TEMA 0

FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

Repaso práctico
de
Funciones, Límites y Continuidad
a través de
Ejercicios y Problemas.

José Álvarez Fajardo

Funciones, Límites y Continuidad

Conceptos Básicos

Una **función** real f es una transformación que a cada número x le hace corresponder exactamente un número designado por $y = f(x)$: $x \xrightarrow{f} y$

El número x es llamado **original**, y se llama **dominio** de la función al conjunto de todos los originales.

Al número y se le llama "transformado o **imagen**", siendo el **recorrido** el conjunto de todas las imágenes

Una función queda definida por una fórmula, una tabla de valores (tal vez indefinida) o una gráfica.

Un ejemplo de función es

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

Aquí $x = 1$ no está en su dominio($\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{1\}$).

Una función $y = f(x)$ forma parejas de números $(x\,,y)$ que podemos colocar en tablas de valores.

Si dibujamos esas parejas en plano cartesiano XY aparece una línea que es la gráfica de la función: cada punto de la gráfica es una pareja de la tabla.

Gráficas de Funciones Elementales

Función afín: es $y = mx + n$ una recta. El número m es llamado pendiente de la recta.

Función cuadrática: es $y = ax^2 + bx + c$ una parábola de eje vertical con vértice para $x_v = \dfrac{-b}{2a}$.

Función valor absoluto: es $y = |f(x)|$. La gráfica puede construirse a partir de $y = f(x)$ reflejando respecto del eje X la parte negativa (bajo el eje).

Función a trozos: su gráfica está construida tomando partes de varias funciones. P. ej. la de

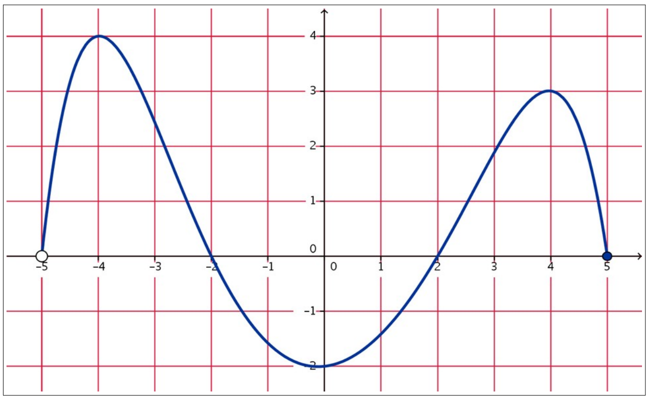
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

es el "trozo de parábola" $y = x^2 + 2x$ para $x < 1$ y el "trozo de recta" $y = 2x + 1$ para $x \geq 1$.

A la hora de dibujarla manualmente hemos de construir tantas tablas de valores como trozos y en ellas deben aparecer siempre los **separa-fórmulas** (incluidos-cerrados ó excluidos-abiertos).

Características Básicas de una Gráfica

Destacamos en la gráfica:



Dominio (conjunto de valores *x* donde hay gráfica):

$$\mathbb{D} = (-5\,,+5]$$

Recorrido: (conjunto de valores *y* donde hay gráfica):

$$R = [-2\,,+4]$$

Continuidad (¿podemos dibujar con un solo trazo -continua- o presenta agujeros, roturas, saltos,... -discontinua-?):

Es continua para todos los valores de su dominio. Ahora bien, hay una singularidad: para $x = -5$ hay agujero en el inicio de la gráfica (es denominado discontinuidad evitable).

Signo:

- Ceros (cortes con el eje X): $x = -2\,,2\,,5$
- Positiva (sobre el eje X): $(-5\,,-2) \cup (2\,,5)$
- Negativa (bajo el eje X): $(-2\,,2)$

Monotonía (crecimiento / decrecimiento):

$f \nearrow$ en $(-5\,,-4]$ y en $[0\,,4]$

$f \searrow$ en $(-5\,,-4]$ y en $[0\,,4]$

Acotación: vemos que la función está acotada. Tanto superiormente ($y = 5$ es cota superior) y acotada inferiormente ($y = -3$) es cota inferior.

Extremos (máximos y mínimos):

Máx. relativos: $A = (-4\,,4)$ (absoluto) y $C = (4\,,3)$.

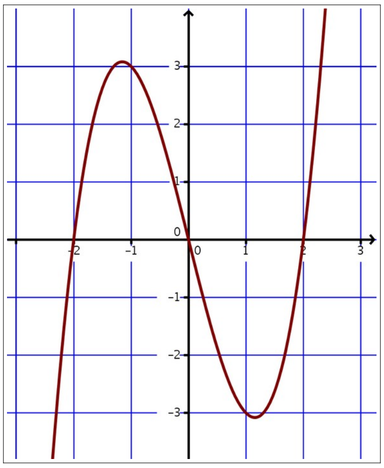
Mín. relativos: $B = (0\,,-2)$ (absoluto) y $D = (6\,,0)$

No hay asíntotas ni es periódica.

Funciones, Límites y Continuidad

Funciones Polinómicas

Aquí dibujada la curva de tercer grado $y = x^3 - 4x$:



Está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$. En esas curvas destacamos los extremos relativos y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

Tendencias de prolongación: ramas izquierda-abajo y derecha-arriba. Simbólicamente se expresa

Si $x \to -\infty$ es $y \to -\infty$, Si $x \to +\infty$ es $y \to +\infty$

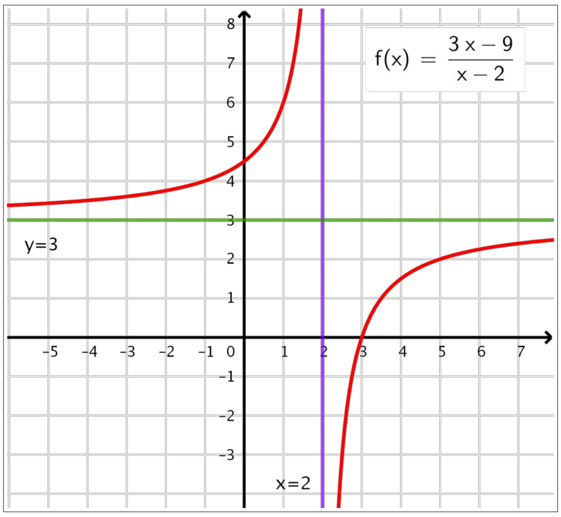
Hipérbolas Básicas

Las **hipérbolas** básicas son las gráficas de fórmula

$$y = \frac{bx + c}{x - a}$$

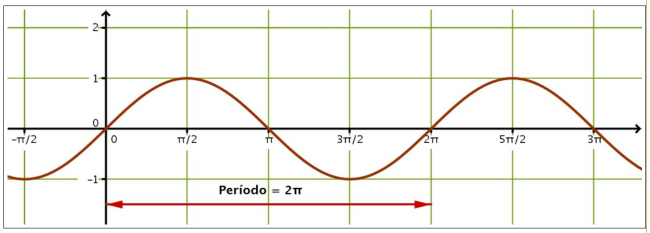
Tienen dos ramas inconexas situadas entre dos rectas llamadas asíntotas, vertical $x = a$ y horizontal $y = b$, que sirven de guías de prolongación.

Presentan una "discontinuidad de salto infinito".



Ondas Trigonométricas

Aquí representada usando Geogebra la función seno:

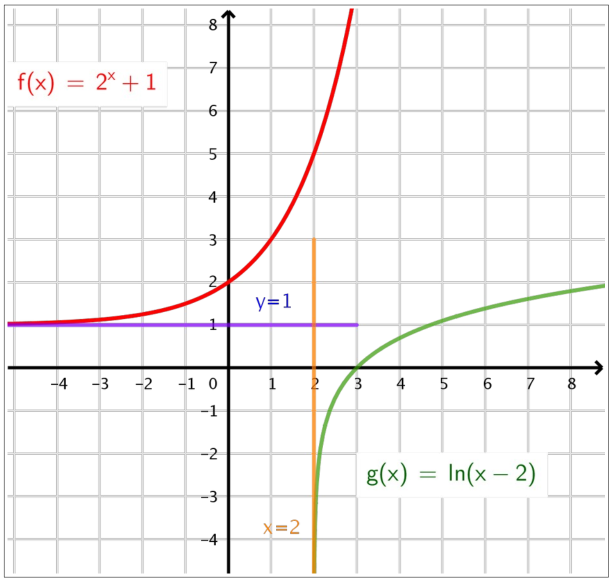


La línea obtenida se denomina curva **sinusoidal**. Está definida y es continua en toda la recta real. Observa su forma de onda y un aspecto fundamental: su periodicidad. Es una función 2π-periódica. Varía entre $y = -1$ e $y = +1$.

La del coseno está desplazada $\pi/2$: pasa por $P(0\,,1)$.

Exponenciales y Logarítmicas

Se han dibujado dos gráficas con Geogebra:



La **exponencial** está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$. Su prolongación es muy diferente a izquierda y derecha.

La dibujada tiene una asíntota horizontal.

La **logarítmica** sólo está definida cuando el argumento del logaritmo es positivo:

$$x - 2 > 0 \to x > 2 \to \mathbb{D} = (2\,, +\infty)$$

Y tiene una asíntota vertical cuando el argumento del logaritmo es cero.

Funciones, Límites y Continuidad

Operaciones

Dadas f y g, para x común a sus dominios, se define:

- La suma $f+g$ como $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- La resta $f-g$ como $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- El producto $f\cdot g$ como $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
- El cociente $\dfrac{f}{g}$ como $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

En este caso, observa que deberá ser $g(x)\neq 0$.

La composición $f\circ g$ de las dos funciones f y g se define mediante:

$$(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]$$

La función f actúa sobre el resultado de la función g:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & g(x) \arrow[r, "f"] & (f\circ g)(x) \end{tikzcd}$$

Por ejemplo, si

$$f(x)=3x+1\,,\; h(x)=\begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+2 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

es:

$(f\circ h)(-1)=f\left[h(-1)\right]=f(-4)=-11$

$(h\circ f)(-1)=h\left[f(-1)\right]=h(-2)=-5$

Función Inversa

Si f asocia a cada $x\in\mathbb{D}$ un único $y\in\mathbb{I}$, la inversa es la función f^{-1} que a cada imagen $y\in\mathbb{I}$ le asocia su original $x\in\mathbb{D}$.

Para calcular su fórmula:

$$y=f(x)\xrightarrow[x]{despejando}x=f^{-1}(y)$$

Por ejemplo , para calcular la inversa de la función dada por $f(x)=\sqrt[5]{3x-2}$, hacemos:

$$y=\sqrt[5]{3x-2}\;\rightarrow\;3x-2=y^5\;\rightarrow\;x=\frac{y^5+2}{3}$$

Luego

$$f^{-1}(y)=\frac{y^5+2}{3}$$

Continuidad

De modo intuitivo, una función es continua cuando su gráfica se puede construir “con un solo trazo”, esto es, no tiene ni agujeros, ni roturas ni saltos.

Sea f una **función** definida en el intervalo I y $x_0\in I$. Decimos que f es **continua** en $x=x_0$ cuando el valor y la tendencia existen y coinciden; esto es:

1. Existe el valor: $f\left(x_0\right)$
2. Existe el límite: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
3. Valor y límite coinciden: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(x_0\right)$

Si alguna de esas tres cosas no ocurren, se dice que en $x=x_0$ hay una **discontinuidad**:

- **evitable** o de agujero. si el límite existe y es finito, pero no coincide con el valor (porque no existe o porque es un número diferente)
- de **salto infinito** si los laterales existen, pero alguno de ellos es infinito.
- de **salto finito** si ambos laterales son finitos pero distintos.
- Por último, hay funciones como $f(x)=\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ que para $x=0$ no tiene siquiera límites laterales . Ésta se denomina discontinuidad **esencial**.

Funciones Elementales

En general, las funciones elementales son continuas en todo punto salvo quizá en algunos valores concretos.

Las funciones polinómicas, seno, coseno y exponencial son continuas en todo punto.

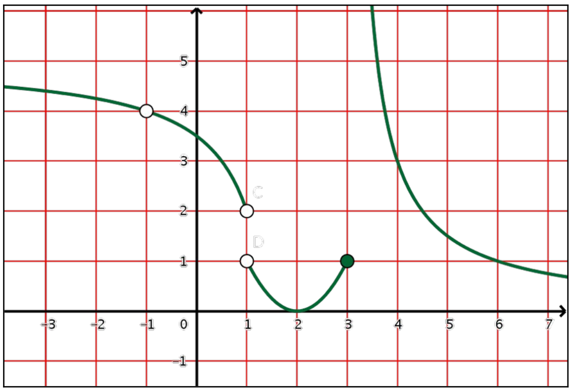
Las funciones racionales, radicales, y logarítmicas son continuas en todos los valores en los que están definidas.

PELIGRO:

- Las funciones fraccionarias son discontinuas en los ceros del denominador (si los hubiese).
- Los logaritmos tienen salto infinito en los ceros del argumento.
- Las funciones a trozos pueden fallar en los separa-fórmulas.

Funciones, Límites y Continuidad

Análisis Gráfico de la Continuidad



Sólo es discontinua para $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

Para $x = -1$ hay discontinuidad evitable:

Valor: $f(-1) = \emptyset$

Tendencias: $f(-1-) = 4$

$f(-1+) = 4$

Para $x = 1$ hay discontinuidad de salto finito:

Valor: $f(1) = \emptyset$

Tendencias: $f(1-) = 2$

$f(1+) = 1$

Para $x = 3$ hay discontinuidad de salto infinito:

Valor: $f(3) = 1$

Tendencias: $f(3-) = 1$

$f(3+) = +\infty$

Límite de Polinomios en un Punto

Sustituimos (pues es continua) para calcular un límite:

$$\lim_{x\to 2} \left(x^3 - x - 1\right) = 2^3 - 2 - 1 = 5$$

Límites de Funciones a Trozos en un Punto

Veamos los límites para $x \to -2$, $x \to 0$ y $x \to 2$ de

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -x^2+9 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} (2x+1) = -3$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \begin{cases} f(0-) = 2\cdot 0 + 1 = 1 \\ f(0+) = -0^2 - 9 = -9 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \left(-x^2+9\right) = 5$$

Límite de Racionales en un Punto

Sustituimos y hay tres posibilidades:

- Si el valor existe, el límite es ese número (continua):

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x}{2x-4} = \frac{-1}{-2} = 0.5$$

- Si obtenemos un número no nulo entre cero, el límite es infinito (salto infinito):

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x^2-9} = \left[\frac{4}{0}\right] = \begin{cases} f(3-) = -\infty \\ f(3+) = +\infty \end{cases}$$

- Si obtenemos cero entre cero es indeterminado, debiendo factorizar y simplificar para volver a sustituir (agujero o salto infinito):

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 4} \frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{x\cancel{(x-4)}} = \frac{8}{4} = 2$$

Límite de Polinomios en el Infinito

Siempre es infinito (sustituimos el líder):

$$\lim_{x\to -\infty} \left(-2x^3+5x^2\right) = -2(-\infty)^3 = -2(-\infty) = +\infty$$

Límite de Polinomios en el Infinito

Si p y q son polinomios entonces (regla de grados):

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \operatorname{gr}(p) < \operatorname{gr}(p) \\ \dfrac{a}{b} & \text{si} \quad \operatorname{gr}(p) = \operatorname{gr}(p) \\ \pm\infty & \text{si} \quad \operatorname{gr}(p) > \operatorname{gr}(p) \end{cases}$$

Exponenciales y Logaritmos

Retengamos estos límites:

$$e^{-\infty} = 0 \qquad e^{+\infty} = +\infty$$

$$\ln(0+) = -\infty \qquad \ln(+\infty) = +\infty$$

- Ejemplo: Continuidad de $f(x) = \ln(x-1)$:

Sólo es discontinua para $x - 1 = 0 \to x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = \ln(0) = \emptyset \\ f(1+) = \ln(+0) = -\infty \end{array}\right\} \to \text{Salto infinito}$$

- Ejemplo: Veamos límites con exponenciales

$$\lim_{x\to -\infty} \left(e^{-2x}+1\right) = e^{+\infty}+1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(e^{-2x}+1\right) = e^{-\infty}+1 = 0+1 = 0$$

José Álvarez Fajardo

ASÍNTOTAS

Verticales:

$$x = a \qquad \text{si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

Horizontales

$$y = b \quad \text{si} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$$

Oblicuas

$$y = mx + n \quad \text{si} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = n \end{cases}$$

• <u>Ejemplo</u>: Obtenemos las asíntotas de

$$y = \frac{2x+1}{x-3}$$

Verticales:

$$x - 3 = 0 \to x = 3$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x+1}{x-3} = \left[\frac{7}{0}\right] = \pm\infty$$

Horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x-3} = \frac{2}{1} = 2 \to y = 2$$

Oblicuas:

No hay, al tener horizontal para $x \to \pm\infty$.

• <u>Ejemplo</u>: Obtenemos las asíntotas de

$$y = \frac{2x^3}{1+x^2}$$

Verticales:

$$1 + x^2 = 0 \to x^2 = -1 \to \text{no}$$

Horizontales

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3}{1+x^2} = \pm\infty \to \text{no}$$

Oblicuas

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3}{x+x^3} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2}{1+x^2} - 2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x}{1+x^2} = 0$$

$$y = 2x$$

La función y su gráfica: elementos básicos

EJERCICIO 1:

En un experimento que dura seis horas se estudia la temperatura de un objeto. Ésta varía en función del tiempo transcurrido desde el inicio de la experiencia según la fórmula

$$T = 0.5t^2 - 2.5t \quad , \quad 0 \leq t \leq 6$$

donde el tiempo (t) está medido en horas y la temperatura (T) en grados centígrados.

a) ¿Cuál es la temperatura al inicio del experimento? ¿Y al final?

b) Dibuja la gráfica tiempo – Temperatura.

c) ¿En qué período de tiempo aumenta la temperatura del objeto? ¿En cuál disminuye?

d) Señala las temperatura máxima y mínima alcanzadas.

e) Indica cuándo la temperatura está bajo cero y cuándo por encima.

f) Construye un esquema de variación de la función.

EJERCICIO 2:

Considera la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x < -1 \\ 4-2^{-x} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

Dibuja su gráfica y señala: dominio, recorrido, continuidad, monotonía, extremos y límites en el infinito.

EJERCICIO 3:

Expresa la superficie y la diagonal de un rectángulo de perímetro 8 cm en función de la longitud de la base.

Operaciones con funciones. Función inversa

EJERCICIO 4:

Considera las funciones siguientes:

$$f(x) = 2x - 1 \quad , \quad g(x) = \sqrt{3x+6} \quad , \quad h(x) = \frac{x+1}{2x}$$

a) Calcula $(f+h)(-1)$ y $(f \circ g)(1)$

b) Halla $\left(\dfrac{h}{f}\right)(x)$ y su dominio.

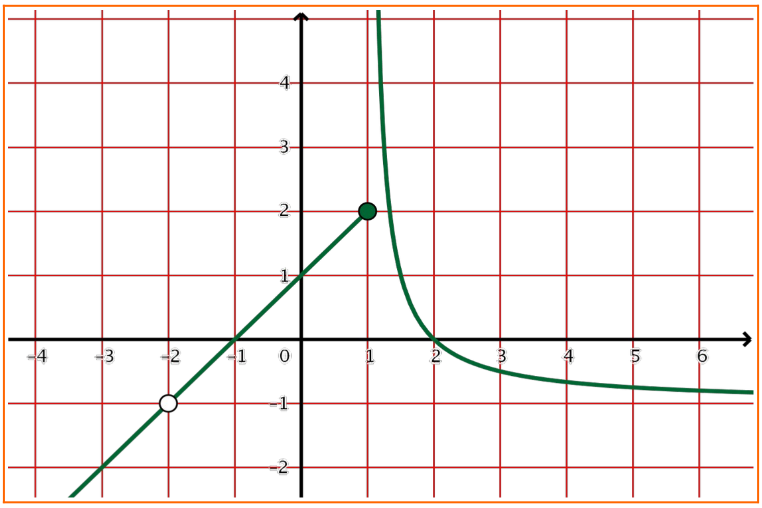
c) Obtén $(g \circ f)(x)$ y su dominio.

d) Obtén la recíproca de g.

Límites y Continuidad

EJERCICIO 5:

Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde:



a) [1,5] Estudia la continuidad de la función, señalando valor y tendencias en las discontinuidades.

b) [0,5] Indica las tendencias de $f(x)$ la función para $x \to \pm\infty$.

c) [0,5] ¿Qué asíntotas tiene la gráfica?

EJERCICIO 6: Si está f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 1 + 2^{-x} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

a) Estudia algebraicamente su continuidad.

b) Obtén los límites en el infinito de la función.

c) Determina las asíntotas de la gráfica.

EJERCICIO 7: Dada la función g definida por:

$$g(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - x - 2}$$

a) Estudia algebraicamente su continuidad.

b) Obtén los límites en el infinito de la función.

c) Determina las asíntotas de la gráfica.

EJERCICIO 8:

a) Si f es una función que verifica $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$ y $f(0) = 1$, estudia su continuidad para $x = 0$.

b) Dibuja la gráfica de una función que tenga a la recta $y = 1$ como asíntota horizontal y que verifique $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = -\infty$.

Cálculo de Derivadas

EJERCICIO 9:

Obtén la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^3\,\mathrm{e}^x$ b) $y = \dfrac{x^2-4}{2x-1}$ c) $y = \sqrt{x+\cos x}$

d) $y = \left(2x^3+1\right)^4$ e) $y = \ln\left(x^3-1\right)$ f) $y = \mathrm{e}^{x-\operatorname{sen} x}$

EJERCICIO 10:

Obtén la derivada de las siguientes funciones, simplificando adecuadamente:

a) $y = 6x\cdot\operatorname{sen}(2x) + 3\cos(2x)$ b) $y = x - \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)$

c) $y = 3\left(x^2+1\right)^5$ d) $y = \dfrac{2x+1}{3x-5}$

Concepto de derivada. Derivabilidad

EJERCICIO 11: [RESUELTO]

Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2x^2-x+1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función.

b) Estudia su derivabilidad y calcula su función derivada.

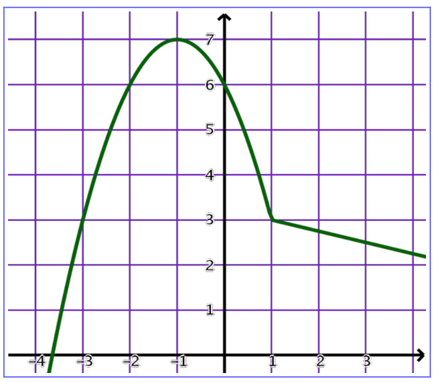
c) Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función para $x = 3$.

Interpretación de la derivada

EJERCICIO 12:

Halla a y b sabiendo que $y = x^3 + ax^2 + b$ pasa por $(2,\,-1)$ y tiene un extremo relativo para $x = -3$.

EJERCICIO 13: La gráfica que vemos dibujada es $y = f(x)$. Haz una tabla o esquema que recoja, razonadamente:



a) los puntos en los que la derivada no existe,

b) los puntos en los que la derivada es cero,

c) los intervalos de signo de la derivada.

Ampliación asíntotas

EJERCICIO 14:

Obtengamos las asíntotas de

$$y = \frac{2x^3}{1+x^2}$$

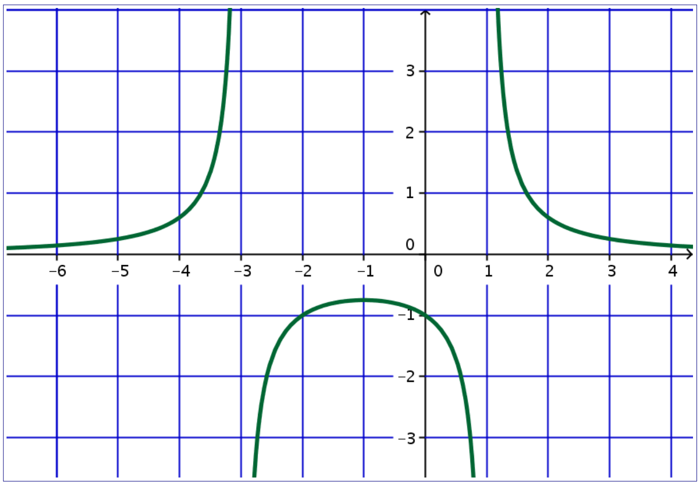
EJERCICIO 15:

Determina el valor k sabiendo que pasa por el punto $(1\,,3)$ la asíntota de la curva de ecuación

$$y = \frac{x^3+kx^2+1}{x^2+1}$$

EJERCICIO 16:

Determina a, b y c para que la curva $y = \dfrac{a}{x^2+bx+c}$ sea la siguiente:



Ampliación cálculo de límites

EJERCICIO 17:

Obtengamos a para que se cumpla

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x\,(x+a)}{x+2}-\frac{x^2+1}{x-2}\right]=2$$

EJERCICIO 18:

Obtengamos a para que se cumpla

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=2$$

EJERCICIO 19:

Calculemos los límites $x \to 0$ y para $x \to \pm\infty$ de

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 1$

b) $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2+1}{x}}$

EJERCICIO 20:

Calcula los límites para $x \to \pm\infty$, $x \to 1-$ y $x \to 2+$ de

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

Opcional: Teoremas del Valor Medio

EJERCICIO 21:

Demuestra que las gráficas de las funciones definidas mediante

$$f(x) = x - 2 \quad , \quad g(x) = \ln x$$

se cortan en algún punto.

Dibújalas e indica en cuántos puntos se interceptan.

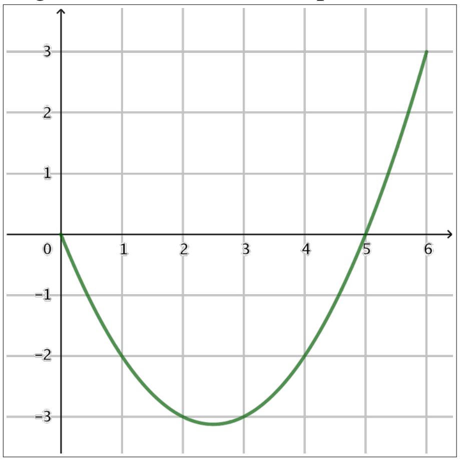
Soluciones

EJERCICIO 1:

a) Hacemos $t = 0 \;\rightarrow\; T = 0$: al inicio del experimento la temperatura es de cero grados.

Haciendo $t = 6 \;\rightarrow\; T = 3$: al final de la experiencia la temperatura es de tres grados.

b) La gráfica será un trozo de parábola con vértice para $t = 2.5$. Con una tabla de valores conseguimos:



c) En la gráfica apreciamos que la temperatura aumenta desde el inicio hasta las 2,5 horas y disminuye desde ese momento hasta el final.

d) La temperatura máxima es 3 ºC y se alcanza a las 6 horas (al final del experimento)

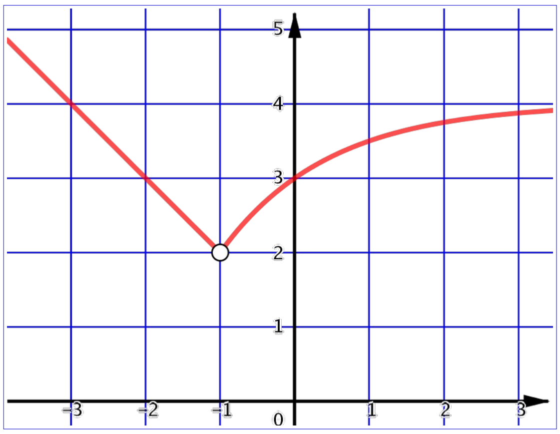
La temperatura mínima es de – 3,125ºC y se alcanza a las 2,5 horas (vértice de la gráfica).

e) La temperatura está bajo cero desde el inicio hasta las cinco horas, en que está a cero grados. Y desde las cinco horas hasta el final está por encima de los cero grados.

f) La siguiente tabla resume la variación de la función:

t	0		2,5		6
T	0	↘	–3,125	↗	3

EJERCICIO 2:



a) La gráfica se compone de un trozo de recta y de un trozo de curva exponencial.

b) El dominio es el conjunto de los valores x para los que hay gráfica:

$$\mathbb{D} = (-\infty\,, -1) \cup (-1\,, +\infty)$$

El conjunto de imágenes es el formado por todos los valores y que toma la función:

$$R_f = (2\,, +\infty)$$

La gráfica es continua en todo punto excepto para $x = -1$, donde presenta una discontinuidad evitable (un agujero).

Observamos en la gráfica que la función es decreciente hasta $x = -1$ y creciente a partir de esta abscisa.

En cuanto a los valores extremos, observamos que no hay valor máximo porque la función no está acotada superiormente.

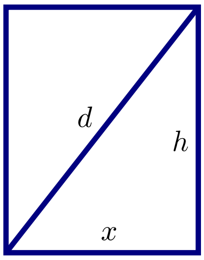
No tiene tampoco valor mínimo, aunque su extremo inferior es $y = 2$

Observemos que y se aproxima cada vez más a 4 conforme x va tomando valores cada vez más grandes ($y = 4$ es asíntota horizontal). Pero y toma valores cada vez más grandes cuando x va tomando cada vez más pequeños. Así:

$$\text{si } x \rightarrow -\infty \text{ es } y \rightarrow +\infty$$

$$\text{si } x \rightarrow +\infty \text{ es } y \rightarrow +4$$

EJERCICIO 3:



Llamamos x la longitud de la base, h la longitud de la altura, d a la longitud de la diagonal y S a la superficie o área.

Sabemos que el perímetro es ocho: $2x + 2h = 8 \rightarrow x + h = 4 \rightarrow h = 4 - x$

El área en función de la base es: $S = x\,(4 - x)$

La diagonal en función de la base es: $d = \sqrt{x^2 + (4 - x)^2}$

EJERCICIO 4:

$$f\,(x) = 2x - 1 \quad , \quad g\,(x) = \sqrt{3x + 6} \quad , \quad h\,(x) = \frac{x + 1}{2x}$$

a) $(f + h)\,(-1) = -3 + 0 = -3$

$(f \circ g)\,(1) = f\,[g\,(1)] = f\,(3) = 5$

El esquema de esta composición es:

$$\begin{tikzcd} x = 1 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & 3 \arrow[r, "f"] & y = 5 \end{tikzcd}$$

b) En cuanto al cociente:

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{x + 1}{2x} : \frac{2x - 1}{1} = \frac{x + 1}{2x\,(2x - 1)}$$

El denominador no puede ser cero:

$$2x\,(2x - 1) = 0 \;\rightarrow\; x = 0, x = 0.5$$

Así, el dominio es:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\,, 0.5\}$$

c) La fórmula que define a la función compuesta es:

$$(g \circ f)\,(x) = g\,(2x - 1) = \sqrt{3\,(2x - 1) + 6} = \sqrt{6x + 3}$$

El radicando no puede ser negativo, por ello debe ser:

$$6x + 3 \geq 0 \rightarrow 6x \geq -3 \rightarrow x \geq -3/6 \rightarrow x \geq -0.5$$

Así, el dominio es:

$$D = [-0.5\,, +\infty)$$

d) Veamos la función inversa:

$$\sqrt{3x + 6} = y \;\rightarrow\; 3x + 6 = y^2 \;\rightarrow\; 3x = y^2 - 6 \;\rightarrow\; x = \frac{y^2 - 6}{3}$$

Tenemos así

$$g^{-1}\,(y) = \frac{y^2 - 6}{3}$$

EJERCICIO 5:

a) Observamos que es continua en todo punto salvo para $x = 1$ (discontinuidad de salto infinito) y para $x = -2$ (discontinuidad evitable o de agujero).

En $x = 1$:		En $x = -2$:	
Valor:	$f(1) = 2$	Valor:	$f(-2) =$ no existe
Tendencias:	$f(1-) = 2$	Tendencias:	$f(-2-) = -1$
	$f(1+) = +\infty$		$f(-2+) = -1$

b) Las tendencias en el infinito son:

si $x \to -\infty$ es $y \to -\infty$

si $x \to +\infty$ es $y \to -1$

c) Vemos las asíntotas:

Asíntota vertical (por el apartado a): $x = 1$

Asíntota horizontal (por el apartado b): $y = -1 \; (x \to -\infty)$

EJERCICIO 6:

a) La función sólo puede ser discontinua en $x = -1$, por ser el separa-fórmulas de trozos continuos.

Veamos en $x = -1$:

Valor: $f(-1) = -1 + 2(-1)^2 = 1$

Tendencias: $f(-1-) = -1 + 2(-1)^2 = 1$

$f(-1+) = 1 + 2^{+1} = 3$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito ($s = 3 - 1 = 2$) para $x = -1$.

b) Las tendencias en el infinito son:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + 2x^2\right) = 2(-\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + 2^{-x}\right) = 1 + 2^{-\infty} = 1 + 0 = 1$$

c) Veamos las asíntotas:

Asíntotas verticales (por el apartado a): no hay ya que no hay discontinuidades de salto infinito.

Asíntota horizontal (por el apartado b): $y = 1$

EJERCICIO 7:

a) Aplicamos la regla de los grados. Como el grado del numerador y del denominador es el mismo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

b) La función sólo puede ser discontinua en los ceros del denominador, que son:

$$x^2 - x - 2 = 0 \;\to\; x = -1\,, x = 2$$

Veamos en $x = -1$:

Valor: $f(-1) = \left[\frac{6}{0}\right] = \emptyset$

Tendencias: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \left[\frac{6}{0}\right] = \pm\infty$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x = -1$.

Veamos en $x = 2$:

Valor: $f(2) = \left[\frac{0}{0}\right] = \emptyset$

Tendencias $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{*}{=} \lim\limits_{x \to 2} \frac{2x\cancel{(x-2)}}{(x+1)\cancel{(x-2)}} = \frac{4}{3}$

[indeterminación que evitamos factorizando numerador y denominador para simplificar]

Concluimos que hay una discontinuidad evitable o de agujero para $x = 2$.

c) Veamos las asíntotas:

Asíntota vertical (por el apartado b): $x = -1$

Asíntota horizontal (por el apartado a): $y = 2$

EJERCICIO 8:

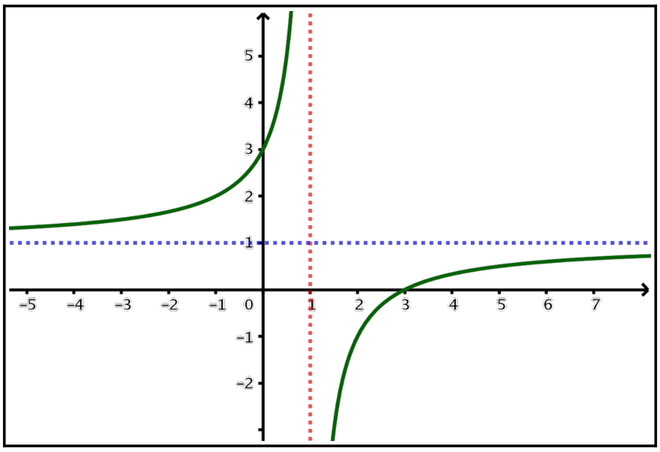
a) Observemos que depende de cuánto sea L:

Si $L = 1$ entonces valor y tendencia coinciden: f es continua para $x = 0$.

Si $L \neq 1$ y $L \neq \pm\infty$ existe la tendencia y es distinta del valor: discontinuidad evitable para $x = 0$.

Si $L = \pm\infty$ entonces la función diverge y hay una discontinuidad de salto infinito para $x = 0$.

b) Esta es una de las infinitas posibilidades:



EJERCICIO 9:

a) Derivada de un producto:

$$y = x^3 e^x \;\rightarrow\; y' = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x = e^x \left(3x^2 + x^3\right)$$

b) Derivada de un cociente:

$$y = \frac{x^2 - 4}{2x - 1} \;\rightarrow\; y' = \frac{2x\,(2x-1) - 2\left(x^2 - 1\right)}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 2}{(2x-1)^2}$$

c) Derivada de una potencia (con regla de la cadena):

$$y = \left(2x^3 + 1\right)^4 \;\rightarrow\; y' = 4\left(2x^3+1\right)^3 \cdot 6x^2 = 24x^2 \cdot \left(2x^3+1\right)^3$$

d) Derivada de un logaritmo (con regla de la cadena):

$$y = \ln\left(x^3 - 1\right) \;\rightarrow\; y' = \frac{1}{x^3 - 1} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3 - 1}$$

e) Derivada de una raíz (con regla de la cadena):

$$y = \sqrt{x + \cos x} \;\rightarrow\; y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \cos x}} \cdot (1 - \operatorname{sen} x) = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{2\sqrt{x + \cos x}}$$

f) Derivada de una exponencial (con regla de la cadena):

$$y = e^{x - \operatorname{sen} x} \;\rightarrow\; y' = e^{x - \operatorname{sen} x} \cdot (1 - \cos x)$$

EJERCICIO 10:

a) Derivada de un producto y de una resta (con la regla de la cadena):

$$y' = \cancel{6 \cdot \operatorname{sen}(2x)} + 6x \cdot \cos(2x) \cdot 2 - \cancel{3\operatorname{sen}(2x) \cdot 2} = 12x\cos(2x)$$

b) Derivada de una resta (con regla de la cadena):

$$y' = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

c) Derivada de una potencia con regla de la cadena:

$$y' = 15\left(x^2 + 1\right)^4 \cdot 2x = 30x\left(x^2 + 1\right)^4$$

d) Derivada de un cociente:

$$y' = \frac{2\,(3x-5) - 3\,(2x+1)}{(3x-5)^2} = \frac{-13}{(3x-5)^2}$$

EJERCICIO 11:

a) f sólo puede ser discontinua para $x = 2$, pues un separador de fórmulas continuas. Y en éste:

$x = 2$

VALOR: $f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$

TENDENCIAS: $f(2-) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$

$f(2+) = 2 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 7$

Concluimos que es continua en $x = 2$.

b) Podemos derivar directamente si $x \neq 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ 4x - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para $x = 2$, como es continua, podemos hallar las derivadas laterales así:

$$\text{DERIVADAS LATERALES} \quad \begin{cases} f'(2-) = 3 \\ f'(2+) = 4 \cdot 2 - 1 = 7 \end{cases}$$

Como no coinciden concluimos que no es derivable para este valor (se trata de un punto anguloso)

c) La ecuación de la recta tangente para $x = 3$ es

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$$

Sustituyendo, obtenemos $f(3) = 16$ y $f'(3) = 11$. Así que la fórmula nos queda:

$$y - 16 = 11(x - 3) \;\rightarrow\; y = 11x + 17$$

EJERCICIO 12:

Lo primero es derivar:

$$y = x^3 + ax^2 + b \;\rightarrow\; y' = 3x^2 + 2ax$$

si pasa por el punto $(2, -1)$, entonces para $x = 2$ es $y = -1$:

$$8 + 4a + b = -1 \text{ (*)}$$

si tiene un extremo relativo para $x = -3$, entonces para $x = -3$ es $y' = 0$:

$$3 \cdot 9 - 6a = 0 \text{ (**)}$$

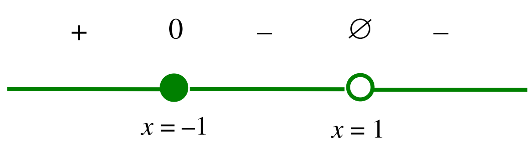
De (*) y (**) obtenemos $a = 4.5$, $b = -27$.

EJERCICIO 13:

Tenemos en cuenta:

- que si la función crece la derivada es positiva y que si decrece la derivada es negativa
- que la derivada es cero en los extremos relativos suaves
- que la derivada no existe en el punto anguloso:

Así el esquema de la derivada es:



EJERCICIO 14:

<u>Verticales</u>:

$$1 + x^2 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{no}$$

<u>Horizontales</u>:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3}{1 + x^2} = \pm\infty \rightarrow \text{no}$$

Oblicuas:

Si existe será $y = mx + n$ con:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3}{x + x^3} = 2$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{1 + x^2} - 2x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x}{1 + x^2} = 0$$

Es la recta de ecuación

$$y = 2x$$

EJERCICIO 15:

Observemos que $y = \dfrac{x^3 + kx^2 + 1}{x^2 + 1}$ no tiene ceros en el denominador, por lo que no tiene asíntotas verticales.

Y el numerador tiene mayor grado que el denominador, así que no tiene asíntotas horizontales.

Si hay asíntota debe ser oblicua: $y = mx + n$. Vamos a obtener su fórmula (con la letra k) y luego obtendremos el parámetro obligando a que pase por el punto $(1\,,3)$

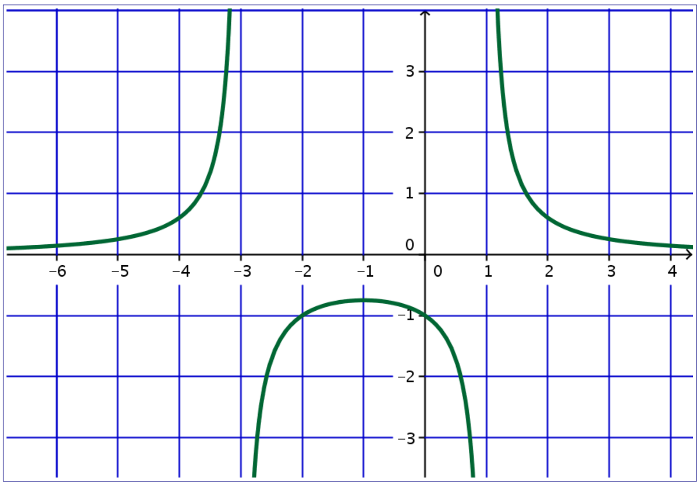
$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + kx^2 + 1}{x^3 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 + kx^2 + 1}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{kx^2 - x + 1}{x^2 + 1} = k$$

Como la asíntota $y = x + k$ pasa por el punto $(1\,,3)$, sustituyendo:

$$3 = 1 + k \to k = 2$$

EJERCICIO 16:



Como la función es racional, sólo puede ser discontinua en los ceros del denominador.

Y en la gráfica vemos que hay asíntotas verticales (discontinuidades de salto infinito) para $x = -3$ y $x = 1$.

Así que éstos son los ceros del denominador y por ello:

$$x^2 + bx + c = (x + 3)(x - 1)$$

Efectuando e igualando:

$$x^2 + bx + c = x^2 + 2x - 3 \to b = 2\,, c = -3$$

Por otro lado, observamos claramente que la gráfica pasa por el punto $(0\,,-1)$; así:

$$f(0) = -1 \to \frac{a}{0 + 0 - 3} = -1 \to a = 3$$

Resumiendo:

$$a = 3\,, b = 2\,, c = -3$$

EJERCICIO 17:

Vamos a calcular el límite en función del parámetro y luego igualaremos a 2. En primer lugar, si intentáramos un cálculo directo, sin operar nada:

$$L = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x\,(x+a)}{x+2}-\frac{x^2+1}{x-2}\right]=\infty-\infty=\text{ind}$$

Nos aparece una indeterminación (ese límite puede ser cualquier cosa y el camino elegido no lo muestra). Vamos entonces a realizar todas las operaciones que hay ahí y luego intentaremos calcular el límite:

$$\frac{x^2+ax}{x+2}-\frac{x^2+1}{x-2}=\frac{\left(x^2+ax\right)(x-2)-\left(x^2+1\right)(x+2)}{(x+2)\,(x-2)}=\frac{(4-a)\,x^2-(2a+1)\,x-2}{x^2-4}$$

Así que:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{(4-a)\,x^2-(2a+1)\,x-2}{x^2-4}=\frac{4-a}{1}=4-a$$

Al final lo hemos sacado por la regla de los grados. Pero igualemos ya al número deseado y obtengamos a:

$$L=2\to 4-a=2\to a=2$$

EJERCICIO 18:

Vamos a calcular el límite en función del parámetro y luego igualaremos a 2. En primer lugar, si intentamos un cálculo directo, sin operar nada:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=\infty-\infty=\{IND\}$$

Nos aparece una indeterminación (ese límite puede ser cualquier cosa y el camino elegido no lo muestra). Primer truco: multiplicaremos numerador y denominador por la expresión conjugada (igual que cuando se racionaliza):

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+ax+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax+1-x^2}{\sqrt{x^2+ax+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1}+x}$$

Ahora parece peor, pero no lo es: un intento de cálculo directo de nuevo nos lleva a una indeterminación. Usaremos un nuevo truco (el segundo) : dividiremos entre la potencia líder que, si nos fijamos bien, es x:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+1/x}{\sqrt{1+a/x+1/x^2}+1}=\frac{a+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{a}{2}$$

¡Ahí está el límite al descubierto! Ahora lo igualamos al número deseado y sacamos el parámetro:

$$L=2\to\frac{a}{2}=2\to a=4$$

EJERCICIO 19:

a) Los límites pedidos son:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)=\mathrm{e}^{+\infty}+1=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)=\mathrm{e}^{-\infty}+1=0+1=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)=\mathrm{e}^{0}+1=1+1=2$$

b) Los límites en el infinito para $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2+1}{x}}$ son:

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{\frac{x^2+1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{\pm\infty}{-\infty}} = \{\text{regla grados}\} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{x^2+1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{\pm\infty}{+\infty}} = \{\text{regla grados}\} = \mathrm{e}^{+\infty} = +\infty$$

Y para $x \to 0$ (se distinguen los laterales):

$$\lim_{x \to 0-} \mathrm{e}^{\frac{x^2+1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{-0}} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 0-} \mathrm{e}^{\frac{x^2+1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{+0}} = \mathrm{e}^{+\infty} = +\infty$$

Observemos que la función g presenta una discontinuidad de salto infinito para $x = 0$.

EJERCICIO 20:

Aunque no se solicite, vamos a estudiar el dominio de la función: para que exista el logaritmo su argumento debe ser positivo:

$$\frac{x-2}{x-1} > 0$$

Si analizamos el signo de dicha fracción y elegimos los intervalos donde es positiva obtenemos:

$$\mathbb{D} = (-\infty\,, 1) \cup (2\,, +\infty)$$

Los límites pedidos son:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \{\text{regla grados}\} = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \to 1-} \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{-1}{-0}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2+} \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{+0}{1}\right) = \ln(+0) = -\infty$$

EJERCICIO 21:

Los puntos de corte de ambas gráficas vienen señalados por las soluciones de la ecuación:

$$f(x) = g(x) \;\to\; x - 2 - \ln x = 0$$

Observemos que la función

$$h(x) = x - 2 - \ln x$$

1) es continua para $x > 0$

2) Toma valores de signos contrarios en $h(1) = -1$, $h(4) = 2 - \ln 4 = +0.6\ldots$

Por el Teorema de Bolzano, aplicado a h en el intervalo $[1\,, 4]$ obtenemos que la ecuación $x - 2 - \ln x = 0$ tiene al menos una solución en dicho intervalo.

Así, las gráficas de f y de g se interceptan al menos en un punto correspondiente al intervalo.

Al dibujar las gráficas vemos que hay dos cortes: el anterior en el intervalo $(1, 4)$ y otro en el intervalo $(0\,, 1)$.