Instrucciones

1. Duración: 1 hora y 30 minutos.
2. Tienes que elegir entre realizar unicamente los cuatro ejercicios de la Opción A o realizar unicamente los cuatro ejercicios de la Opción B.
3. La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
4. Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
5. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Tiempo

90 minutos

Criterios de Evaluación

Los criterios esenciales de valoración serán el planteamiento razonado y la ejecución técnica del mismo. La mera descripción del planteamiento sin que se lleve a cabo de forma efectiva no puede ser suficiente para obtener una valoración positiva del mismo.

En los ejercicios en los que se pida una deducción razonada, la mera aplicación de un fórmula no será suficiente.

No se prohibirá el uso de calculadoras, aunque durante el examen no se permitirá el préstamo de ellas entre estudiante. En cualquier caso, los procesos que conducen al resultado deben estar razonados.

Los errores cometidos en un apartado no se tendrán en cuenta en la calificación de apartados posteriores que sean afectados.

Los errores no conceptuales en las operaciones se penalizarán con un máximo del 10% de la nota total del ejercicio.

La presentación clara y ordenada se valorará positivamente.

Modelo 1- junio

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Halla los coeficientes a, b y c sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica pasa por el punto $(1\,,1)$.

EJERCICIO 2

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 6x - x^2 \quad , \quad g(x) = \left|x^2 - 2x\right|$$

a) [1,25] Esboza el recinto limitado por sus gráficas y calcula los puntos de corte entre ellas.

b) [1,25] Calcula el área de dicho recinto.

EJERCICIO 3

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 2y + \ (m+3)\,z & = & 3 \\ x + \ y + \qquad\qquad z & = & 3m \\ 2x + 4y + 3\,(m+1)\,z & = & 8 \end{array}\right\}$$

a) [1,75] Discútelo según los valores de m.

b) [0,75] Resuélvelo para $m = -2$.

EJERCICIO 4

Considera los puntos y la recta dados:

$$P = (1\,,0\,,-1) \quad , \quad Q = (2\,,1\,,1) \quad , \quad r : x - 5 = y = \frac{z+2}{-2}$$

a) [1,75] Determina el punto simétrico de P respecto de r.

b) [0,75] Calcula el punto de r que equidista de P y Q.

Modelo 1- junio

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Determina $k \neq 0$ sabiendo que es derivable la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

EJERCICIO 2

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 3 - x^2 \quad , \quad g(x) = -\frac{x^2}{4}$$

a) [1] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de g. Determina el punto de tangencia con la gráfica de g.

b) [0,75] Esboza el recinto limitado por la recta $y = 4 - 2x$ junto con las gráficas de f y de g. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

c) [0,75] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

EJERCICIO 3

a) [1,5] Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes condiciones:

- usando únicamente monedas de 50 céntimos, de 1 euro y de 2 euros;
- se tienen que usar exactamente 30 monedas;
- tiene que haber tantas monedas de 1 euro como de 50 céntimos y de 2 euros juntas.

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede realizar el pago?

b) [1] Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no realizar el pago bajo esas misma condiciones.

EJERCICIO 4

Consideremos el punto y el plano

$$P = (2\,, -1\,, 3) \quad , \quad \pi : 3x + 2y + z = 5$$

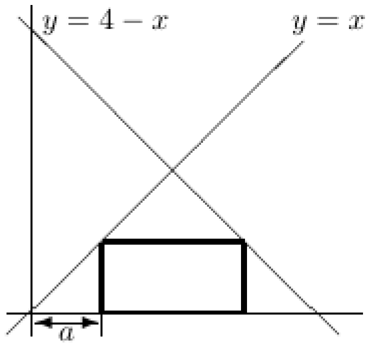
a) [1,75] Calcula el punto simétrico de P respecto de π.

b) [0,75] Calcula la distancia de P a π.

Modelo 2

OPCIÓN A

EJERCICIO 1



Se desea construir un rectángulo, como el de la figura, de área máxima. La base está situada sobre el eje OX, un vértice está en la recta $y = x$ y el otro, en la recta $y = 4 - x$.

Se pide:

a) [0,25] Halla la altura del rectángulo en función de a (ver la figura).

b) [1] Halla la base del rectángulo en función de a.

c) [1,25] ¿Para qué valor de a es máximo el área del rectángulo?

EJERCICIO 2

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = e^{2-x}$$

a) [0,75] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

b) [0,5] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta $x + y = 3$.

c) [1,25] Calcula el área del recinto indicado.

EJERCICIO 3

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) [1,25] Discute el rango de A según los valores del parámetro λ.

b) [1,25] Para $\lambda = -2$, estudia y resuelve el sistema dado por $AX = B$

EJERCICIO 4

Sea π el plano de ecuación $x + 2y + z = 6$.

a) [1] Determina la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.

b) [0,5] Halla el punto simétrico del origen de coordenadas con respecto a π.

c) [1] Calcula el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos de corte de π con los ejes de coordenadas.

Modelo 2

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se sabe que es continua la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} -x\,\mathrm{e}^{x-1} & \text{si} \quad x<0 \\ x\,\mathrm{e}^{x-1} & \text{si} \quad 0\leq x\leq 1 \\ x\,\mathrm{e}^{1-x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) [1] Estudia la derivabilidad de f en $x=0$ y en $x=1$.

b) [1,5] Estudia la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de f .

EJERCICIO 2

Considera la función $f:\left(-\frac{\mathrm{e}}{2},+\infty\right)\rightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\ln(2x+\mathrm{e})$$

a) [0,75] Haz un esbozo de la gráfica de f calculando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

b) [1,75] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y los ejes de coordenadas.

EJERCICIO 3

Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad D=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica que $A^2X-BA+X=CD$.

EJERCICIO 4

Consideremos las rectas dadas por:

$$r: x-2=y-2=z \quad , \quad s:\begin{cases} x=4+t \\ y=4+t \\ z=mt \end{cases}$$

a) [1] Determina m para que sean paralelas.

b) [0,5] Halla, si existe, un valor de m para el que ambas rectas sean la misma.

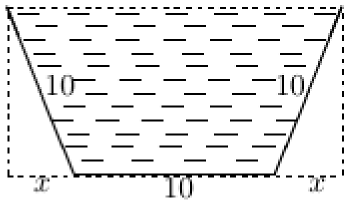
c) [1] Para $m=1$, calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

Modelo 3

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se desea construir una canaleta, para la recogida de agua, cuya sección es como la de la figura. La base y los costados deben medir 10 cm y se trata de darle la inclinación adecuada a los costados para obtener una sección de área máxima.



Se pide:

a) [0,25] Halla la altura de la canaleta en función de x (ver la figura).

b) [0,75] Halla el área de la sección de la canaleta en función de x.

c) [1,5] Encuentra el valor de x que hace máximo dicho área.

EJERCICIO 2

Determina la función $f : (1\,,+\infty) \;\to\; \mathbb{R}$ sabiendo que

$$f''(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ es $y = x + 2$.

EJERCICIO 3

Considera

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) [1] Calcula A^{2018}.

b) [1,5] Determina, si existe, la matriz X que verifica $A\,(X + 2\mathrm{I}) = B\,C$.

EJERCICIO 4

Considera las rectas dadas por

$$r : \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

a) [1] Estudia su posición relativa.

b) [1,5] Determina la ecuación de la recta secante y perpendicular común.

Modelo 3

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Considera la función f definida por

$$f(x)=\frac{e^x}{x-1} \quad , \quad x\neq 1$$

a) [0,75] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

b) [1] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus máximos y mínimos relativos (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

c) [0,75] Esboza la gráfica de f indicando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

EJERCICIO 2

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

a) [1,75] Calculemos $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

b) [1,25] Encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0\,,1)$.

EJERCICIO 3

Dada

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+\ \ y+mz &=& 1\\ x+my+\ \ z &=& 1\\ x+\ 2y+\ 4z &=& m\end{array}\right.$$

a) [1,75] Discute el sistema en función del parámetro.

b) [0,75] Si es posible, resuelve el sistema para $m=1$.

EJERCICIO 4

Consideremos los puntos y la recta dados por:

$$A(2\,,-1\,,-2) \quad , \quad B(-1\,,-1\,,2) \quad , \quad r: x-1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

a) [1] Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en 3 segmentos de la misma longitud.

b) [1,5] Determina un punto *C* de r de forma que el triángulo *ABC* sea rectángulo en *C* .

Modelo 4 - septiembre

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se sabe que es continua la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Determina a, b y c sabiendo que f es continua, alcanza un máximo relativo en $x=-1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-2$ tiene pendiente 2.

EJERCICIO 2

Considera la función f definida por

$$f(x)=ax\ln x-bx \qquad (x>0)$$

Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x=1$ y que

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=8\ln 2-9$$

EJERCICIO 3

Consideremos las tres matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determina, si existen, los valores de a, b y c para los que las matrices A y B conmutan.

b) [1] Calcula A^2, A^3, A^{2017} y A^{2018}.

c) [0,75] Calcula, si existe, la matriz inversa de A.

EJERCICIO 4

Dadas las rectas

$$r:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3} \quad , \quad s:\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ y-2z=-1 \end{cases}$$

a) [1] Estudia su posición relativa.

b) [1,5] Calcula la distancia entre ellas.

Modelo 4 - septiembre

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Considera la función f definida por

$$f(x) = a \ln x + bx^2 + x \quad (x > 0)$$

a) [1,5] Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) [1] ¿Qué tipo de extremos tiene f en $x = 1$ y en $x = 2$?

EJERCICIO 2

De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$$

a) [0,75] Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = -2\,\mathrm{e}\,x$.

b) [0,5] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , la recta $y = -2\,\mathrm{e}\,x$ y el eje de ordenadas.

c) [1,25] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

EJERCICIO 3

Consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ & & y & - & z & = & m \\ x & + & my & + & z & = & m \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) [1] Resuélvelo para $m = 1$ y calcula para este valor de m, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

EJERCICIO 4

Sean

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \quad , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x + nz = -5 \\ y - \ \ z = -3 \end{array} \right.$$

a) [1,5] Halla los valores de m y n para los que r y s se cortan perpendicularmente.

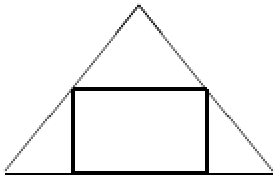
b) [1] Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a r y a s.

Modelo 5

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Considera un triángulo isósceles en el que el lado desigual mide 8 cm y la altura correspondiente mide 5 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en dicho triángulo (ver figura).



EJERCICIO 2

Siendo $a > 1$, considera el rectángulo de vértices $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(a,1)$ y $D(a,0)$. Este rectángulo está dividido en dos recintos por la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

a) [0,5] Haz un esbozo de la gráfica de f y del rectángulo descrito.

b) [2] Determina el valor de a para el que los dos recintos descritos tienen igual área.

EJERCICIO 3

Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) [1,5] Discute el sistema dado por $AX = mX$ según los valores del parámetro m.

b) [0,5] Da la solución del sistema en los casos en que es compatible determinado.

c) [0,5] Para $m = 3$ resuelve el sistema y halla, si es posible, una solución en la que $x + y + z = 3$.

EJERCICIO 4

Se sabe que $A(-1,2,6)$ y $B(1,4,-2)$ son simétricos respecto de un plano π.

a) [0,75] Calcula la distancia de A a π.

b) [1,75] Determina la ecuación general del plano π.

Modelo 5

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x)=x+x\,\mathrm{e}^{-x}$$

a) [1,25] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta $x-y+1=0$.

b) [1,25] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

EJERCICIO 2

Calcula

$$\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $t=\mathrm{e}^x$.

EJERCICIO 3

Consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & z & = & m \\ & & my & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & y & - & mz & = & 5 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discútelo según los valores del parámetro m.

b) [1] Para $m=1$ resuelve el sistema y encuentra, si es posible, una solución para la que sea $x=z$.

EJERCICIO 4

Dadas las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=2t \\ y=1 \\ z=0 \end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{r} x+y=2 \\ z=2 \end{array}\right.$$

a) [1,75] Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

b) [0,75] Calcula la distancia entre las rectas dadas.

Modelo 6

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Calcula

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x - \operatorname{sen} x}$$

EJERCICIO 2

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = -x^2 - x + 3 \quad , \quad g(x) = |x|$$

a) [1,25] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte entre ellas.

b) [1,25] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

EJERCICIO 3

Consideremos

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Sabiendo que el determinante de M es 2, calcula

a) [1,25] $\det\left(5M^4\right)$

b) [1,25] $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & x+6 & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z+3 & z \end{vmatrix}$

EJERCICIO 4

Sea *r* la recta que pasa por los puntos $A(3,6,7)$ y $B(7,8,3)$ y sea s la recta dada por

$$s : \begin{cases} x - 4y - z = -10 \\ 3x - 4y + z = -\ 2 \end{cases}$$

a) [1,25] Determina la posición relativa de r y *s*.

b) [1,25] Calcula la distancia entre *r* y *s*.

Modelo 6

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se desea construir una caja sin tapadera de base cuadrada. El precio del material es de 18 euros / m² para los laterales y de 24 euros /m² para la base. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir si disponemos de 50 euros.

EJERCICIO 2

Se sabe que es continua la función $f:[0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si} \quad 0\le x\le 8 \\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & \text{si} \quad x>8 \end{cases}$$

a) [0,5] Determina a.

b) [2] Para $a=8$ calcula

$$\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 3

Considera

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Halla, si existe, la inversa de A.

b) [1,25] Determina los valores de m tales que $A-m\mathrm{I}$ tiene inversa.

c) [0,5] Calcula el rango de $A-2\mathrm{I}$.

EJERCICIO 4

Consideremos el punto, la recta y el plano dados por:

$$A(0,1,0)\ ,\ r: x+1=\frac{y+2}{2}=z-1\ ,\ \pi: 2x+3y+4z=12$$

a) [1,25] Determina la ecuación del plano que pasa por el punto y es perpendicular a la recta.

b) [1,25] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.