infty.$$

☞ Ejemplo: Calculemos $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x}-x$.

$$L = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{3}{1+1}=1{,}5$$

Primero hemos multiplicado y dividido por el conjugado; luego hemos aplicado la regla de los grados al cociente con radicales.

AMPLIACIÓN:

Hay también indeterminaciones en los cálculos de funciones con base y exponente variables: 0^0 , ∞^0 , 1^∞.

Para resolverlas primero se halla el logaritmo del límite y luego se deshace esto calculando la exponencial de lo obtenido.

☛ Ejemplo: Calculemos $\lim\limits_{x \to 0+} (1+x)^{-2/x}$.

Un cálculo directo nos da $L = 1^{-\infty}$: indeterminación.

Primero hallamos el logaritmo de ese límite:

$$\begin{aligned} \ln L &= \lim_{x \to 0+} \frac{-2}{x} \cdot \ln(1+x) = \lim_{x \to 0+} \frac{-2\ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \\ &\overset{*}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{-2/(1+x)}{1} = -2 \end{aligned}$$

En (*) hemos aplicado la Regla de L'Hôpital.

Ahora tomamos exponencial para deshacer eso:

$$L = \mathrm{e}^{-2}$$

Primero se halla el logaritmo del límite: recuerda que el exponente baja multiplicando al logaritmo de la base.
Y luego se calcula la exponencial de lo obtenido.

5.Derivada cero.

La propiedad que señalamos ahora la conocemos ya: en los extremos relativos (suaves) de las curvas la recta tangente es horizontal y por ello la derivada (su pendiente) es cero:

Sea f una función derivable en cada punto del interior de un intervalo I.

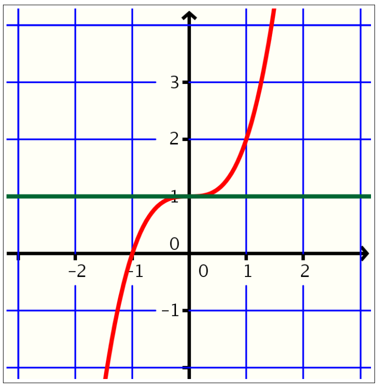
Si f tiene un extremo relativo para $x = x_0$ en el interior de I entonces

$$f'(x_0) = 0$$

El Teorema dice:
"Extremo relativo → Derivada cero"
Pero el recíproco no es cierto, como se estudia ahora.

¡CUIDADO! La derivada también puede ser cero y no ser en un extremo.

☛ Ejemplo: consideremos la $f(x) = x^3 + 1$.



Es muy fácil dibujar incluso manualmente la gráfica de esa función polinómica. Una sencilla tabla de valores y observar que nunca decrece.

El punto $(0\,,1)$ es un punto especial. Se le llama **punto crítico** porque la derivada es cero:

$$f'(x) = 3x^2 \to f'(0) = 0$$

La recta tangente en dicho punto es horizontal, pero no es ni un máximo ni un mínimo: la curva nunca decrece y se parece a un "rellano o descansillo" de escalera. La gráfica tiene el perfil de una silla y el punto sería el asiento, por ello algunos lo denominan "punto de silla".

Este tipo de punto es muy especial es un "punto de inflexión con tangente horizontal". La tangente es la recta horizontal y=1, que atraviesa a la curva. Esto puede no estar de acuerdo con nuestra idea intuitiva de lo que es una recta tangente.

6.Teoremas del valor medio (ampliación)

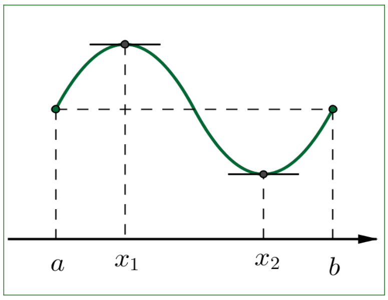
❑ Teorema de Rolle.

Este teorema es un caso particular del Teorema del Valor Medio. Este caso particular lo estableció en 1690 Michel Rolle, matemático francés.

Sea f una función continua en $[a\,,b]$ y derivable en $(a\,,b)$.

Si $f\,(a) = f\,(b)$ entonces existe al menos un punto $x_0 \in (a\,,b)$ tal que

$$f'\,(x_0) = 0$$



El significado geométrico está representado en la figura: de las hipótesis se deduce que la curva $y = f\,(x)$ debe tener tangente horizontal para alguna abscisa del interior y, por ello, la derivada es ahí cero.

Una útil consecuencia para acotar el **número de ceros** en un intervalo:

Si es f derivable en $(a\,,b)$, entonces entre cada dos ceros de la función la derivada tiene un cero.

En consecuencia, si f' tiene N ceros distintos en $(a\,,b)$ entonces f tiene a lo sumo $N+1$ ceros distintos en $(a\,,b)$.

☞ Ejemplo: Probemos que $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene solución única en $(-1\,,1)$

Es $f\,(x) = x^3 - 3x + 1$ es continua en $[-1\,,1]$ con $f\,(-1) = 3$ y $f\,(1) = -1$. Por el Teorema de Bolzano la ecuación $f\,(x) = 0$ tiene al menos una solución en $(-1\,,1)$.

Por otra parte, esa función es derivable en todo punto con

$$f'\,(x) = 3x^2 - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm 1$$

Como $f'\,(x)$ no tiene ceros en $(-1\,,1)$, entonces $f\,(x) = 0$ tiene como mucho una solución en $(-1\,,1)$.

Conclusión: la ecuación dada tiene sólo una solución en $(-1\,,1)$.

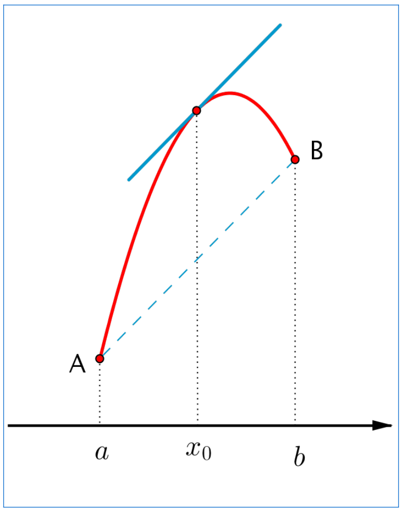
❑ Teorema de Lagrange.

Este Teorema es conocido como Teorema del Valor Medio para funciones derivables, Teorema de los incrementos finitos y Teorema de Lagrange. Es importante en Cálculo porque muchas de las propiedades de la funciones derivables pueden deducirse fácilmente de él:

Sea f una función continua en $[a\,,b]$ y derivable en $(a\,,b)$.

Entonces existe al menos un punto $x_0 \in (a\,,b)$ tal que

$$\frac{f\,(b) - f\,(a)}{b - a} = f'\,(x_0)$$



El significado geométrico está representado en la figura: de las hipótesis se deduce que la curva $y = f(x)$ debe tener para alguna abscisa del interior una recta tangente paralela a la cuerda que une los puntos correspondientes a $x = a$ y $x = b$, ya que:

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la cuerda $\overline{AB}$

$f'(x_0)$ es la pendiente de la tangente en $x = x_0$

☞ Ejemplo: Comprobemos que la función $f : [-1\,, 8] \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio pero sí cumple la tesis.

Observemos que la derivada de la función es:

$$f(x) = x^{1/3} \to f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Que no existe para $x = 0$. Así que la función no es derivable en $(-1\,, 8)$.

Pero veamos que sí existe el punto medio del que habla la Tesis:

$$\frac{f(8) - f(-1)}{8 - (-1)} = f'(x) \to \frac{1}{3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \to x = 1$$

☞ Ejemplo: Probemos, utilizando el Teorema del Valor Medio , que para cualquier $x > 0$ es $\operatorname{sen} x \leq x$.

Aplicamos el TVM a $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0\,, x]$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(x_0) \to \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos x_0$$

Teniendo en cuenta que $\cos x_0 \leq 1$:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1 \to \operatorname{sen} x \leq x$$

7.Anexo: Cálculo de Derivadas

❑ Derivada de las funciones elementales.

Recordemos las derivadas de las funciones elementales:

- La derivada de una función constante en cada punto es cero:

$$f(x) = k \xrightarrow{D} f'(x) = 0$$

- La derivada de la función identidad es constantemente 1:

$$f(x) = x \xrightarrow{D} f'(x) = 1$$

- La derivada de la función potencial viene dada por:

$$f(x) = x^n \xrightarrow{D} f'(x) = nx^{n-1}$$

- Para derivar la función definida por una raíz cuadrada:

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{D} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- La derivada de la función exponencial es la misma función exponencial:

$$f(x) = \mathrm{e}^x \xrightarrow{D} f'(x) = \mathrm{e}^x$$

- La derivada de la función logaritmo neperiano viene dada por:

$$f(x) = \ln x \xrightarrow{D} f'(x) = \frac{1}{x}$$

- La derivada de la función seno es la función coseno:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \xrightarrow{D} f'(x) = \cos x$$

- La derivada de la función coseno es la opuesta de la función seno:

$$f(x) = \cos x \xrightarrow{D} f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

- La derivada de la función arco seno viene dada por:

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x \xrightarrow{D} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- La derivada de la función arco coseno viene dada por:

$$f(x) = \arccos x \xrightarrow{D} f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- La derivada de la función arco tangente viene dada por:

$$f(x) = \arctan x \xrightarrow{D} f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

La exponencial de cualquier base:
$D\,a^x = a^x(ln\,a)$

La logarítmica de cualquier base:
$D\,log_a x = \dfrac{1}{x(ln\,a)}$

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x) = 3$, su función derivada es constantemente cero: $f'(x) = 0$.

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x) = x^4$, su derivada es $f(x) = 4x^3$.

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x) = x^3$, su derivada es $f(x) = 3x^2$.

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x) = x^2$, hallemos la derivada para $x = 4$:

Derivamos: $f'(x) = 2x$.

Sustituimos: $f'(2) = 2 \cdot 4 = 8$.

☞ Ejemplo: Para derivar $f(x) = \sqrt{x^3}$ podemos proceder así:

$$\mathscr{D}\left(\sqrt{x^3}\right) = \mathscr{D}\left(x^{3/2}\right) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Recuerda:
$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, para obtener su derivada podemos proceder así:

$$\mathscr{D}\left(\sqrt[5]{x^3}\right) = \mathscr{D}\left(x^{3/5}\right) = \frac{3}{5}x^{-2/5} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

❑ Álgebra de derivadas

Recordemos las reglas básicas:

Sean f y g dos funciones derivables. Entonces:

Derivada de la suma o resta:	$\mathscr{D}(f \pm g) = f' \pm g'$
Derivada de constante por función:	$\mathscr{D}(kf) = kf'$
Derivada del producto:	$\mathscr{D}(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$
Derivada del cociente:	$\mathscr{D}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

☞ Ejemplo:

$$\mathscr{D}\left(x^3 - x^2 + 5\right) = 3x^2 - 2x$$

☞ Ejemplo: La derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ viene dada por

$$f'(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$$

☞ Ejemplo: obtengamos la siguiente derivada de un producto:

$$\mathscr{D}(x \cdot \operatorname{sen} x) = 1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x = \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x$$

☞ Ejemplo: calculemos $f'(1)$ para la función dada por $f(x) = x^2 \ln x$.

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x \rightarrow f'(1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

☞ Ejemplo: calculemos

$$\mathscr{D}(5 \ln x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$$

☞ Ejemplo: Si el espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $e(t) = 8t + 5t^2 \quad , \quad 0 \leq t \leq 10$, la velocidad en cada instante es

$$v(t) = e'(t) = 8 + 10t \quad , \quad 0 \leq t \leq 10$$

☞ Ejemplo: Calculemos la derivada siguiente

$$\mathscr{D}\left(\frac{x^3}{x-2}\right)=\frac{3x^2(x-2)-x^3\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^3-6x^2}{(x-2)^2}$$

☞ Ejemplo: Calculemos

$$\mathscr{D}\left(\frac{x^2+x}{2x-3}\right)=\frac{(2x+1)(2x-3)-2\cdot\left(x^2+x\right)}{(2x-3)^2}=\frac{2x^2-6x-3}{(x-3)^2}$$

☞ Ejemplo: Obtengamos la derivada para $x=0$ de $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$.

Primero derivamos el cociente:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\cos x-x(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos x+x\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}$$

Y ahora sustituimos en la derivada obtenida:

$$f'(0)=\frac{1+0}{1}=1$$

☞ Ejemplo: Calculemos la derivada de la función tangente

$$\mathscr{D}\tan x=\mathscr{D}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)=\frac{\cos x\cdot\cos x+\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}x}{(\cos x)^2}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Recuerda la fórmula fundamental: $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

☞ Ejemplo: Comprueba de igual manera que

$$\mathscr{D}\cot x=\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

❑ Regla de la Cadena

Aún nos falta una regla que nos permita obtener la derivada de una composición de funciones: ¿cómo hallar la función derivada de $f(x)=\operatorname{sen}\left(x^2\right)$ o $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$?

Recordemos que dadas dos funciones *u* y *v*, la función compuesta $f=u\circ v$ queda definida mediante

$$f(x)=u[v(x)]$$

El siguiente resultado, que permite derivar tales funciones, tiene una demostración bastante complicada. Nosotros nos limitaremos a conocer cómo se aplica en la práctica con las funciones elementales que estamos estudiando.

Es la denominada **regla de la cadena**, que necesitaremos para derivar composiciones de funciones elementales:

> Sean u y v dos funciones derivables. Si es
>
> $$f(x)=u[v(x)]$$
>
> entonces f es derivable en cada x de su dominio y se tiene que es
>
> $$f'(x)=u'[v(x)]\cdot v'(x)$$

- ☞ Ejemplo: para derivar $f(x) = \operatorname{sen}\left(x^2\right)$, observemos que es una composición. Por la regla de la cadena:

$$f'(x) = \cos\left(x^2\right) \cdot 2x = 2x\cos\left(x^2\right)$$

- ☞ Ejemplo: si $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

- ☞ Ejemplo: si $f(x) = \cos\left(\mathrm{e}^x\right)$ su derivada es

$$f'(x) = -\operatorname{sen}\left(\mathrm{e}^x\right) \cdot \mathrm{e}^x = -\mathrm{e}^x \operatorname{sen}\left(\mathrm{e}^x\right)$$

- ☞ Ejemplo: si $f(x) = \ln\left(x^2+3x+2\right)$, aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} \cdot (2x+3) = \frac{2x+3}{x^2+3x+2}$$

- ☞ Ejemplo: si $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

- ☞ Ejemplo: si $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\mathrm{e}^x\right)$, aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\mathrm{e}^x\right)^2}} \cdot \mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$$

- ☞ Ejemplo: si $f(x) = \left(x^3+1\right)^5$, aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = 5\left(x^3+1\right)^4 \cdot 3x^2 = 15x^2\left(x^3+1\right)^4$$

- ☞ Ejemplo: si $f(x) = \arctan(\ln x)$, aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$$

- ☞ Ejemplo: si $f(x) = \ln(\operatorname{sen} 2x)$, aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 = \frac{2\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = 2\cot 2x$$

Ejercicios

1. [S/08] Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad , \quad g(x) = c\,\mathrm{e}^{-(x+1)}$$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto $(-1\,,2)$ y tienen en ese punto la misma recta tangente.

a) Calcula los valores de $a\,, b\,, c$.

b) Halla la ecuación de dicha recta tangente.

2. [S/08] Sea $g : (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = \ln x$

Justifica que la recta de ecuación $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x$ es la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = \mathrm{e}$.

3. [S/08] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si} \quad x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Halla a y b sabiendo que f es derivable en $\mathbb{R}$.

b) Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

4. [S/08] Sea f la función definida, para $x \neq 0$, por

$$f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

Determina las asíntotas de la gráfica de f.

5. [S/08] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$$

Justifica que la recta de ecuación $y = -2\,\mathrm{e}\,x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1/2$.

6. [S/08] Sea la función $f : [0\,,4] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ cx + 1 & \text{si} \quad 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

a) Determina a, b y c sabiendo que f es continua en el intervalo cerrado $[0\,,4]$, derivable en el intervalo abierto $(0\,,4)$ y que $f(0) = f(4)$.

b) ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada?

7. [S/08] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot |x| & \text{si} \quad x \le 2 \\ 6 - x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Esboza su gráfica.

b) Estudia la derivabilidad de la función.

8. [S/08] Consideremos la función f definida, para $x \neq 0$ por

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}$$

determina las asíntotas de su gráfica.

9. [S/09] La recta tangente a la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = mx^2 + nx - 3$$

en el punto $(1\,,-6)$, es paralela a la recta $y = -x$.

Determina las constantes m y n. Halla la ecuación de dicha recta tangente

10. [S/09] Se considera la función $f : [1\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$$

Determina la asíntota de la gráfica .

11. [S/09] Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$$

12. [S/09] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 3x - 1 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad.

b) Determina sus asíntotas y sus extremos relativos.

c) Esboza la gráfica de f.

13. [S/09] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^2 \cdot |x + 3|$$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f

b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f. Calcula sus extremos relativos (abscisas y ordenadas)

14.[S/09] Considera la curva de ecuación

$$y = x^3 - 3x$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = -1$.

15.[S/09] Sea $f : (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + \ln x$$

Comprueba que la recta de ecuación $y = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

16.[S/09] Sea la función $f : (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot (\ln x)^2}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ a & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

a) Sabiendo que f es continua, calcula a.

b) Estudia la existencia de asíntota horizontal para la grafica de esta función. En caso de que exista, determina su ecuación.

17.[S/09] Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + bx + 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ ax^2 - 5x + 2a & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

es derivable. Determina los valores de a y b.

18.[S/10] Sea $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 3x\right)$$

a) Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación $x - 2y + 1 = 0$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

19.[S/10] Sea $f : [0\,,4] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ cx & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Sabiendo que f es derivable en todo el dominio y que verifica $f(0) = f(4)$, determina los valores de a , b y c .

20.[S/10] Sea f la función definida como

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{a - x} \text{ para } x \neq a$$

a) Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(2,3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4 .

b) Para el caso $a = 2, b = 3$, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

21.[S/10] Sea la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x\left(x^2 + ax\right) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{bx^2 + c}{x + 1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Calcula las constantes a , b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ tiene pendiente 3 .

22.[S/10] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$$

Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -5$ y en el punto de abscisa $x = 2$.

23.[S/10] Sea $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \ln x$$

Comprueba que la recta de ecuación $y = -\mathrm{e}x + 1 + \mathrm{e}^2$ es la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \mathrm{e}$.

24.[S/10] Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 + 4$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

25.[S/10] Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{2}{x + 1} & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

Estudia su continuidad y derivabilidad. Determina la función derivada de f .

26.[S/10] Calcula

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$$

27.[S/11] Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$.

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.

28.[S/11] Sea $f : \left[\frac{1}{e}, 4\right] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - \ln(x) + a & \text{si } \frac{1}{e} \le x \le 2 \\ bx + 1 - \ln(2) & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Calcula los valores de a y b para que f sea derivable en el intervalo $\left(\frac{1}{e}, 4\right)$.

29.[S/11] Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$, se pide:

Prueba que las rectas $y = -x + 1$ e $y = 3x - 1$ son tangentes a su gráfica.

30.[S/11] Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4 - x^2$

a) [1] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

b) [1,5] Determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $x + 2y - 2 = 0$.

31.[S/12] Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$$

Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

32.[S/12] Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 4x$.

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

33.[S/12] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

34.[S/12] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = e^x\left(x^2 - x + 1\right)$$

Calcula $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

35.[S/12] Sea la función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) [1,25] Calcula el valor de k.

b) [1,25] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 1$.

36.[S/12] Sea la función f definida por

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x} \quad \text{si } x \ne 1$$

Estudia las asíntotas de la gráfica de la función f .

37.[S/12] Considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^x(x - 2)$$

Calcula las asíntotas de f .

38.[S/12] Sabiendo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\operatorname{sen}(x) - x e^x}{x^2}$$

es finito, calcula el valor de a y el valor de dicho límite.

39.[S/12] Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 3x + 3\right) - x$$

Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.

40.[S/12] Se considera la función derivable definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{a}{x - 2} & \text{si } x < 1 \\ a + \dfrac{b}{\sqrt{x}} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Calcula los valores de a y b.

41.[S/13] Sea f la función definida por

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{1/x} \quad (x \geq -1\,, x \neq 0)$$

a) [1] Calcula los límites laterales de f en $x = 0$.

b) [1,5] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

42.[S/13] Sea $f : (0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{2\ln(x)}{x^2}$$

Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

43.[S/13] Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = -x^2 + 6x - 5$$

Halla la ecuación de la recta normal a su gráfica en el punto de abscisa $x = 4$.

44.[S/13] Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \quad \text{para} \quad x > 0\,, x \neq 1$$

a) Estudia y determina las asíntotas de su gráfica .

b) Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \mathrm{e}$.

45.[S/13] Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{k}{(x-a)(2x-1)} \quad \text{para } x \neq a\,, x \neq \frac{1}{2}$$

Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(0\,, 2)$ y que la recta $x = 2$ es una asíntota de dicha gráfica.

46.[S/13] Sea g la función definida por

$$g(x) = \frac{mx^3}{(x-n)^2} \quad \text{para} \quad x \neq n$$

Halla m y n sabiendo que la recta $y = 2x - 4$ es una asíntota de la gráfica de g.

47.[S/13]Sabiendo que existe y es finito el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x)}{x^3}$$

calcula b y el valor del límite.

48.[S/13] Sea $f : (-\infty\,, 1) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

a) Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.

b) Halla la ecuación de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

49.[S/14] Calcula a y el valor del límite siguiente, sabiendo que es finito:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right)$$

50.[S/14] Considera la función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) [1,75] Calcula a y b.

b) [0,75] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

51. [S/14] Calcula a y el valor del límite siguiente, sabiendo que es finito:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - \mathrm{e}^x + ax}{x \cdot \mathrm{sen}(x)}$$

52. [S/14] Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \mathrm{sen}\,x}{x - \mathrm{sen}\,x}$$

53. [S/14] Calcula a y b. sabiendo que es derivable la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x} + \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

54. [S/15] Sabiendo que el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\mathrm{sen}\,x^2}$$

es finito e igual a 1, calcula los valores de a y b.

55. [S/15] Calcula a y $b>0$ sabiendo que es derivable la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} a\cos x+2x & \text{si} \quad x<0 \\ a^2\ln(x+a)+\dfrac{b}{x+1} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

56.[S/15] Calcula a y b sabiendo que es continua la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+\cos x-a\,\mathrm{e}^x}{x^2} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ b & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

57.[S/15] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\left(x^2+3x+1\right)\mathrm{e}^{-x}$$

a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f .

b) Halla los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente es horizontal.

c) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

58.[S/15] Halla los valores a, b y c sabiendo que la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{x+c}$$

tiene una asíntota vertical en $x=1$, una asíntota oblicua de pendiente 2 y un extremo local de abscisa $x=3$

59.[S/16] Sabiendo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\,\mathrm{sen}(x)+x\cos(3x)}{x^2}$$

es finito, calcula a y el valor del límite.

60.[S/16] Calcula a y sabiendo que es finito

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\pi x)\,(1+a\cos(\pi x))}{\mathrm{sen}\left(x^2\right)}$$

61.[S/16] Sea f la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f . Calcula los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica de f .

62.[S/16] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

63.[S/16] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\left|x^2-4\right|$$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$.

64.[S/16] Halla m sabiendo que existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{m}{2x}\right)$$

65.[S/17] Se sabe que es continua la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & \text{si} & x<0 \\ x^2+2a\cos(x) & \text{si} & 0\leq x\leq\pi \\ ax^2+b & \text{si} & x>\pi \end{cases}$$

a) [1,5] Halla los valores a, b.

b) [1] Estudia la derivabilidad de f.

66.[S/17] Calcula

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$$

67.[S/18] Determina $k\neq 0$ sabiendo que es derivable la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 3-kx^2 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

68. [S/18] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\mathrm{e}^{2-x}$$

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.

69.[S/18] Se sabe que es continua la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}-x\,\mathrm{e}^{x-1} & \text{si} \quad x<0\\ x\,\mathrm{e}^{x-1} & \text{si} \quad 0\le x\le 1\\ x\,\mathrm{e}^{1-x} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

a) Estudia la derivabilidad de f en $x=0$ y en $x=1$

b) Estudia la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de f .

70.[S/18] Sabemos que es continua la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c & \text{si} \quad x\le 0\\ \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

Determina a, b y c sabiendo que f es continua, alcanza un máximo relativo en $x=-1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-2$ tiene pendiente 2.

71.[S/18] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x)=x+x\,\mathrm{e}^{-x}$$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta $x-y+1=0$.

b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

72. [S/18] Calcula

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\operatorname{sen}x}$$

73.[S/19] Calcula a y b sabiendo que es derivable la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}x+ax+b & \text{si} \quad x\le 0\\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

74.[S/19] Idem con

$$f(x)=\begin{cases}x^2-ax+2b & \text{si} \quad x\le 0\\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

75.[S/19] Calcula

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-2x}-2x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

76.[S/19] Considera la función f definida por

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+1} \qquad (cx+1\neq 0)$$

Determina a, b y c sabiendo que la recta $x=-1$ es una asíntota vertical a la gráfica de f y que $y=2x+4$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

77.[S/20] Calcula a sabiendo que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{ax-1}{x}\right)=\frac{7}{2}$$

78.[S/20] Calcula a y el siguiente límite sabiendo que es finito

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{e}^x-\ln(1+x)-(a+1)\,x}{x^2}$$

79.[S/20] Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

tiene un punto crítico en $x=0$, que su gráfica pasa por $(0\,,3)$ y que la recta $y=-2x+2$ es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa $x=1$. Calcula $a\,,b\,,c\,,d$.

80.[S/20]

Consideremos la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2ax-4b} & \text{si} \quad x<1\\ 1-x\ln x & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$$

a) [1,75] Determina los valores de a y b.

b) [1,25] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.

81.[S/20] Calcula $a,b\,,c$ si se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$$

tiene un punto crítico en $x=2$ y que la recta normal a su gráfica en el punto de abscisa $x=1$ es $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

82.[S/21] Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos x)+b\operatorname{sen}x-2(\mathrm{e}^x-1)}{x^2}=7$$

83.[S/21] Sea la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ f definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{x-1} & \text{si} \quad x\le 0\\ \ln(1+x) & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

a) [1,5] Determina a y b.

b) [1] Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa

84.[S/21] Calcula a y el límite siguiente sabiendo que es finito:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{\ln(x+1)}-\frac{a}{x}\right)$$

85.[S/21] Halla los coeficientes a y b sabiendo que es continua la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(e^x+x^3\right)}{x} & \text{si} \quad x<0\\ 4x^2+a & \text{si} \quad 0\le x<1\\ b+\operatorname{sen}(\pi x) & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$$

<u>Distribución temática</u>

Continuidad y derivabilidad

7 , 12 , 13 , 25 , 35 , 69a

Continuidad y derivabilidad con parámetros

3 , 6 , 16 , 17 , 19 , 21 , 28 , 40 , 53 , 50 , 53 , 55 , 56 , 59 , 60 , 65, 67 , 70

Tangente y normal

2 , 3 , 5 , 14 , 15 , 18 , 20 , 22 , 23 , 24 , 27 , 29 , 30 31 , 32 , 33 , 35 , 39 , 43 , 44 , 50 , 57bc , 63 , 68 , 71a

Tangente y normal con parámetros

1 , 9 , 21

Cálculo de límites

11 , 26 , 34 , 41 , 52 , 72

Cálculo de límites con parámetros

38 , 47 , 49 , 51 , 54 [2 parámetros] , 64 , 66

Cálculo de límites para asíntotas

4 , 8 , 10 , 12 , 16 , 36 , 37 , 41 , 42 , 44 , 57a , 61 , 62 , 69b , 71b

Asíntotas con parámetros

20a , 45 , 46 , 58

T.V.M - AMPLIACIÓN

86.[S/89]* Enuncie el Teorema del Valor Medio de Lagrange. Pruébese que para $x > 0$ es:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

Sugerencia: aplique el Teorema de Lagrange a la función $f(x) = \ln(1+x)$ en el intervalo $[0\,,x]$.

87.[S/89] Calcule

$$\lim_{x\to 0+} x^{\operatorname{sen} x}$$

88.[S/89] Enuncie el Teorema del Valor Medio e interprételo geométricamente. Halle el valor intermedio de la tesis del teorema para la función $y = \dfrac{1}{x}$ en el intervalo $[1\,,2]$.

89.[S/90] Enuncie el Teorema de Rolle y demuestre que la ecuación $x^3 - 3x + b = 0$ tiene como máximo una raíz en el intervalo $[-1\,,1]$.

90.[S/90] Pruebe que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

verifica las hipótesis del TVM en el intervalo $[1\,,2]$ y determine el valor medio (o los valores medios) dados por el Teorema.

91.[S/90] Consideremos la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 7x-6 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

¿Cumple las hipótesis del TVM? ¿Y la tesis?

92.[S/90] Calcule

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$$

93.[S/90] Determine, usando el Teorema de Bolzano y el de Rolle cuántos ceros tiene la función $y = x - \mathrm{e}^{-x}$ en el intervalo $[0\,,1]$.

94.[S/91] Determine cuántas soluciones tiene la ecuación $x = \cos x$ en el intervalo $[0\,,\pi/2]$.

95.[S/91] Determine cuántas raíces reales tiene la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 25 = 0$.

96.[S/92] Calcule

$$\lim_{x\to 0+} (2x)^{1/x}$$

97.[S/92] Halle a, b y c para que cumpla las hipótesis del Teorema de Rolle en $[0\,,4]$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax & \text{si} \quad x < 2 \\ bx + c & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

98.[S/93] Halle a, b y c para que cumpla las hipótesis del Teorema de Rolle en $[0\,,8]$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax & \text{si} \quad x < 3 \\ bx + c & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

y encuentre el punto (o puntos) correspondientes a la tesis del teorema.

99.[S/93] Calcule los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^x + x^3\right)^{1/x}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\tan x}$

100.[S/93] Demuestre que sólo tiene una raíz positiva la ecuación $x\,\mathrm{e}^x = 2$

Cálculo de derivadas

1. Obtén las derivadas sucesivas de la función polinómica definida por $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 7$.

Idem. para la función exponencial $y = e^x$.

2. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 + 4x - 7$$

Obtengamos $f(1)$, $f'(1)$ y $f''(1)$.

3. Obtén la función derivada de:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ b) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

c) $f(x) = 2x\sqrt{x}$ d) $f(x) = 2x - \dfrac{3}{x}$

4. Obtén la derivada de los siguientes cocientes:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 - 1}$ d) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2 + 1}$

5. Calcula la expresión de la función derivada, aplicando las reglas de derivación:

a) $y = 3\operatorname{sen} x - 5\cos x$ b) $y = 3x^2 \ln x$

c) $y = x^2 + 5\cos x$ d) $y = (3x^5 + 1)\, e^x$

e) $y = 5\, e^x - 2\ln x$ f) $y = x^2 \operatorname{sen} x$

g) $y = x - \arctan x$ h) $y = x \operatorname{arcsen} x$

6. Calcula la derivada de los siguientes cocientes:

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

c) $f(x) = \tan x$ d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \sec x$ f) $f(x) = \csc x$

7. Deriva usando conveniente la regla de la cadena:

a) $y = \operatorname{sen}\left(3x^2 + 1\right)$ b) $y = \sqrt{x^2 + x - 1}$

c) $y = \cos(\ln x)$ d) $y = e^{x^2 - 1}$

e) $y = \left(x^2 - x\right)^3$ f) $y = \ln\left(x^3 - x\right)$

8. Deriva usando conveniente la regla de la cadena:

a) $y = \cos\left(x^5\right)$ b) $y = \arctan\left(x^2\right)$

c) $y = \operatorname{arcsen}\left(e^x\right)$ d) $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

e) $y = \operatorname{sen}^3 x$ f) $y = \cos\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)$

9. Calcula la expresión de la función derivada, usando convenientemente la Regla de la Cadena:

a) $y = x \operatorname{sen} 2x$ b) $y = 4x^3 \ln(5x)$

c) $y = x^2\, e^{\frac{1}{x}}$ d) $y = x \ln(\cos x)$

e) $y = x^2 \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right)$ f) $y = \dfrac{e^{5x}}{x}$

g) $y = e^{-x+5} \ln(2x)$ h) $y = \dfrac{e^{-x}}{3x + 1}$

i) $y = e^{2x} \operatorname{sen}(x^2)$ j) $y = \operatorname{sen}^2 5x$

10. Deriva las siguientes funciones

a) $y = ax^3 + cx + d$ b) $y = bx + 1 - \ln 2$

c) $y = e^x\left(x^2 + ax\right)$ d) $y = \dfrac{bx^2 + c}{x + 1}$

11. Deriva las siguientes funciones

a) $f(x) = 1 + \dfrac{a}{x - 2}$ b) $f(x) = a + \dfrac{b}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = a\sqrt{b - x}$ d) $f(x) = \dfrac{b}{\ln x}$

12. Comprueba que la función $y = 3\operatorname{sen} x - 4\cos x$ verifica $y'' + y = 0$.

13. Obtén la derivada n–ésima de:

a) $f(x) = e^{3x}$

b) $f(x) = x \cdot e^x$

Cuestiones

1. Escribe una función que tenga la misma derivada en todos sus puntos.

2. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es la derivada de una función $F(x)$. ¿Cuál?

3. Escribe dos funciones cuya derivada sea función dada por $y = \cos x$. ¿Cuántas funciones así existen?

4. Escribe dos funciones que sean idénticas a sus respectivas funciones derivadas.

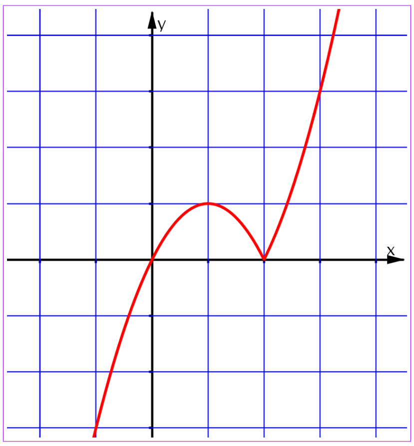
5. Si f es una función polinómica, ¿cuál es la primera derivada que es idénticamente nula?

6. ¿Es posible que una función sea discontinua en un punto y derivable en él? ¿Y que una función sea continua en un punto y no derivable en él?

7. La función $s(t) = t^3 - 4t + 3t - 3\ ,\ t \geq 0$ nos proporciona la distancia de un móvil, que se mueve en línea recta, a su punto de partida. Calcula, indicando el significado de cada uno:

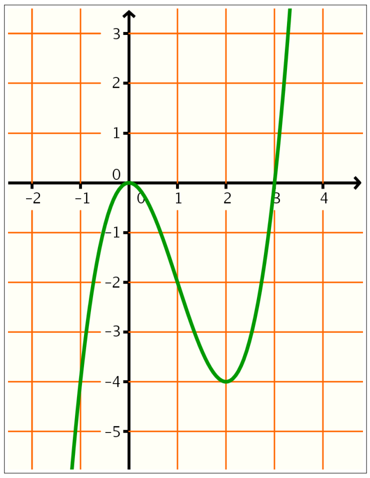
$$s(3)\ ,\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(3)\ ,\ \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}(3)$$

8. La gráfica de la función $y = x|x-2|$ es la siguiente. ¿Es derivable la función para $x = 2$?



9. [S/98] Representa la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x+1|$ y estudia su derivabilidad.

10. Señala los valores x en los que $f'(x)$ es cero, negativa y positiva, si la gráfica $y = f(x)$ es:

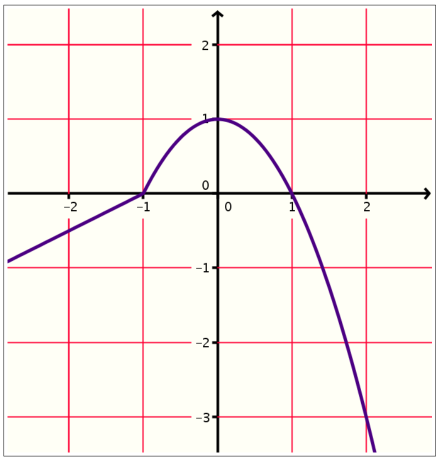


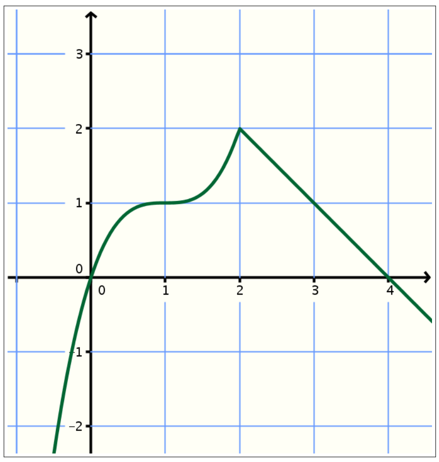
11. Haz un esquema que recoja, para las funciones cuyas gráficas son las siguientes:

a) los puntos en los que la derivada no existe

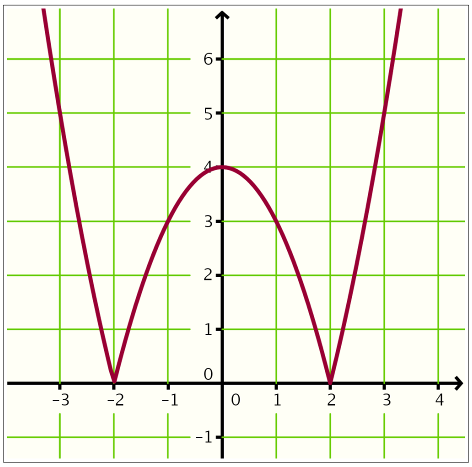
b) los puntos en los que la derivada es cero,

c) los intervalos de signo de la derivada





12. Ídem para $y = |x^2 - 4|$, cuya gráfica es la siguiente:



13. Dada la función $f(x) = x^3$:

a) Comprueba que la tangente a su gráfica en el punto $P = (1\,,1)$ es la recta $y = 3x - 2$.

b) Comprueba que esa recta corta a la curva en el punto $Q = (-2\,,-8)$.

14.*Calcula $f(1)$ y $f'(1)$ sabiendo que la recta $r: 2x - y + 4 = 0$ es tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

15. Estudia si la recta $y = x + 1$ es tangente a la gráfica $y = \ln x$.

16.*Obtén las tangentes a $y = x^2 + 1$ que pasan por el origen de coordenadas.

Nota: la parábola no pasa por el origen.

17.[S/96] De las siguientes afirmaciones, hechas sobre una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ¿cuáles DEBEN ser ciertas, PUEDEN ser ciertas en algunas ocasiones o NUNCA son ciertas? Justifica las respuestas.

a) Si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ y f es continua entonces $f(0) = 1$

b) Si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ entonces $f'(0) = 3$

c) Si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ entonces $y = 3x + 1$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Autoevaluación

1. Dada la parábola $y = x^2$:

a) Halla la ecuación de la recta tangente paralela a $4x + y + 3 = 0$.

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes que pasan por el punto $(2\,,0)$.

2. Obtén la función derivada:

a) $y = x \cdot \cos\left(x^2 + x\right)$

b) $y = x - \mathrm{e}^{2\,\mathrm{sen}(x^3)}$

c) $y = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$

d) $y = \mathrm{arcsen}\left(\dfrac{4}{x}\right)$

e) $y = \arctan(\ln x)$

3. Halla los valores de a y de b sabiendo que la gráfica de la función definida por

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-2}$$

tiene para $x = 1$ como recta tangente $7x + y - 2 = 0$.

4. Dada la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad.

b) Analiza su derivabilidad.

c) Obtén sus asíntotas.

5. Se sabe que la función

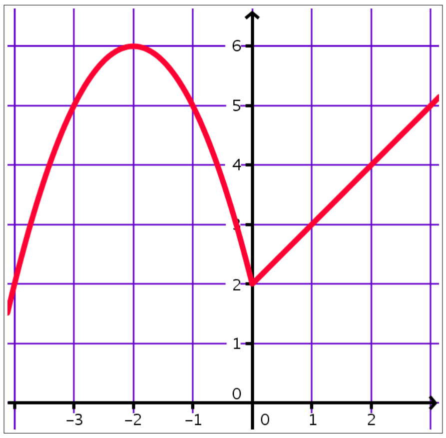
$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

es derivable en todo punto. Calcula los valores a y b.

6. Se sabe que el límite siguiente existe y es finito. Determina el valor de a y calcúlalo.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{a}{2x}\right)$$

7. Consideremos la función cuya gráfica $y = f(x)$ es la dibujada a continuación:



Haz un esquema razonado en el que se recojan:

a) los puntos en los que la derivada no existe,

b) los puntos en los que la derivada es cero,

c) los intervalos de signo de la derivada.

8. [Ampliación opcional] Demuestre que sólo tiene una raíz positiva la ecuación

$$x\,\mathrm{e}^x = 2$$

Autoevaluación

1.

a) Si la recta tangente: es paralela, debe tener la misma pendiente:

$$4x + y + 3 = 0 \rightarrow y = -4x - 3 \rightarrow m = -4$$

Tenemos así que la derivada en el punto de tangencia debe ser -4:

$$y = x^2 \rightarrow y' = 2x \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2$$

Aplicamos la fórmula de la recta tangente:

$$y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$$

Limpiando

$$y = -4x - 4$$

b) Observemos que el punto $(2\,,0)$ no está en la curva: se trata de hallar la tangente desde un punto exterior a la curva.

La tangente para $x = a$ es:

$$y - a^2 = 2a \cdot (x - a) \text{ [*]}$$

Como debe pasar por $(2\,,0)$, para $x = 2$ es $y = 0$:

$$0 - a^2 = 2a \cdot (2 - a)$$

Limpiando y resolviendo:

$$a^2 - 4a = 0 \rightarrow a = 0\,, a = 4$$

Así que hay dos tangentes. Volviendo a [*]:

$$a = 0 \rightarrow y - 0 = 0 \cdot (x - 0) \rightarrow y = 0$$

$$a = 4 \rightarrow y - 16 = 8 \cdot (x - 4) \rightarrow y = 8x - 16$$

2.

a) Derivamos un producto:

$$y' = \cos(x^2 + x) - (2x^2 + x)\operatorname{sen}(x^2 + x)$$

b) Derivamos una resta con exponencial:

$$y' = 1 - \mathrm{e}^{2\operatorname{sen}(x^3)} \cdot 6x^2 \cos(x^3)$$

c) Recordemos antes el logaritmo de un cociente:

$$\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \ln(x+2) - \ln(x-2)$$

Ahora derivamos:

$$y' = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{-4}{x^2-4}$$

d) Regla de la cadena para un arco seno:

$$y' = \frac{-\dfrac{4}{x^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{4}{x}\right)^2}} = \frac{-4}{x\sqrt{x^2 - 16}}$$

e) Regla de la cadena para un arco tangente:

$$y' = \frac{\dfrac{1}{x}}{1 + (\ln x)^2} = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$$

3. Antes que cualquier otra cosa, derivemos::

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-2} \xrightarrow{D} f'(x) = \frac{-2a-b}{(x-2)^2}$$

La recta tangente es:

$$7x + y - 2 = 0 \rightarrow y = -7x + 2$$

Recordemos que en punto de tangencia $(x = 1)$

1) La curva y la recta tangente coinciden:

$$f(1) = y(1) = -5 \rightarrow a + b = 5$$

2) La derivada es la pendiente de la tangente:

$$f'(1) = m = -7 \rightarrow -2a - b = -7$$

Resolviendo el sistema resultante obtenemos:

$$a = 2\,,\ b = 3$$

4.

a) Tenemos un trozo de función continua y uno de función racional, así la función sólo puede ser discontinua para $x = 0$ (separa-fórmulas) y para $x = -1$ (cero del denominador). Veamos:

$x = 0$

V: $\quad f(0) = 0$

L: $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0-} \frac{2x}{x+1} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0+} \left(x\,\mathrm{e}^{-x}\right) = 0 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x = 0$.

$x = -1$

V: $f(-1) = \emptyset$

L: $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) = \left[\frac{-2}{0}\right] = \pm\infty$

Discontinuidad de salto infinito en $x = -1$.

José Álvarez Fajardo

b) Podemos derivar cada trozo directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ (1-x)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Para $x = -1$ no hay derivada, pues siquiera es continua. Estudiemos detenidamente la derivabilidad para $x = 0$:

Como f es continua, podemos obtener así las derivadas laterales:

$$\text{D.L.} \begin{cases} f'_{-}(0) = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{2}{(x+1)^2} = 2 \\ f'_{+}(0) = \lim\limits_{x \to 0+} (1-x)\,\mathrm{e}^{-x} = 1 \end{cases}$$

Como las derivadas laterales no coinciden, tenemos que f no es derivable para $x = 0$ (es un punto *anguloso*).

c) Veamos sus asíntotas.

Verticales: del estudio de la continuidad deducimos que sólo tiene una asíntota vertical:

$$x = -1$$

Horizontales:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = [0 \cdot \infty]$$

Vaya, usemos la Regla de L'Hôpital para esa indeterminación:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

Concluimos que hay dos asíntotas horizontales:

$y = 2$ para $x \to -\infty$

$y = 0$ para $x \to +\infty$

5. Al ser derivable en todo punto, es particularmente continua en $x = 0$. Así, los límites laterales coinciden:

$$\lim_{x \to 0-} \cos(\pi x) = \lim_{x \to 0+} \sqrt{ax+b} \to 2a + b = 1$$

Podemos derivar directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} -\pi \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Como es derivable para $x = 2$, las derivadas laterales coinciden:

$$\text{D.L.} \begin{cases} f'(2-) = \lim\limits_{x \to 2-} -\pi \operatorname{sen}(\pi x) = 0 \\ f'(2+) = \lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}} = \dfrac{a}{2\sqrt{2a+b}} \end{cases}$$

Igualando:

$$\frac{a}{2\sqrt{2a+b}} = 0 \to a = 0$$

Sustituyendo en $2a + b = 1$ obtenemos $b = 1$.

Resulta, pues:

$$a = 0\,,\; b = 1$$

6. Tenemos

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{2x - a(\mathrm{e}^x - 1)}{2x(\mathrm{e}^x - 1)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{2 - a\,\mathrm{e}^x}{2x\,\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^x - 2} = \left[\frac{2-a}{0}\right]$$

Debemos distinguir aquí dos casos:

Si $a \neq 2$ ese límite es $L = \pm\infty$.

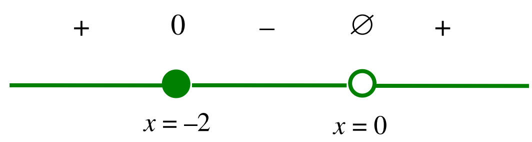
Si $a = 2$ tenemos una indeterminación que resolvemos aplicando otra vez L'Hôpital:

$$L = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-2\,\mathrm{e}^x}{2x\,\mathrm{e}^x + 4\,\mathrm{e}^x} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

7. Tenemos en cuenta:

- que la derivada no existe en el punto anguloso
- que la derivada (si existe) es cero en los extremos relativos
- que si la función crece la derivada es positiva y que si decrece la derivada es negativa

Así el esquema de la derivada es:



8. La ecuación $x\,\mathrm{e}^x = 2$ equivale a $x\,\mathrm{e}^x - 2 = 0$.

Lo que se pide es lo mismo que probar que la función definida por $f\,(x) = x\,\mathrm{e}^x - 2$ tiene sólo una raíz positiva.

En primer lugar, f es continua y derivable en todo punto. Por ello lo es en cualquier intervalo.

Ahora observemos que

$f\,(0) = -2 < 0$

$f\,(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$

Por el Teorema de Bolzano, aplicado al intervalo compacto $[0\,,1]$, deducimos que $f\,(x)$ tiene algún cero en $(0\,,1)$. [*]

Ahora vamos a usar el Teorema de Rolle para acotar el número de raíces positivas:

$$f'\,(x) = \mathrm{e}^x\,(1 + x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1$$

Así que $f'\,(x)$ no tiene ceros en $(0\,,+\infty)$ y, por ello, $f\,(x)$ tiene a lo sumo un cero en este intervalo [**].

De [*] y [**] se tiene que $f\,(x)$ tiene exactamente un cero positivo -como queríamos demostrar-.