FUNCIONES CONTINUAS

I.- LIMITE DE UNA FUNCION EN UN PUNTO.-

(A) Consideremos la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Observemos que:

$\longrightarrow$ la función no está definida para $x=0$.

$\longrightarrow$ $f(x)$ sí está definida para x próximo a cero (pero con $x \neq 0$).

Vamos a estudiar qué ocurre con $f(x)$ cuando x se acerca a 0:

x	$f(x)$
± 1	$0'841470984\ldots$
$\pm 0'1$	$0'998334166\ldots$
$\pm 0'01$	$0'999983333\ldots$
$\pm 0'001$	$0'999999833\ldots$
$\pm 0'0001$	$0'999999998\ldots$

Observemos que cuanto más acercamos la x a 0, más se va aproximando $f(x)$ al número 1.

Se dice que « el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 es 1 », y se escribe así:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \qquad \text{o bien}$$

$$f(x) \to 1 \quad \text{cuando} \quad x \to 0.$$

(B) En general, sea $f(x)$ una función en las proximidades de x_0 (puede estar o no estar definida en x_0).

Decimos que el límite de $f(x)$, cuando x tiende a x_0, es l y escribimos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \qquad \text{ó} \qquad f(x)\to l \text{ cuando } x\to x_0$$

cuando $f(x)$ se aproxima (tanto como se quiera) al número l si tomamos x muy próximo a x_0 (pero con $x \neq x_0$).

Esto en Matemáticas no sirve como definición ya que no es "riguroso": ¿qué significa aproximarse tanto como se quiera? ¿Y que x esté muy próximo a x_0? Vamos a intentar dar una definición aceptable:

Tomemos un número cualquiera $\varepsilon > 0$ (no importa lo pequeño que sea). Podemos conseguir que la distancia de $f(x)$ a l sea menor que ε

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

tomando la x próxima a x_0, esto es, tomando

$$|x - x_0| < \delta \qquad (\text{con } x \neq x_0)$$

para cierto número $\delta > 0$.

- **Definición**: " Sea $f(x)$ una función definida en las proximidades de x_0 (puede estar o no estar definida en x_0).
  Decimos que el límite de $f(x)$, cuando x tiende a x_0, es el número ℓ cuando dado cualquier $\varepsilon > 0$ encontramos $\delta > 0$ tal que si $x \neq x_0$ con $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. "

Con símbolos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{significa que} \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

La definición de límite también puede darse en términos de entornos. Decir

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{significa} \qquad f(x) \in E(\ell;\varepsilon)$$

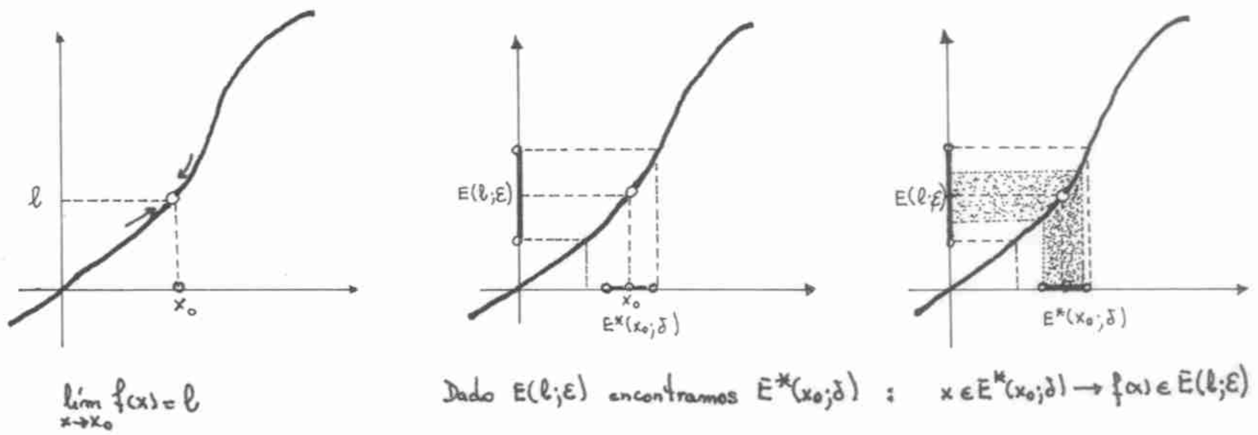
$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \text{significa} \qquad x \in E^*(x_0;\delta)$$

podemos reformular la definición anterior:

- **Definición**: " Sea $f(x)$ una función definida en las proximidades de x_0 (puede estar o no estar definida en x_0).
  Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es ℓ cuando:
  dado cualquier entorno del límite, $E(\ell;\varepsilon)$, encontramos un entorno reducido del punto x_0, $E^*(x_0;\delta)$, tal que:

$$\text{si} \quad x \in E^*(x_0;\delta) \longrightarrow f(x) \in E(\ell;\varepsilon)$$

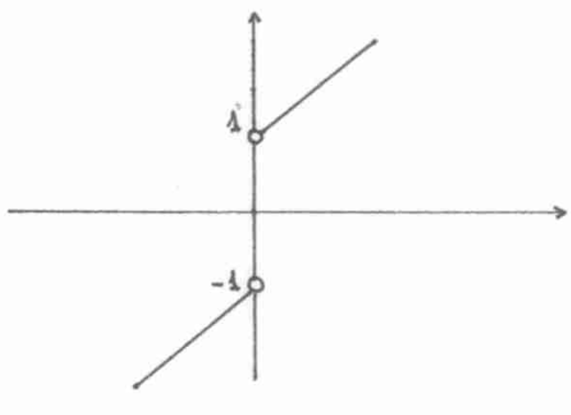
He aquí una gráfica que nos muestra esto.



$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ Dado $E(\ell;\varepsilon)$ encontramos $E^*(x_0;\delta)$: $x \in E^*(x_0;\delta) \rightarrow f(x) \in E(\ell;\varepsilon)$

(c) Consideremos ahora la función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$



¿ Cómo estudiar $\lim_{x\to 0} f(x)$? Habrá que distinguir '$x \to 0$ con $x>0$' de '$x\to 0$ con $x<0$'.

Para ello se introducen los límites laterales:

• <u>Definición</u>: " Sea $f(x)$ definida en las proximidades de x_0 (tanto a su izquierda como a su derecha).

Se definen los límites laterales de $f(x)$ cuando x tiende a x_0:

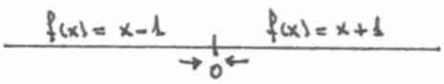
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad \text{como} \quad \lim_{\left\{\begin{smallmatrix} x\to x_0 \\ x>x_0 \end{smallmatrix}\right\}} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad \text{como} \quad \lim_{\left\{\begin{smallmatrix} x\to x_0 \\ x<x_0 \end{smallmatrix}\right\}} f(x)$$ "

En el ejemplo que nos ocupa, a partir de la gráfica:

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0_+} f(x) = +1$$

A partir de la definición de $f(x)$, analíticamente:



$$\begin{cases} \lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} (x-1) = -1 \\ \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} (x+1) = +1 \end{cases}$$

Es claro que, en este caso, no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$. Y, en general, para que exista el límite deben coincidir los laterales:

• <u>Teorema</u>: " Sea $f(x)$ definida en las proximidades de x_0 (tanto a su izquierda como a su derecha)

Tenemos que es $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ si y sólo si $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = l$ "

II.- <u>CONTINUIDAD EN UN PUNTO</u> .-

(A) Cuando empezó a desarrollarse el Cálculo, la mayor parte de las funciones con que se trabajaba eran continuas, y por tanto no se sentía la necesidad de penetrar en el significado exacto de continuidad. Fue ya entrado el s. XVIII cuando Fourier, en los trabajos de Teoría del Calor, se topó con muchas funciones ([illegible]) no continuas. Esto llevó a los matemáticos del s. XIX a examinar cuidadosamente el significado de función y el de continuidad.

A pesar de que el significado de « continuo » parece intuitivamente claro, no es fácil dar una buena definición. El diccionario nos dice

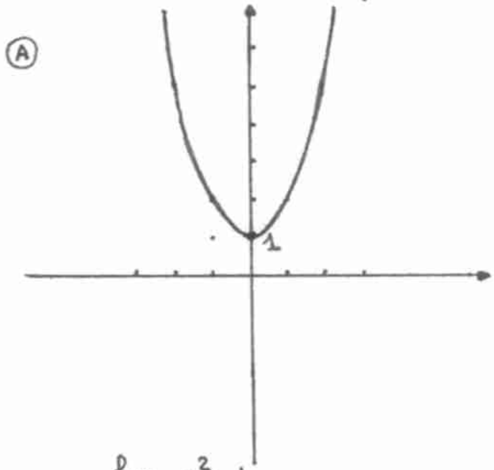
Continuidad : cualidad o condición de ser continuo

Continuo : que tiene continuidad entre las partes

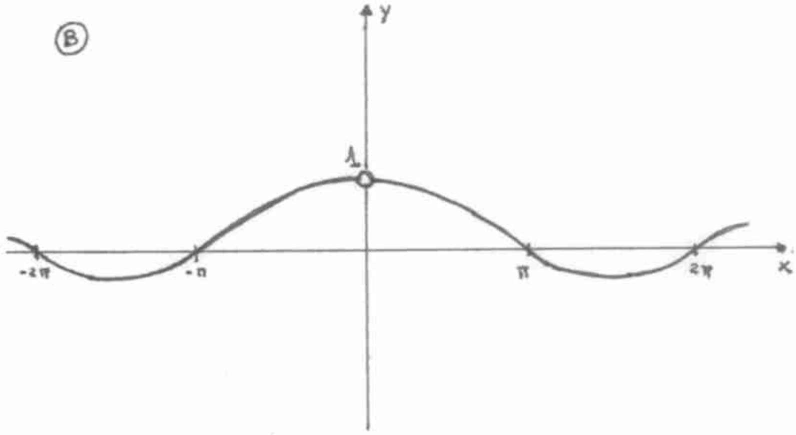
(?)

Una definición satisfactoria la dio por primera vez CAUCHY en 1821. Veamos...

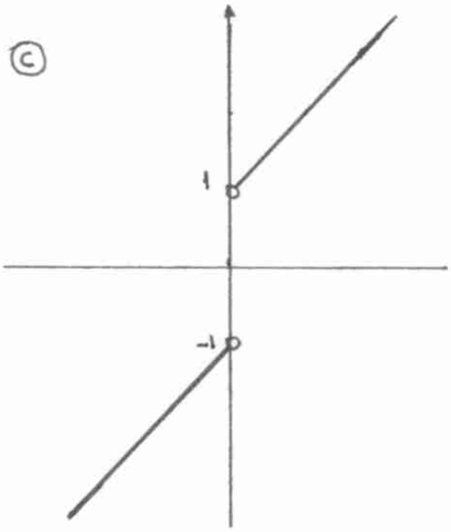
Consideremos las cuatro funciones siguientes. Obseroemos qué ocurre para $x_0 = 0$:



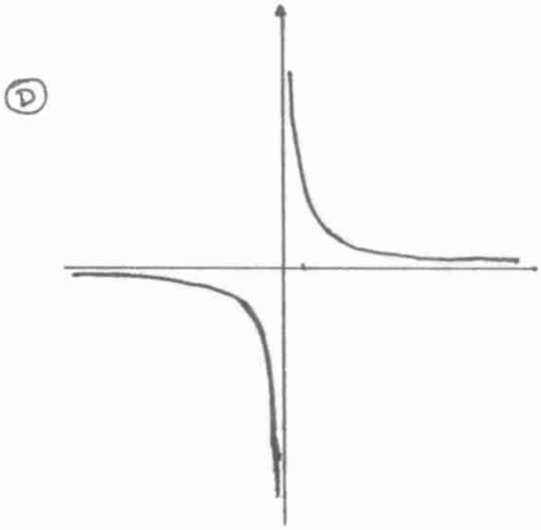
$f(x) = x^2 + 1$



$f(x) = \operatorname{sen} x / x$



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x > 0 \\ x-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



$f(x) = \frac{1}{x}$

¿Cuál diríamos que es continua en $x_0 = 0$?
¿Qué falla en las otras?

(B) Para asegurar que la gráfica no esté ni agujereada ni rota, tomaremos la

• <u>Definición</u>: "Una función $f(x)$ diremos que es continua en $x = x_0$ cuando verifica las tres condiciones siguientes:

1º) La función $f(x)$ está definida para $x = x_0$ $\quad (\exists f(x_0))$.

2º) Existe el límite de $f(x)$ para $x \to x_0$ $\quad (\exists \lim_{x \to x_0} f(x))$.

3º) La función en el punto y el límite coinciden $\quad (\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0))$."

Veamos un ejemplo:

<u>Ejemplo</u>: Dada

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -2 \\ 2x+1 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

estudia la continuidad en $x_0 = -2$ y $x_0 = 1$.

• En el punto $\underset{\sim\sim\sim}{x_0=-2}$:

1º) $\exists f(-2) = -2$

2º) $\nexists \lim_{x\to -2} f(x)$ $\begin{cases} \lim_{x\to -2_-} f(x) = \lim_{x\to -2_-} (x) = -2 \\ \lim_{x\to -2_+} f(x) = \lim_{x\to -2_+} (2x+1) = -3 \end{cases}$

La función <u>no</u> es continua para $x_0 = -2$.

• En el punto $\underset{\sim\sim\sim}{x_0=1}$:

1º) $\exists f(1) = 2\cdot 1 + 1 = 3$

2º) $\exists \lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} (2x+1) = 3 \\ \lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} (x+2) = 3 \end{cases}$

3º) $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3$

La función <u>sí</u> es continua para $x_0 = 1$.

(c) Si tenemos en cuenta la definición de límite, podemos dar la siguiente definición para la continuidad:

• <u>Definición</u>: " La función $f(x)$ es continua en x_0 cuando dado $\varepsilon > 0$ cualquiera encontramos un $\delta > 0$ tal que:

$$\text{si} \quad |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad "$$

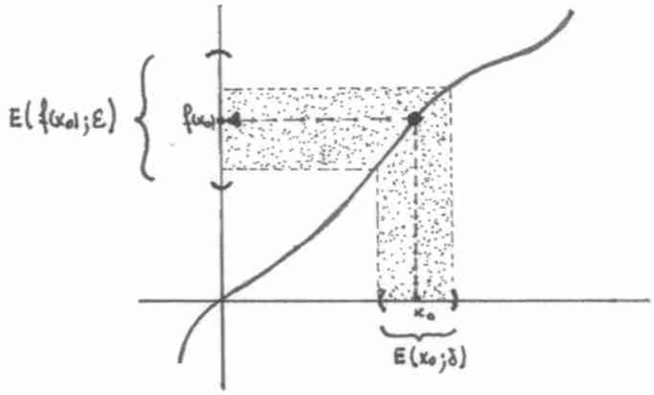
Podemos expresar esta definición a través de los entornos:

$|x - x_0| < \delta$ significa $x \in E(x_0; \delta)$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ " $f(x) \in E(f(x_0); \varepsilon)$

• <u>Definición</u>: " La función $f(x)$ es continua en x_0 cuando dado $E(f(x_0); \varepsilon)$ cualquiera encontramos un $E(x_0; \delta)$ tal que:

$$\text{si} \quad x \in E(x_0; \delta) \longrightarrow f(x) \in E(f(x_0); \varepsilon) \quad "$$



f continua en x_0

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : x \in E(x_0; \delta) \rightarrow f(x) \in E(f(x_0); \varepsilon)$

<u>NOTA</u>: Es importante observar que sólo hemos dado <u>una</u> definición de continuidad, aunque de tres maneras distintas: son <u>definiciones</u> claramente <u>equivalentes</u>.

III.- PROPIEDADES ELEMENTALES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS.-

(A) El siguiente resultado nos muestra la relación de la continuidad con las operaciones algebraicas:

> • <u>Teorema</u>: " Sean f y g funciones continuas en $x = x_0$. Se tiene:
>
> i) $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$ son funciones continuas en x_0.
>
> ii) $\dfrac{f}{g}$ es continua en $x = x_0$ si, y sólo si, es $g(x_0) \neq 0$ "

Del resultado se pueden deducir las afirmaciones siguientes.

• <u>Continuidad de las funciones polinómicas</u>: del hecho 'evidente' de que toda función constante es continua y de que la función identidad, $f(x) = x$, es continua para todo valor de x, el teorema permite establecer que cualquier función polinómica $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ es continua en todo punto.

• <u>Continuidad de las funciones racionales</u>: recordemos que una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas. Si $r(x)$ es una función racional, es

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde p y q son polinomios. La función $r(x)$ está definida para todo número real x con $q(x) \neq 0$. Tenemos así que una función racional es continua exactamente en todos los puntos en que está definida.

Un ejemplo sencillo es $r(x) = 1/x$. Esta es continua para todo valor de x salvo para $x = 0$, en el que no está definida.

• <u>Continuidad de las funciones polinómicas a trozos</u>: como cada función polinómica es continua, estas funciones son continuas para todos los valores de x salvo, quizás, los puntos de separación de cada trozo.

En estos puntos fronterizos la función puede ser o no ser continua: depende de cómo 'encajen' las distintas partes.

Un ejemplo sencillo es la función valor absoluto, $f(x) = |x|$. Esta es continua para todo valor de x, ya que las dos 'partes' que forman la función 'encajan' adecuadamente en el punto $x_0 = 0$.

(B) Para la composición de funciones, encontramos un resultado sencillo:

> • <u>Teorema</u>: " La composición de dos funciones continuas es una función continua. Concretamente: si g es una función continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en x_0. "

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, bend right, "(f\circ g)(x_0)"'] & g(x_0) \arrow[r, mapsto, "f"] & f[g(x_0)] \end{tikzcd}$$

IV - DISCONTINUIDADES.-

• Definición: " Cuando una función $f(x)$ no es continua en $x=x_0$, se dice que es discontinua en x_0 "

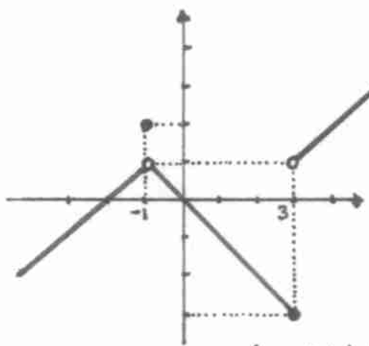
Si $f(x)$ es una función discontinua en $x=x_0$ es porque no cumple uno de los requisitos que exige la definición de continuidad en un punto. Según el requisito que no se cumpla, se clasifica la discontinuidad:

Si $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$ pero: $\left\{ \begin{array}{l} \odot\ \nexists f(x_0) \\ \odot\ \exists f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0} f(x) \end{array} \right\}$ ⟶ DISC. EVITABLE

Si $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$ porque $\left\{ \begin{array}{l} \text{No existe (ni finito ni infinito) un lateral en } x_0 \to \text{DISC. ESENCIAL} \\ \text{Existen los laterales y son distintos} \longrightarrow \text{DISC. DE SALTO} \end{array} \right.$

• Ejemplo 1: Estudiemos la continuidad de

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x<-1 \\ 2 & \text{si} \quad x=-1 \\ -x & \text{si} \quad -1<x\leq 3 \\ x-2 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$



a) La gráfica nos muestra que $f(x)$ sólo es discontinua para $x_0=-1$ (evitable) y para $x_0=3$ (salto finito). Veamos cómo sin conocer la gráfica, analíticamente, estudiaríamos la continuidad.

b) La función es polinómica a trozos: por tanto, sólo puede ser discontinua en $x_0=-1$ y $x_0=3$, que son los puntos que separan los trozos.

En $x_0=-1$:

• $\exists f(-1)=2$

• $\exists \lim_{x\to -1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x+2) = 1 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (-x) = 1 \end{array} \right.$

• $\lim_{x\to -1} f(x) \neq f(-1)$ ⇝ Discontinuidad evitable en $x_0=-1$

En $x_0=3$:

• $\exists f(3) = -3$

• $\nexists \lim_{x\to 3} f(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (-x) = -3 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-2) = 1 \end{array} \right.$

Discontinuidad de salto finito

• Ejemplo 2: Estudiemos la continuidad de

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$$

a) Al ser una función racional, sólo es discontinua en los puntos en los que el denominador es cero:

$$x^2-3x+2=0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$$

Así $f(x)$ es continua excepto en los puntos:

$x_0 = 2$:

- $\nexists f(2)$ – para $x=2$ se anula el denominador –

- $\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{0} = \infty$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 2_-} f(x) = \frac{1}{-0} = -\infty \\ \lim_{x \to 2_+} f(x) = \frac{1}{+0} = +\infty \end{cases}$$

Hay una discontinuidad de salto infinito en $x_0 = 2$.

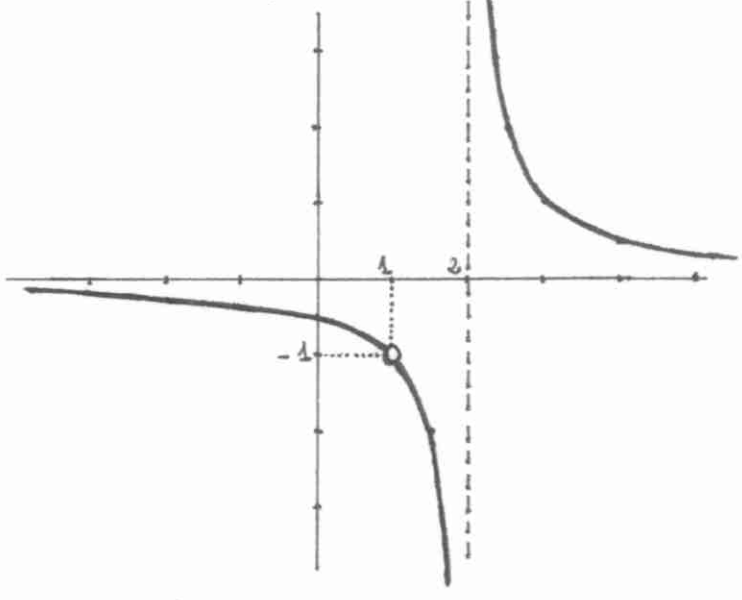
$x_0 = 1$:

- $\nexists f(1)$ – ídem. –

- $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-1} = -1$

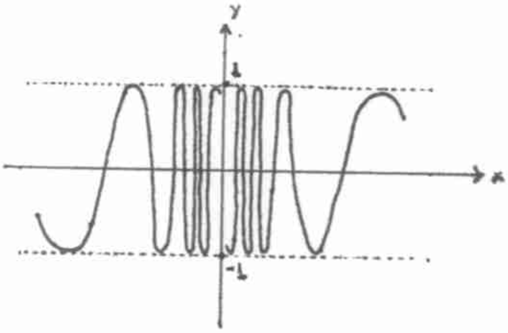
La discontinuidad en $x_0 = 1$ es evitable.

b) Observa lo estudiado en su gráfica:



• Ejemplo 3: Aquí vamos a dar un ejemplo de discontinuidad esencial. Consideramos

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$



Aquí tenemos la gráfica $y = f(x)$. El único punto de discontinuidad es $x_0 = 0$.

En $x_0 = 0$ la función presenta una discontinuidad esencial. No existe, por ejemplo, el $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ ya que la curva en cualquier intervalo $(0, \delta)$ presenta infinitas oscilaciones (cuando nos acercamos a cero) que van desde -1 a $+1$.

(Un estudio riguroso de lo anterior se hace un poco difícil).

• Ejemplo 4: Estudiemos la continuidad de $f(x) = e^{1/x}$.

Teniendo en cuenta la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función exponencial, tenemos que $f(x)$ sólo es discontinua para $x_0 = 0$:

• $\nexists f(0)$ - ya que para $x=0$ se anula el denominador -

• $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{1/x} = e^{\pm\infty}$ (?)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = e^{1/+0} = e^{+\infty} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = e^{1/-0} = e^{-\infty} = 0 \end{cases}$$

Discontinuidad de salto infinito para $x_0 = 0$

• Ejemplo 5: Estudiemos la continuidad, según los valores de a, de

$$f(x) = \begin{cases} x + 2a & \text{si } x < 1 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La función es, evidentemente, continua en $x \neq 1$ cualquiera que sea el valor de a. Sólo tenemos que ver $x_0 = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} (x + 2a) = 1 + 2a \\ \lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} (2x - 5) = -3 \end{cases}$$

$1 + 2a = -3 \leftrightarrow 2a = -4 \leftrightarrow a = -2.$

Si $a \neq -2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1+} f(x) \Rightarrow$ Hay disc. de salto finito en $x_0 = 1$.

Si $a = -2$:

$\exists f(1) = -3$

$$\exists \lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1-} f(x) = -3 \\ \lim\limits_{x \to 1+} f(x) = -3 \end{cases}$$

Es continua en $x_0 = 1$.

V.- CONTINUIDAD EN UN INTERVALO.-

La definición de continuidad en un intervalo es sencilla:

• Definición: "Una función $f(x)$ se dice que es continua en un intervalo I cuando es continua en todo punto del intervalo"

Por ejemplo:

A) Si $f(x) = \frac{1}{x}$: f es continua en el intervalo $(0,1)$
f no es continua en el intervalo $[0,1]$

B) Si $f(x) = \ln x$: f es continua en $(0,1]$
f no es continua en $[0,1]$

c) Si $f(x)$ es una función polinómica, f es continua en todo intervalo I.

A continuación vamos a estudiar las propiedades de las funciones continuas sobre intervalos cerrados y acotados. Son resultados muy intuitivos, pero que tienen unas demostraciones algo complicadas. (Dejaremos éstas como ampliación).

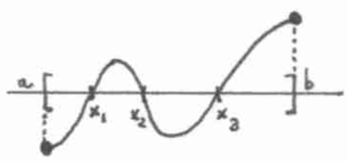
Es fundamental entender perfectamente sus enunciados, conocer su interpretación geométrica y saber aplicarlos a la resolución de ciertos problemas.

VI.- TEOREMA DE BOLZANO.-

Bernardo Bolzano (1781-1848) fue uno de los primeros matemáticos en reconocer que muchas de las propiedades sobre funciones continuas, que parecen obvias, requieren una demostración. He aquí un importante resultado que lleva su nombre:

Teorema de Bolzano: "Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, y supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios.
Entonces existe al menos un $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = 0$"

Interpretación geométrica:



La gráfica pone de manifiesto la propiedad que expresa el teorema de Bolzano: si la gráfica de una función continua une un punto situado bajo el eje X con otro situado sobre él, entonces la curva ha de cortar al eje alguna vez entre esos dos puntos.

Veamos algunas observaciones importantes referentes al T. de Bolzano.

• NOTA 1: Obsérvese que una de las hipótesis del Teorema de Bolzano es la continuidad sobre un intervalo cerrado. Es necesaria la continuidad en los extremos a y b:

La función f, cuya gráfica es la anterior, es continua en $(a,b]$ y es $sg\, f(a) \neq sg\, f(b)$. Sin embargo no existe ningún $x_0 \in (a,b)$ con $f(x_0)=0$.

• NOTA 2: El Teorema de Bolzano pertenece a un amplio grupo de resultados que en Matemáticas se denominan « teoremas de existencia ». Observa que el teorema afirma que en determinadas circunstancias existe un cero para una función continua, pero:
- No nos dice cuántos ceros hay.
- No nos calcula su valor (o valores).

• Ejemplo 1: Demuéstrese que la ecuación $x^3+x-1=0$ tiene una solución en el intervalo $(0,1)$.

Pongamos $f(x)=x^3+x-1$.

Queremos probar que existe $x_0 \in (0,1)$ con $f(x_0)=0$. Para ello intentaremos aplicar el T. de Bolzano:

1º) f es continua en $[0,1]$ (en efecto, al ser una función continua en todo $\mathbb{R}$, pues es polinómica, es continua en $[0,1]$).

2º) $\left.\begin{array}{l} f(0)=-1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \; sg\, f(0) \neq sg\, f(1)$

Por el Teorema de Bolzano: $\exists x_0 \in (0,1)$ tal que $f(x_0)=0$ c.q.d.

• Ejemplo 2: Demuéstrese que la ecuación $x-2=\ln x$ tiene alguna solución.

Observemos que $x-2=\ln x \iff x-2-\ln x=0$.

Pongamos $f(x)=x-2-\ln x$.

Queremos probar que existe x_0 con $f(x_0)=0$. Para ello intentaremos aplicar el T. de Bolzano a $f(x)$ en un intervalo conveniente:

1º) $f(1)=-1$; $f(2)=-0'69\ldots$; $f(3)=-0'09\ldots$; $f(4)=0'61\ldots$

Es $sg\, f(3) \neq sg\, f(4)$

2º) f es continua en $[3,4]$ (pues $f(x)$ es continua $\forall x>0$)

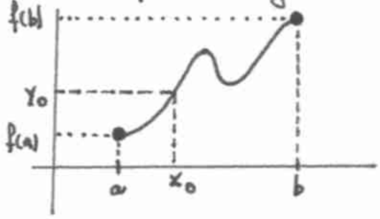
Por el T. de Bolzano: $\exists x_0 \in (3,4)$ tal que $f(x_0)=0$ c.q.d.

VII.- TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO.-

El resultado siguiente es el Teorema del valor intermedio para funciones continuas, y también es llamado T. de Darboux. Se deduce fácilmente del Teorema de Bolzano:

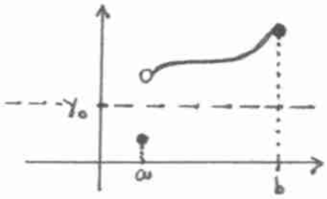
• Teorema: "Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$.
Entonces $f(x)$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$; es decir, si y_0 está comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0)=y_0$"

He aquí una gráfica ilustrativa del teorema:



Si f es continua sobre $[a,b]$
dado y_0 con $f(a) < y_0 < f(b)$
existe $x_0 \in (a,b)$ con $f(x_0) = y_0$

• NOTA 1: De nuevo insistimos en la necesidad de exigir la continuidad de f en el intervalo cerrado.



La función f (cuya gráfica es la de la izquierda) es continua en $I = (a, b]$.

Ahora bien, $f(x)$ no toma todo valor y_0 comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$.

• NOTA 2: El Teorema de Bolzano es un caso particular del del valor intermedio:

Sea f continua en $[a,b]$ con $sg\, f(a) \neq sg\, f(b)$.

Así $y_0=0$ está comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$. El T. valor intermedio nos dice que existe $x_0 \in (a,b)$ con $f(x_0) = 0$.

VIII.- TEOREMA DE LOS VALORES EXTREMOS.-

En este apartado vamos a estudiar que hay una interesante relación entre la continuidad y la acotación.

Precisemos:

• Definición: "Una función f definida sobre el intervalo I se dice que es:

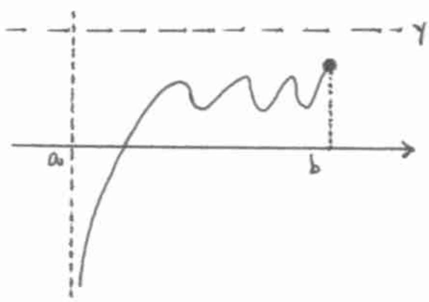
-) Acotada superiormente en I si $\exists C$ tal que $f(x) \leq C$, $\forall x \in I$.

-) Acotada inferiormente en I si $\exists c$ tal que $c \leq f(x)$, $\forall x \in I$.

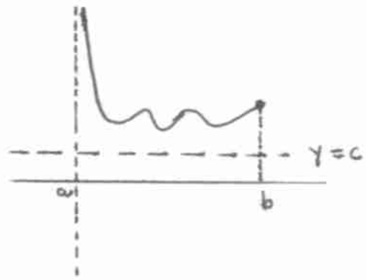
-) Acotada en I si lo es superior e inferiormente"

• NOTA: En la situación anterior, a C se le llama cota superior y a c cota inferior.

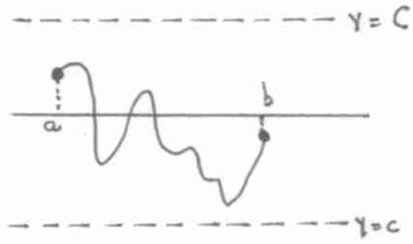
Gráficamente, es fácil reconocer la acotación de una función:



función acotada superiormente



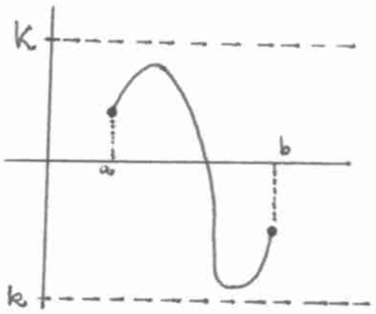
función acotada inferiormente



función acotada

He aquí el teorema de acotación:

• Teorema: " Si f es continua en $[a,b]$ entonces f está acotada en $[a,b]$.



f continua en $[a,b]$

$\Downarrow$

$\exists k, K$ con $k \leq f(x) \leq K$ " $\forall x \in [a,b]$

La continuidad en el intervalo cerrado es fundamental para garantizar la acotación. Así, $f(x) = 1/x$ es continua en $(0,1)$ pero no está acotada en $(0,1)$.

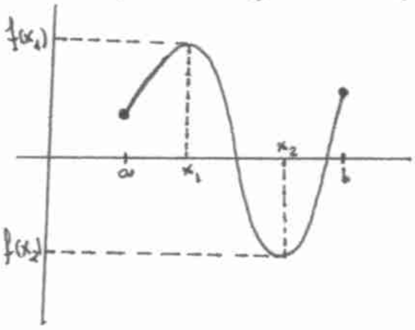
El siguiente resultado va más allá:

• Teorema de los valores extremos: " Sea f continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces $f(x)$ alcanza su máximo y su mínimo en el intervalo $[a,b]$; es decir:

$\exists x_1 \in [a,b]$ t.q. $f(x_1) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$

$\exists x_2 \in [a,b]$ t.q. $f(x_2) = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$ "

He aquí una gráfica que lo ilustra:



Aquí tenemos la gráfica de f continua en $[a,b]$.

⊙ $f(x_1)$ es el máximo de $f(x)$ en $[a,b]$

$(f(x_1) \geq f(x) \, , \forall x)$

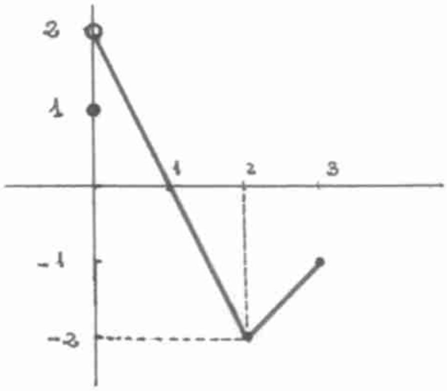
⊙ $f(x_2)$ es el mínimo de $f(x)$ en $[a,b]$

$(f(x) \geq f(x_2) \, , \forall x)$

• <u>NOTA 1</u>: El teorema conocido como Teorema de Weirstrass, es un teorema de existencia: en determinadas condiciones existen máximo y mínimo, pero no nos dice cuál es su valor.

• <u>NOTA 2</u>: No toda función acotada tiene máximo y mínimo. Observa la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ -2x+2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x-4 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



Observa que:

→ f es continua en $(0,3]$, pero no en $[0,3]$.

→ f está acotada en $[0,3]$.

→ La función tiene mínimo: $f(2) = -2$ es el mínimo de f en $[0,3]$

→ La función <u>no</u> tiene máximo. El <u>extremo superior</u> de la función es $M = 2$, pero no es máximo ya que no existe $x_1 \in [0,3]$ con $f(x_1) = 2$.