2017

Modelos De Selectividad – Andalucía

Instrucciones

1. Duración: 1 hora y 30 minutos.
2. Tienes que elegir entre realizar unicamente los cuatro ejercicios de la Opción A o realizar unicamente los cuatro ejercicios de la Opción B.
3. La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
4. Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
5. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Tiempo

90 minutos

Criterios de Evaluación

Los criterios esenciales de valoración serán el planteamiento razonado y la ejecución técnica del mismo. La mera descripción del planteamiento sin que se lleve a cabo de forma efectiva no puede ser suficiente para obtener una valoración positiva del mismo.

En los ejercicios en los que se pida una deducción razonada, la mera aplicación de un fórmula no será suficiente.

No se prohibirá el uso de calculadoras, aunque durante el examen no se permitirá el préstamo de ellas entre estudiante. En cualquier caso, los procesos que conducen al resultado deben estar razonados.

Los errores cometidos en un apartado no se tendrán en cuenta en la calificación de apartados posteriores que sean afectados.

Los errores no conceptuales en las operaciones se penalizarán con un máximo del 10% de la nota total del ejercicio.

La presentación clara y ordenada se valorará positivamente.

Modelo 1

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Considera la función f definida por

$$f(x)=\frac{-3x^2+2}{x-1} \quad , \quad x\neq 1$$

a) [1,5] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f .

b) [1] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

EJERCICIO 2

Sea f la función definida por

$$f(x)=(x+2)\ln(x) \quad , \quad (x>0)$$

a) [1,75] Calcula

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

b) [0,75] Encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1\,,0)$.

EJERCICIO 3

Considera

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad M=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Calcula BM.

b) [1] Razona si el sistema dado por $AX=B$ tiene solución o no y, en caso afirmativo, cuántas soluciones tiene.

c) [0,75] Resuelve $AX=B$.

EJERCICIO 4

Considera las rectas dadas por

$$r:\begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases} \quad , \quad s:\begin{cases} x=1-t \\ y=\quad t \\ z=2 \end{cases}$$

a) [1,75] Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas.

b) [0,75] Halla la distancia entre r y s.

Modelo 1

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Una cuerda de un metro de longitud se divide en dos trozos con los que se construyen un cuadrado y una circunferencia respectivamente.

Determina, si es posible, las longitudes de los trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

EJERCICIO 2

Calcula

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $t = 1 + x^3$.

¿Cuál es la primitiva cuya gráfica pasa por $(2\,,0)$.

EJERCICIO 3

Se sabe que para un cierto valor de k es compatible indeterminado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x + ky & = & 1 \\ 2x - \;\; y + kz & = & 1 \\ x - 3y + 2z & = & 1 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Determina el valor de k .

b) [1] Resuelve el sistema para $k = 1$.

EJERCICIO 4

Consideremos los puntos

$$A = (1\,,3\,,-1) \quad , \quad B = (3\,,-1\,,-1) \quad , \quad C = (5\,,1\,,5)$$

a) [1,75] Determina la ecuación del plano respecto del cual B es el simétrico de A.

b) [0,75] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

Modelo 2

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Calcula la función polinómica, de grado 3, de la que se sabe que tiene un extremo relativo en el punto $(0\,,2)$ y que la tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es la recta $x + y = 3$.

EJERCICIO 2

Calcula

$$\int_0^3 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $\sqrt[3]{x} = t$.

EJERCICIO 3

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$$

a) [1,5] Discute el sistema según los valores de m.

b) [1] Para $m = 2$, si es posible, resuelve el sistema dado.

EJERCICIO 4

Sea π el plano determinado por los puntos

$$A\,(1\,,0\,,0) \quad , \quad B\,(0\,,1\,,0) \quad , \quad C\,(0\,,0\,,\lambda)$$

siendo λ un número real y r la recta dada por

$$r : \begin{cases} y - \quad z = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

a) [1,25] Halla la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

b) [1,25] Estudia la posición relativa de r y π según los valores de λ.

Modelo 2

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Considera la función f definida por

$$f(x) = -x + \frac{4}{x^2} \quad , \quad x \neq 0$$

a) [1] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

b) [1] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) [0,5] Esboza la gráfica de f .

EJERCICIO 2

Calcula

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 3

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [1] Determina los valores de m para los que la matriz A no tiene inversa.

b) [1,5] Para $m = 1$, calcula, si existe, la matriz X que verifica la igualdad $A^{-1}XA + \mathrm{I} = B$.

EJERCICIO 4

Consideremos el punto, el vector y el plano dados por:

$$P(-1,0,1) \quad , \quad \vec{u} = (1,2,1) \quad , \quad \pi : y = 0$$

a) [1] Halla la ecuación de la recta que pasa por P , está contenida en π y cuyo vector director es perpendicular a $\vec{u}$.

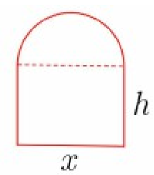
b) [1,5] Determina la ecuación del plano que pasa por P, es perpendicular a π y del que $\vec{u}$ es un vector director.

Modelo 3 Junio

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta ha de tener dieciséis metros cuadrados.



Si es posible, determina la base x para que el perímetro sea mínimo.

EJERCICIO 2

Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

a) [0,75] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

b) [0,75] Expresa el área como una integral.

c) [1] Calcula el área.

EJERCICIO 3

Considera

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) [1,5] Determina los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda \mathrm{I}$ no tiene inversa.

b) [1] Resuelve $AX = -3X$. Determina, si existe, alguna solución con $x = 1$.

EJERCICIO 4

Considera el punto y la recta dados por

$$P\,(1\,,-1\,,0) \quad , \quad r : \begin{cases} x = \ \ 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = \qquad\ t \end{cases}$$

a) [1,25] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.

b) [1,25] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Modelo 3 Junio

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad , \quad x \neq 1$$

a) [1] Estudia y determina las asíntotas de su gráfica.

b) [1,5] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Obtén los extremos relativos de la función (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

EJERCICIO 2

Calcula

$$\int_1^{16} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$$

Sugerencia: $t = \sqrt[4]{x}$.

EJERCICIO 3

Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

a) [1,5] Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razone la respuesta.

b) [1] Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices, ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

EJERCICIO 4

Consideremos los vectores

$$\vec{u} = (1\,,0\,,1) \quad , \quad \vec{v} = (0\,,2\,,1) \quad , \quad \vec{w} = (m\,,1\,,n)$$

a) [1,25] Halla m y n sabiendo que los tres son dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) [1,25] Para$n = 1$, halla los valores de m con los que el tetraedro determinado por los tres vectores tiene de volumen 10 unidades cúbicas.

Modelo 4

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se sabe que es continua la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 2a\cos(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ ax^2 + b & \text{si} \quad x > \pi \end{cases}$$

a) [1,5] Halla los valores a, b.

b) [1] Estudia la derivabilidad de f.

EJERCICIO 2

Considera la función dada por

$$f(x) = \sqrt{3+|x|} \quad , \quad x \in [-3\,,3]$$

a) [0,5] Expresa la función f definida a trozos.

b) [2] Halla

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 3

Dada

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) [1,25] Calcula la matriz inversa de $A + B$.

b) [0,75] Calcula el determinante de $2A^{-1}(A+B)^t$.

EJERCICIO 4

Dadas los vectores

$$\vec{u} = (2\,,3\,,4) \quad , \quad \vec{v} = (-1\,,-1\,,-1) \quad , \quad \vec{w} = (-1\,,\lambda\,,-5)$$

a) [1,25] Halla los valores de λ para los que el paralelepípedo determinado por ellos tiene volumen 6 u^3.

b) [1,25] Halla el valor de λ para el que son tres vectores linealmente dependientes.

Modelo 4

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Calcula

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$$

EJERCICIO 2

De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x\arctan(x)$$

determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0\,,\pi)$

EJERCICIO 3

Consideremos las tres matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}\quad,\quad C=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica que $ABX-2C=CX$.

EJERCICIO 4

Sea r la recta que pasa por $A(4\,,3\,,6)$ y $B(-2\,,0\,,0)$ y sea s la recta dada por

$$?s:\begin{cases}x=2+\lambda\\y=\lambda\\z=1-2\lambda\end{cases}$$

a) [1,25] Determina la posición relativa de r y s.

b) [1,25] Calcula, si existen, los puntos Cde s tales que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ son ortogonales.

Modelo 5

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se necesita construir un depósito cilíndrico, con tapas inferior y superior, con capacidad de 20 π m³ . El material para las tapas cuesta 10 euros cada m² y el material para el resto del cilindro 8 euros cada m².

Calcula, si existe, el radio de las tapas y la altura del cilindro que hace que el coste total sea mínimo.

EJERCICIO 2

Sea

$$I = \int_0^8 \frac{1}{2+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

a) [1,25] Expresa I aplicando el cambio de variable $t = 2 + \sqrt{x+1}$.

b) [1,25] Calcula el valor de I.

EJERCICIO 3

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [0,5] Comprueba que $AA^t - 2A = \mathrm{I}$.

b) [0,75 puntos] Calcula A^{-1}.

c) [1,25] Determina, si existe, la matriz X que verifica $XA + \mathrm{I} = 3A$.

EJERCICIO 4

Considera los puntos

$$A\,(-1\,,-2\,,-1) \text{ y } B\,(1\,,0\,,1).$$

a) [1,25] Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

b) [1,25] Calcula la distancia de $P\,(-1\,,0\,,1)$ a la recta que pasa por los puntos A y B.

Modelo 5

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Calcula a, b, c y d sabiendo que f tiene un extremo relativo en $(0\,,1)$ y su gráfica un punto de inflexión en $(1, -1)$.

EJERCICIO 2

Considera la región limitada por la gráfica de la función dada por

$$f\,(x) = \sqrt{2x-2} \quad , \quad (x \geq 1)$$

con la recta $y = x - 5$ y el eje de abscisas.

a) [0,75] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte entre la gráfica de f y las rectas.

b) [0,75] Expresa mediante integrales el área del recinto anterior.

c) [1] Calcula el área.

EJERCICIO 3

Sea A una matriz 3 × 3 tal que $\det(2A) = 8$.

a) [0,5] ¿Cuánto vale $\det(A)$?

b) [0,75] Siendo B la matriz que se obtiene de A multiplicando por 3 la primera fila y por -1 la tercera, ¿cuánto vale $\det(B)$?

c) [1,25] Determina los valores de x para los que la siguiente matriz A verifica que $\det(2A) = 8$:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4

Dados los puntos

$$A\,(1\,,1\,,1)\ ,\ B\,(0\,,-2\,,2)\ ,\ C\,(-1\,,0\,,2)\ ,\ D\,(2\,,-1\,,-2)$$

a) [1] Calcula el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y D.

b) [1,5] Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A , B y C .

Modelo 6 Septiembre

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm2 , el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno.

Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.

EJERCICIO 2

Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f''(x) = x\,\mathrm{e}^x$$

sabiendo que su gráfica pasa por el origen de coordenadas y que tiene un extremo relativo en $x = 1$.

EJERCICIO 3

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 2m+1 \\ m-1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) [1,25] Discute el sistema según los valores de m.

b) [1,25] Para $m = 2$, calcula, si es posible, una solución del sistema anterior para la que $z = 17$.

EJERCICIO 4

De un paralelogramo de vértices consecutivos $ABCD$ conocemos

$$A(1,1,1) \ , \ B(2,2,2) \ , \ C(1,3,3)$$

a) [1] Calcula el área del paralelogramo.

b) [1] Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.

c) [0,5] Calcula las coordenadas del vértice D .

Modelo 6 Septiembre

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

a) [2] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f. Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [0,5] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

EJERCICIO 2

Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje de abscisas, la recta $y = x$, la gráfica $y = \dfrac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.

a) [0,5] Haz un esbozo del recinto descrito.

b) [1,5] Calcula el área del recinto.

c) [0,5] Si consideras la gráfica $y = \dfrac{1}{x}$ en lugar de $y = \dfrac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial? ¿por qué?

EJERCICIO 3

Considera

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$$

a) [1,5] Discute el rango de A según los valores de k.

b) [1] Para $k = 1$, calcula el determinante de $2\left(A^t A^{-1}\right)^{2017}$.

EJERCICIO 4

Considera el punto P y la recta r dados por

$$P(0,1,1) \quad , \quad r : \left\{ \begin{aligned} x - 2y &= -5 \\ z &= \ \ 2 \end{aligned} \right.$$

a) [1,25] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .

b) [1,25] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.