Instrucciones

1. Duración: 1 hora y 30 minutos.
2. Tienes que elegir entre realizar unicamente los cuatro ejercicios de la Opción A o realizar unicamente los cuatro ejercicios de la Opción B.
3. La puntuación de cada pregunta est´ indicada en la misma.
4. Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
5. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Tiempo

90 minutos

Criterios de Evaluación

Los criterios esenciales de valoración serán el planteamiento razonado y la ejecución técnica del mismo. La mera descripción del planteamiento sin que se lleve a cabo de forma efectiva no puede ser suficiente para obtener una valoración positiva del mismo.

En los ejercicios en los que se pida una deducción razonada, la mera aplicación de un fórmula no será suficiente.

No se prohibirá el uso de calculadoras, aunque durante el examen no se permitirá el préstamo de ellas entre estudiante. En cualquier caso, los procesos que conducen al resultado deben estar razonados.

Los errores cometidos en un apartado no se tendrán en cuenta en la calificación de apartados posteriores que sean afectados.

Los errores no conceptuales en las operaciones se penalizarán con un máximo del 10% de la nota total del ejercicio.

La presentación clara y ordenada se valorará positivamente.

Modelo 1 (S)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea $f:(0\,,+\infty)\ \rightarrow\ \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x}}$$

a) [1,5] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan).

b) [1] Calcula el punto de inflexión de la gráfica de f.

EJERCICIO 2

Sea $f:\mathbb{R}\ \rightarrow\ \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=x|x-2|$$

a) [1] Estudia la derivabilidad de f en $x=2$.

b) [0,5] Esboza la gráfica de f.

c) [1] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas

EJERCICIO 3

Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) [1,25] Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A-I_2)^2=O$.

b) [1,25] Para $m=2$, halla la matriz X tal que $AX-2A^t=O$

EJERCICIO 4

a) [1,25] Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos $A(1\,,2\,,1)$ y $B(-1\,,0\,,3)$ en tres partes iguales.

b) [1,25] Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio

Modelo 1 (S)

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Determina una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada viene dada por

$$f'(x) = x^2 + x - 6$$

y que el valor que alcanza f en su punto máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto mínimo (relativo).

EJERCICIO 2

Sea $f : (-1\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \ln(x+1)$$

a) [1] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

b) [1,5] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta $x = 1$.

EJERCICIO 3

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & z & = & 4 \\ x & - & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & a+2 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

b) [1] Resuelve el sistema que se obtiene para $a = -2$.

EJERCICIO 4

Considera los vectores

$$\vec{u} = (1\,,1\,,m)\,,\ \vec{v} = (0\,,m\,,-1)\,,\ \vec{w} = (1\,,2m\,,0)$$

a) [1,25] Determina el valor de m para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

b) [1,25] Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Modelo 2 (J)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

EJERCICIO 2

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \quad , \quad g(x) = x + 3$$

a) [1,25] Esboza sus gráficas, calculando sus puntos de corte.

b) [1,25] Calcula el área de cada uno de los recintos limitados entre las gráficas de f y g.

EJERCICIO 3

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) [1] Determina la matriz $B = A^2 - 2A$.

b) [0,75] Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.

c) [0,75] Calcula B^{-1} para $\lambda = 1$.

EJERCICIO 4

Considera los planos de ecuaciones

$$x - y + z = 0 \quad , \quad x + y - z = 2$$

a) [1] Determina la recta que pasa por el punto $A(1\,,2\,,3)$ y no corta a ninguno de los planos dados.

b) [1,5] Determina los puntos que equidistan de $A(1\,,2\,,3)$ y $B(2\,,1\,,0)$ y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.

Modelo 2 (J)

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$$

Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

EJERCICIO 2

Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas

EJERCICIO 3

a) [1] Calcula la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) [1,5] Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -2 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right\}$$

EJERCICIO 4

a) [1,25] Considera los puntos $A(0\,,3\,,-1)$ y $B(0\,,1\,,5)$. Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC, donde $C(x\,,4\,,3)$, es rectángulo en C.

b) [1,25] Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0\,,1\,,5)$ y $(3\,,4\,,3)$ y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x - y + z & = & 0 \\ 2x + y & = & 3 \end{array} \right.$$

Modelo 3

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea $f:(0\,,+\infty)\ \rightarrow\ \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=x^2\ln(x)$$

a) [1,5] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [1] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\sqrt{e}$

EJERCICIO 2

Sean $f,g:\mathbb{R}\ \rightarrow\ \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x)=\mathrm{e}^{x-1}\quad,\quad g(x)=\mathrm{e}^{1-x}$$

a) [1,25] Esboza las gráficas de f y de g y determina su punto de corte.

b) [1,25] Calcula el área del recinto limitado por el eje OY y las gráficas de f y g.

EJERCICIO 3

Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determina los valores de α para los que la matriz A tiene inversa.

b) [1,75] Para $\alpha=1$, calcula A^{-1} y resuelve la ecuación matricial $AX=B$.

EJERCICIO 4

Considera las rectas

$$r\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y-k}{4}=\frac{z}{5}\quad,\quad s\equiv\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$$

a) [1,25] Halla k sabiendo que se cortan en un punto.

b) [1,25] Determina la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

Modelo 3

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es 2 y 3 euros por centímetro cuadrado, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 metro.

¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?

EJERCICIO 2

Sea $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x(x-3)^2$$

a) [1] Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) [0,5] Haz un esbozo de la gráfica de f.

c) [1] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

EJERCICIO 3

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & \lambda y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & \lambda z & = & \lambda - 1 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Determina el valor de λ para que el sistema sea incompatible .

b) [1] Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

EJERCICIO 4

Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $x + 2y + 3z - 1 = 0$ que corta perpendicularmente a la recta definida por

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{array}\right.$$

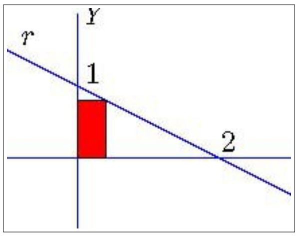
en el punto $(2\,,1\,,-1)$.

Modelo 4

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación $\frac{x}{2}+y=1$ (ver figura), determina el que tiene mayor área.



EJERCICIO 2

Sea

$$I=\int \frac{2}{2-\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$$

a) [1] Expresa I haciendo el cambio de variable $t=\mathrm{e}^{x}$.

b) [1,5] Calcula I .

EJERCICIO 3

Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & (a+1)y & + & 2z & = & y \\ x & - & 2y & + & (2-a)z & = & 2z \end{array}\right\}$$

EJERCICIO 4

Consideremos la recta y el plano definidos por

$$r\equiv\frac{x-1}{\alpha}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{2} \quad , \quad \pi\equiv 2x-y+\beta z=0$$

Determine α y β en cada uno de los siguientes casos:

a) [1] La recta r es perpendicular al plano π.

b) [1,5] La recta r está contenida en el plano π.

Modelo 4

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$$

a) [1,5] Determina los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [1] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

EJERCICIO 2

Sea $f : (-2\,,0) \to \mathbb{R}$ una función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x} & \text{si} \quad -2 < x \le -1 \\ \dfrac{x^2-\beta}{2} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

a) [1,5] Determina α y β sabiendo que f es derivable.

b) [1] Calcula

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 3

Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda x & + & y & + & (\lambda+1)z & = & \lambda+2 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ (1-\lambda)x & - & \lambda y & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

tiene más de una solución.

a) [1,5] Calcula, en dicho caso, el valor de la constante λ.

b) [1] Halla todas las soluciones del sistema

EJERCICIO 4

Calcula la distancia del punto $P(1\,,-3\,,7)$ a su punto simétrico respecto de la recta definida por

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x-y-z-2 & = & 0 \\ x+y-z+6 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Modelo 5

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (x-3)\,\mathrm{e}^{x}$$

a) [1] Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [1,5] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

EJERCICIO 2

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1+\alpha x & \text{si} \quad x<0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) [1] Determina el valor de α sabiendo que f es derivable.

b) [0,5] Haz un esbozo de la gráfica de f.

c) [1] Calcula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 3

a) [1,5] Calcula el valor de m para el que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$$

verifica la relación $2A^2 - A = I$ y determina A^{-1}para dicho valor de m.

b) [1] Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2 - M = I$, determina la expresión de M^{-1} en función de M y de I.

EJERCICIO 4

a) [1,5] Encuentra la ecuación de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a los planos

$$\pi_1 : x+y+z = 3\sqrt{3} \quad , \quad \pi_2 : -x+y+z = 2$$

b) [1] Halla la distancia de la recta r al plano π_1.

Modelo 5

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea f la función definida, para $x \neq 2$ y $x \neq -2$, por

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

a) [1] Determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) [0,5] Esboza la gráfica de f.

EJERCICIO 2

Calcula

a) [1,5] $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

b) [1] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$

EJERCICIO 3

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones para los valores de m que lo hacen compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & m \\ mx & + & y & = & m \\ mx & + & my & = & 0 \end{array}\right\}$$

EJERCICIO 4

Consideremos el punto y la recta siguientes

$$P(1\,,0\,,-2) \quad , \quad r:\left\{\begin{array}{lcl} 2x-y & = & 5 \\ 2x+y-4z & = & 7 \end{array}\right.$$

a) [1,5] Determina la recta perpendicular a r que pasa por P.

b) [1] Halla la distancia entre el punto P y su simétrico Q respecto de la recta r.

Modelo 6

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Determina la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que

$$f''(x) = x^2 - 1$$

y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = 1$.

EJERCICIO 2

Calcula $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = -x^2 + 2\beta^2$$

sea 72 (unidades de área).

EJERCICIO 3

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) [1,25] Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A - 2I$ es cero.

b) [1,25] Calcula la matriz inversa de $A - 2I$ para $\lambda = -2$.

EJERCICIO 4

Considera el plano $\pi \equiv 2x + 2y - z - 6 = 0$ y el punto $P(1\,,0\,,-1)$.

a) [1,25] Calcula la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π.

b) [1,25] Encuentra el punto simétrico de P respecto del plano π.

Modelo 6

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m^3. ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima?

EJERCICIO 2

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^2.$$

a) [0,75] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) [1,75] Dibuja el recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje OX. Calcula su área.

EJERCICIO 3

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & mz & = & 1 \\ & & my & - & z & = & -1 \\ x & + & 2my & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Clasifica el sistema según los valores de m.

b) [1] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 4

Consideremos el plano y la recta dados por

$$\pi : 2x + 2y - z - 6 = 0 \quad , \quad r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$$

a) [1,25] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas.

b) [1,25] Calcula, razonadamente, la distancia de la recta r al plano π.