Instrucciones

1. Duración: 1 hora y 30 minutos.
2. Tienes que elegir entre realizar unicamente los cuatro ejercicios de la Opción A o realizar unicamente los cuatro ejercicios de la Opción B.
3. La puntuación de cada pregunta est´ indicada en la misma.
4. Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
5. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Tiempo

90 minutos

Criterios de Evaluación

Los criterios esenciales de valoración serán el planteamiento razonado y la ejecución técnica del mismo. La mera descripción del planteamiento sin que se lleve a cabo de forma efectiva no puede ser suficiente para obtener una valoración positiva del mismo.

En los ejercicios en los que se pida una deducción razonada, la mera aplicación de un fórmula no será suficiente.

No se prohibirá el uso de calculadoras, aunque durante el examen no se permitirá el préstamo de ellas entre estudiante. En cualquier caso, los procesos que conducen al resultado deben estar razonados.

Los errores cometidos en un apartado no se tendrán en cuenta en la calificación de apartados posteriores que sean afectados.

Los errores no conceptuales en las operaciones se penalizarán con un máximo del 10% de la nota total del ejercicio.

La presentación clara y ordenada se valorará positivamente.

Modelo Junio

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el mínimo posible.

EJERCICIO 2

Calcula

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 3

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & + & y & - & z & = & -1 \\ \lambda x & & & + & \lambda z & = & \lambda \\ x & + & y & - & \lambda z & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discute el sistema según los valores de λ.

b) [1] Resuélvelo para $\lambda = 0$.

EJERCICIO 4

Considera los puntos

$$A\,(0\,,1\,,1) \quad , \quad B\,(2\,,1\,,3) \quad , \quad C\,(-1\,,2\,,0) \quad , \quad D\,(2\,,1\,,m)$$

a) [0,75] Halla m para que los cuatro estén en un mismo plano..

b) [0,75] Halla la ecuación del plano respecto del cual A y B son simétricos.

a) [1] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

Modelo Junio

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sabiendo que el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2}$$

es finito e igual a 1, calcula los valores de a y b.

EJERCICIO 2

Determina la función $f : (0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = \ln x$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P\,(1\,,2)$.

EJERCICIO 3

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$$

a) [1,5] Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

b) [1] Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

EJERCICIO 4

Consideremos

$$P\,(2\,,-1\,,5) \quad , \quad r : \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1} \quad , \quad \pi : 2x + y - z + 8 = 0$$

a) [1,5] Calcula las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto del plano π.

b) [1] Halla la ecuación de la recta r' simétrica de r respecto del plano π.

Modelo Junio 2

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80 euros/metro y la de los otros lados 10 euros/metro, halla las dimensiones del campo de área máxima que puede vallarse con 28 800 euros.

EJERCICIO 2

Calcula

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{x+2}}$$

Sugerencia: $\sqrt{x+2} = t$.

EJERCICIO 3

Sabiendo que es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Halla X en la igualdad:

$$AXA^{-1} + B = CA^{-1}$$

EJERCICIO 4

Dados

$$P = (-3\,,1\,,6) \quad , \quad r : \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

a) [1,25] Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r.

b) [1,25] Calcula las coordenadas del punto simétrico de P respecto de la recta r.

Modelo Junio 2

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Calcula a y $b > 0$ sabiendo que es derivable la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x + 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ a^2 \ln(x+a) + \dfrac{b}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 2

Sea g la función definida por

$$g(x) = \ln x \quad ,, \quad x > 0$$

Calcula el valor de $a > 1$ para el que el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abscisas y la recta $x = a$ es 1.

EJERCICIO 3

Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0 \\ \lambda x + 2y + 2z = 0 \\ \lambda x + 2y + z = 0 \end{array}\right\}$$

a) [1,75] Discute el sistema según los valores del parámetro λ.

b) [0,75] Determina, si existen, los valores λ para los que el sistema tiene alguna solución con $z \neq 0$.

EJERCICIO 4

Los puntos $A(0,1,1)$ y $B(2,1,3)$ son vértices de un triángulo. Y el tercer vértice es un punto de la recta

$$r : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) [1] Calcula las coordenadas de los posibles puntos C de r para que el triángulo ABC tenga un ángulo recto en el vértice A.

b) [1,5] Calcula las coordenadas de los posibles puntos D de r para que el triángulo ABD tenga un área igual a $\sqrt{2}$.

Modelo 3 Junio 3

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Calcula a y b sabiendo que es continua la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \cos x - a\,\mathrm{e}^x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ b & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 2

Sea f la función definida para $x > 0$ por:

$$f(x) = |\ln x|$$

a) [0,5] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 1$.

b) [0,5] Calcula los puntos de corte de la grfica de f con la recta $y = 1$.

c) [1,5] Calcula el área del recinto citado.

EJERCICIO 3

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

a) [1,75] Halla el valor, o valores, de m para los que la matriz A tiene rango 2.

b) [0,75] Para $m = 1$, determina A^{2015} .

EJERCICIO 4

Sean los planos

$$\pi : x + 3y + 2z5 = 0 \quad , \quad \pi' : 2x + y + 3z + 3 = 0$$

a) [1,5] Determina el angulo que forman .

b) [1] Calcula el volumen del tetraedro limitado por π y los planos coordenados.

Modelo 3 Junio 3

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \left(x^2 + 3x + 1\right) \mathrm{e}^{-x}$$

a) [1] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f .

b) [1] Halla los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente es horizontal.

c) [0,5] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 2

Calcula

$$\int \mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$

EJERCICIO 3

Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & & & + & \alpha z & = & 2 \\ 2x & + & \alpha y & & & = & \alpha + 4 \\ 2x & + & y & + & (\alpha + 4) z & = & 7 \end{array}\right\}$$

a) [1,75] Discútelo según los valores de α.

b) [0,75] Resuélvelo para $\alpha = 2$.

EJERCICIO 4

Consideremos el punto y la recta definidos por

$$P(1, 6, -2) \quad , \quad r : \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2}$$

a) [1] Halla la ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r.

b) [1,5] Calcula la distancia entre el punto P y la recta r.

Modelo 4 Septiembre

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Halla los valores a, b y c sabiendo que la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x + c}$$

tiene una asíntota vertical en $x = 1$, una asíntota oblicua de pendiente 2 y un extremo local de abscisa $x = 3$

EJERCICIO 2

Calcula:

$$\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$

EJERCICIO 3

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [1,5] Determina la matriz X para la que $A^t X B^{-1} = C$.

b) [1] Calcula el determinante de $B^{-1}\left(C^t C\right) B$.

EJERCICIO 4

Dadas las rectas:

$$r : \begin{cases} x = & 1 \\ y = & 1 \\ z = & -2 + \lambda \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x - y = & 1 \\ z = & -1 \end{cases}$$

a) [1,75] Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas dadas.

b) [0,75] Calcula la distancia entre r y s.

Modelo 4 Septiembre

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un rio. El terreno debe tener 180000 m^2 para producir suficiente pasto para su ganado.

¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita vallado?

EJERCICIO 2

De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=|x^2-4|$$

a) [0,75] Haz un esbozo de la gráfica de f.

b) [1,75] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=5$.

EJERCICIO 3

Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & (\alpha-1)\,z & = & \alpha-1 \\ x & - & \alpha y & - & 3z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2\alpha-2 \end{array}\right\}$$

a) [1] Resuelve el sistema para $\alpha=1$.

b) [1,5] Determina, si existe, el valor de α para el que $(x\,,y\,,z)=(1\,,-3\,,\alpha)$ es la única solución del sistema dado.

EJERCICIO 4

Considera el plano y la recta dados por

$$\pi: mx+5y+2z=0 \quad , \quad r:\frac{x+1}{3}=\frac{y}{n}=\frac{z-1}{2}$$

a) [1,25] Calcula m y n en el caso en el que la recta r es perpendicular al plano π.

b) [1,25] Calcula m y n en el caso en el que la recta r está contenida en el plano π.

Modelo 5

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1} \qquad (x \neq 1)$$

a) [1] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f .

b) [1,5] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de f .

EJERCICIO 2

Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{\ln x}{2x} \qquad (x > 0)$$

y F la primitiva de f tal que $F(1) = 2$.

a) [0,5] Calcula $F'(\mathrm{e})$.

b) [2] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = \mathrm{e}$.

EJERCICIO 3

Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & (3+\alpha)z & = & 4+\alpha \end{array}\right\}$$

a) [1,25] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene solución única.

b) [1,25] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos.

EJERCICIO 4

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r que contiene al punto $P(3, -5, 4)$ y corta perpendicularmente a la recta $s : \dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y-8}{-3} = \dfrac{z}{4}$.

Modelo 5

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Queremos fabricar una caja con base cuadrada, de tal manera que la altura de la caja más el perímetro de la base sumen 60 cm. Determina sus dimensiones para que contenga el mayor volumen posible.

EJERCICIO 2

Sean $f : [0\,,+\infty) \;\to\; \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \;\to\; \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f\,(x) = \sqrt{2x} \quad , \quad g\,(x) = \frac{1}{2}x^2$$

a) [0,75] Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. Haz un esbozo del recinto que limitan.

b) [1,75] Calcula el área de dicho recinto.

EJERCICIO 3

Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) [1] Halla el determinante de una matriz X que verifique la igualdad $X^2AX = B$.

b) [1,5] Determina, si existe, la matriz Y que verifica la igualdad $A^2YB^{-1} = A$.

EJERCICIO 4

Dada la recta siguientes:

$$r : \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = z$$

a) [1,5] Halla el punto de r que equidista del origen de coordenadas y del punto $P\,(4\,,-2\,,2)$.

b) [1] Determina el punto de la recta r más próximo al origen de coordenadas.

Septiembre 3

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Halla sus coeficientes sabiendo que f presenta un extremo local en el punto de abscisa $x = 0$, que $(1\,,0)$ es punto de inflexión de la gráfica de f y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3.

EJERCICIO 2

Calcula el valor de $a > 1$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = -x^2 + ax$ y la recta $y = x$ es $\dfrac{4}{3}$.

EJERCICIO 3

Considera el sistema dado por $AX = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene solución única.

b) [0,75] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema no tiene solución.

c) [1] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos.

EJERCICIO 4

Dados los puntos y la recta siguientes

$$B\,(1\,,2\,,-3) \ , \ C\,(9\,,-1\,,2) \ , \ D\,(5\,,0\,,-1) \ , \ r : \left\{ \begin{array}{r} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right.$$

a) [1,25] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son B, C y D.

b) [0,75] Halla un punto A en la recta r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A.

Septiembre 3

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=x^2-|x|$$

a) [0,5] Estudia la derivabilidad de f.

b) [1] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

c) [1] Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

EJERCICIO 2

Sea f definida por

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2(x-1)} \qquad (x\neq 0\,,\ x\neq 1)$$

y F la primitiva de f que pasa por el punto $P(2\,,\ln 2)$.

a) [0,5] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P.

b) [2] Determina la función F.

EJERCICIO 3

Consideremos las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

a) [1,75] Halla la matriz X que verifica $AXB=\mathrm{I}$.

b) [0,75] Calcula el determinante de la matriz $\left(A^2B^{-1}\right)^{2015}$.

EJERCICIO 4

Considera el punto y la recta dados por

$$P(1\,,0\,,-1) \quad , \quad r:\left\{\begin{array}{l}x+y=0\\z-1=0\end{array}\right.$$

a) [1,5] Halla la distancia del punto a la recta.

b) [1] Determina la ecuación general del plano que pasa por dicho punto y contiene a la recta.