Modelos De Selectividad – Andalucía

Instrucciones

1. Duración: 1 hora y 30 minutos.
2. Tienes que elegir entre realizar unicamente los cuatro ejercicios de la Opción A o realizar unicamente los cuatro ejercicios de la Opción B.
3. La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
4. Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
5. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Tiempo

90 minutos

Criterios de Evaluación

Los criterios esenciales de valoración serán el planteamiento razonado y la ejecución técnica del mismo. La mera descripción del planteamiento sin que se lleve a cabo de forma efectiva no puede ser suficiente para obtener una valoración positiva del mismo.

En los ejercicios en los que se pida una deducción razonada, la mera aplicación de un fórmula no será suficiente.

No se prohibirá el uso de calculadoras, aunque durante el examen no se permitirá el préstamo de ellas entre estudiante. En cualquier caso, los procesos que conducen al resultado deben estar razonados.

Los errores cometidos en un apartado no se tendrán en cuenta en la calificación de apartados posteriores que sean afectados.

Los errores no conceptuales en las operaciones se penalizarán con un máximo del 10% de la nota total del ejercicio.

La presentación clara y ordenada se valorará positivamente.

Modelo 1 - junio

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} \quad , \quad x \neq -1$$

a) [1,5] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .

b) [1] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

EJERCICIO 2

Sea la función $f : (0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1 + \mathrm{e}^x}{1 - \mathrm{e}^x}$$

Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1\,, 1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = \mathrm{e}^x$)

EJERCICIO 3

Consideremos

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula todas las matrices X con determinante 1 en las que $a + d = 1$ y que cumplen $AX = XA$.

EJERCICIO 4

Considera la recta y los planos:

$$r : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = z - 1 \ , \ \pi_1 : x = 0 \ , \ \pi_2 : y = 0$$

a) [1,5] Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 .

b) [1,25] Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de dichos planos.

Modelo 1- junio

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (x - a)\,\mathrm{e}^{x}$$

a) [1,25] Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x = 0$.

a) [1,25] Para $a = 1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f .

EJERCICIO 2

Considera la funciones $f : (-2\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas respectivamente por

$$f(x) = \ln(x+2) \quad , \quad g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$$

a) [1] Esboza el recinto que determinan sus gráficas con las rectas $x = 1$ y $x = 3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).

b) [1,5] Determina el área del recinto anterior.

EJERCICIO 3

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^t A = B^t$ para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2m-1 & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$$

Discútelo según los distintos valores de m.

EJERCICIO 4

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1\,,1\,,0)$, $B(1\,,0\,,2)$ y $C(0\,,2\,,1)$.

a) [1,25] Halla el área de dicho triángulo.

b) [1,25] Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

Modelo 2 - Septiembre

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$$

calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de f y la recta y = 0.

EJERCICIO 2

Determina la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$$f'(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

y que la gráfica de f pasa por el punto $(1, 0)$.

EJERCICIO 3

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x + & & y + 2z & = & 0 \\ (m+2)\,x + & & y - \ z & = & m \\ 3x + & (m+2)\,y + & z & = & m \end{array}\right.$$

a) [1,5] Discute el sistema según los valores de *m*.

b) [1] Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 0$.

EJERCICIO 4

Se consideran los vectores

$$\vec{u} = (1, 2, 3) \quad , \quad \vec{v} = (1, -2, -1) \quad , \quad \vec{w} = (2, \alpha, \beta)$$

a) [0,75] Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) [0,75] Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

c) [1] Para α = 8, determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Modelo 2 – Septiembre

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se sabe que es derivable la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x+ax+b & \text{si} \quad x\leq 0\\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

Calcula a y b.

EJERCICIO 2

Sea la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$$

a) [1,25] Calcula los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [1,25] Determina $a>0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0\,,a]$ y el eje de abscisas.

EJERCICIO 3

Calcula, en grados, los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

EJERCICIO 4

Consideremos las rectas dadas por:

$$r:\frac{x-2}{1}=\frac{y-k}{2}=\frac{z}{2} \quad , \quad s:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{1}$$

a) [1,5] Halla k sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.

b) [1] Para $k=1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Modelo 3

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-2x} - 2x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

EJERCICIO 2

Calcula

$$\int \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) \mathrm{d}x$$

EJERCICIO 3

Considera

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) [1] Calcula los valores de m para los cuales A tiene inversa.

b) [1,5] Para $m = 2$, encuentra la matriz X que cumple $AX - BB^t = \mathrm{I}$.

EJERCICIO 4

Considera el punto y los planos

$$A\,(2,1,0) \quad , \quad \pi_1 : x+y+z=0 \quad , \quad \pi_2 : x-y+z=0$$

a) [1,25] Calcula la recta que pasa por A y es paralela a π_1 y a π_2.

b) [1,25] Calcula los puntos de la recta $s : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$ que equidistan de π_1 y π_2 .

Modelo 3

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se sabe que es derivable la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2b & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Calcula a y b.

EJERCICIO 2

Sean las funciones $f, g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \quad , \quad g(x) = \operatorname{sen}(2x)$$

a) [1] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

a) [1,5] Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas y las rectas $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{3}$.

EJERCICIO 3

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx - y + 13z = 0 \\ 2x - my + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \end{cases}$$

a) [1,5] Encuentra los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

b) [1] Resuelve el sistema para $m = 3$. En este caso, ¿hay alguna solución en la que $x = 10$? Razona tu respuesta.

EJERCICIO 4

Considera los puntos y el plano

$$A(0, 3, -1) \quad , \quad B(0, 1, a) \quad , \quad \pi : x - y + z = 0$$

a) [0,75] Determina a sabiendo que la recta que pasa por A y por B es paralela al plano π.

b) [0,75] Halla el punto de corte del plano π con la recta que pasa por A y es perpendicular a dicho plano.

c) [1] Para $a = 2$, halla el plano que contiene a los puntos A y B y es perpendicular al plano π.

Modelo 4

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se considera la función $f:(-2\pi\,,2\pi)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f\left(x\right)=\frac{\cos x}{2+\cos x}$$

a) [1,5] Calcula sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) [1] Halla sus máximos y mínimos relativos (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

EJERCICIO 2

Sea f la función definida por

$$f\left(x\right)=\frac{x^4}{x^2-1}\qquad\quad(x\neq -1,1)$$

a) Halla todas las funciones primitivas de f .

b) Calcula la primitiva que pasa por $(2,0)$

EJERCICIO 3

La matriz siguiente tiene determinante igual a 5:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$

a) [1,75] Calcula, indicando las propiedades que utilices, los determinantes de las matrices siguientes:

3A $\qquad\qquad \begin{pmatrix} 2a & d+3a & g\\ 2b & e+3b & h\\ 2c & f+3c & i\end{pmatrix}$

b) [0,75] Si B es otra matriz cuadrada de orden 3 y tiene determinante 4, calcula, indicando también las propiedades que utilices, el determinante de la matriz BA^{-1}.

EJERCICIO 4

Sea r la recta que pasa por el punto $P\,(2\,,-2\,,-1)$ con vector director $\vec{v}=(k\,,3+k\,,-2k)$ y sea π el plano de ecuación $-x+2y+2z-1=0$.

a) [0,5] Calcula el valor de k para que r sea paralela a π.

b) [0,5] Calcula el valor de k para que r sea perpendicular a π .

c) [1,5] Para $k=-1$, calcula los puntos de r que distan 3 unidades de π .

Modelo 4

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se sabe que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$$

tiene un punto de inflexión para $x = 1$ y que la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en ese punto es $y = 6x + 6$. Calcula a, b.

EJERCICIO 2

Ejercicio 2.- Considera las funciones $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \cos x \quad , \quad g(x) = \operatorname{sen} x$$

a) [1] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

b) [1,5] Calcula el área del recinto delimitado por sus gráficas en el intervalo [-3π/4 , π/4]

EJERCICIO 3

Dadas

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) [1,5] Encuentra los valores de a para los que el sistema dado por $AX = 2X$ tiene infinitas soluciones.

b) [1] Para $a = 0$, si es posible, resuelve $AX = 2X$.

EJERCICIO 4

Consideremos el punto y la recta

$$P(-5, 3, 1) \quad , \quad r : \frac{x}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

a) [1] Calcula la ecuación general del plano que pasa por P y contiene a r.

b) [1,5] Calcula la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

Modelo 5

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Según un determinado modelo, la concentración (mg/ml) en sangre de cierto medicamento viene dada por la función

$$C\left(t\right) = t\,\mathrm{e}^{-t/2}$$

siendo t el tiempo en horas transcurridas desde que se le administra el medicamento al enfermo.

a) [2] Determina, si existe, el valor máximo absoluto de la función y en qué momento se alcanza.

b) [0,5] Sabiendo que la máxima concentración sin peligro para el paciente es 1 mg/ml, señala si en algún momento del tratamiento hay riesgo para el paciente.

EJERCICIO 2

Dado un número real $a > 0$, se la recta $y = 2ax$ y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f\left(x\right) = x^2 - ax$

Determina a sabiendo que el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta anterior es 36.

EJERCICIO 3

Dada

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtén la matriz X con $AX = \left(A^{-1}A^t + \mathrm{I}\right)^2$.

EJERCICIO 4

Considera la recta y el plano

$$r : \begin{cases} -y + z + 5 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \quad , \quad \pi : 2x + y - mz = 1$$

a) [1,25] Calcula m sabiendo que la recta y el plano son paralelos.

b) [1,25] Para $m = -1$, calcula la distancia entre ambos.

Modelo 5

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Dada $f:(1\,,\mathrm{e})\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f\,(x)=\frac{1}{x}+\ln x$$

determina la recta tangente a la gráfica de f que tiene pendiente máxima.

EJERCICIO 2

Sea $f:\left[0\,,\dfrac{\pi}{6}\right]\to\mathbb{R}$ una función continua y sea F la primitiva de ella que cumple

$$F\,(0)=\frac{\pi}{3}\quad,\quad F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\pi$$

Calcula:

a) [1] $\displaystyle\int_0^{\pi/6}(3f\,(x)-\cos x)\,\mathrm{d}x$

b) [1,5] $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\mathrm{sen}\,(F\,(x))\,f\,(x)\,\mathrm{d}x$

EJERCICIO 3

Consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & \lambda y & + & z & = & 4\\ -\lambda x & + & y & + & z & = & 1\\ x & + & y & + & z & = & \lambda+3 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discute el sistema según los valores de λ.

b) [1] Resuelve el sistema, si es posible, para λ = 1.

EJERCICIO 4

Halla cada uno de los puntos de la recta

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-y=0\\ y-z=0 \end{array}\right.$$

de manera que junto con los puntos $A\,(1\,,1\,,0)$, $B\,(1\,,0\,,1)$ y $C\,(0\,,1\,,1)$ formen un tetraedro de volumen $\dfrac{5}{6}\,u^3$.

Modelo 6

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Dada la función $f:(0,2\pi)\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$$

calcula sus máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la gráfica de f (abscisas en los que se obtienen y valores

que se alcanzan).

EJERCICIO 2

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+6x-8 & \text{si} \quad x\le 4\\ x^2-6x+8 & \text{si} \quad x>4\end{cases}$$

a) [1,5] Calcula los puntos de corte entre la gráfica de f y la recta y = $2x-4$. Esboza el recinto que delimitan la gráfica de f y la recta.

b) [1] Calcula el área del recinto anterior.

EJERCICIO 3

Dadas

$$A=\begin{pmatrix}1 & m & 1\\ m-1 & m & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}0\\1\\k\end{pmatrix} \quad , \quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

a) [1,25] Estudia el rango de A según los valores de m.

b) [1,25] Sabiendo que para $m=1$ el sistema dado por $AX=B$ tiene solución, encuentra k y resuélvelo.

EJERCICIO 4

Considera el plano y la recta

$$\pi:2x+y-z+3=0 \quad , \quad r:\frac{x-4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$$

a) [1,25] Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r.

b) [1,25] Calcula la distancia entre la recta y el plano .

Modelo 6

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+1} \quad (cx+1 \neq 0)$$

Determina a, b y c sabiendo que la recta $x=-1$ es una asíntota vertical a la gráfica de f y que $y = 2x+4$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

EJERCICIO 2

Para $a>0$ se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = -4x^2 + a$$

Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=0$. Calcula a sabiendo que el área del recinto es 18.

EJERCICIO 3

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{aligned} mx + (m+1)z &= m \\ my + z &= m \\ y + mz &= m \end{aligned} \right.$$

a) [1,75] Discute el sistema según los valores de m.

b) [0,75] Resuélvelo, si es posible, para $m=1$.

EJERCICIO 4

Se consideran los puntos y la recta

$$A(0,-1,3) \ , \ B(2,3,-1) \ , \ r : \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

a) [1,25] Halla un punto C de r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A.

b) [1,25] Calcula los puntos de r que equidistan de los puntos A y B.