TEMA 8

Espacio Euclídeo

Ejercicios para Selectividad
de
Espacio Euclídeo

Cursos
1996 – 2003

Enunciados

EJERCICIO 1 [S/96]

Considera los puntos $A = (2\,,-1\,,-2)$, $B = (-1\,,-1\,,2)$ y la recta r de ecuaciones

$$r:\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Encuentra un punto C sobre la recta de ecuaciones de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en C.

EJERCICIO 2 [S/96]

Determina el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano de ecuación $x+2y+3z=1$ y calcula el cuadrado de la distancia entre dichos puntos.

EJERCICIO 3 [S/96]

a) Encuentra el ángulo que forman las diagonales $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ del paralelogramo $ABCD$ en el que conocemos $A=(2\,,1\,,0)$, $B=(0\,,0\,,0)$ y $C=(0\,,-1\,,2)$.

b) ¿Es un cuadrado? Justifica la respuesta.

EJERCICIO 4 [S/96]

El ángulo entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ mide 120º y se sabe que el módulo de $\vec{u}$ es 5 y el de $\vec{v}$ es 3.

a) Determina el valor del número real a para el que los vectores $(\vec{u}-\vec{v})$ y $(a\vec{u}+\vec{v})$ son ortogonales.

b) ¿Cuánto vale el módulo de $\vec{u}-\vec{v}$?

EJERCICIO 5 [S/96]

a) Determina las ecuaciones de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano determinado por el punto $(1\,,1\,,1)$ y la recta de ecuaciones

$$r:\ \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ 2x+3z & = & 1 \end{array}\right.$$

b) El mismo problema pero para la recta de ecuaciones

$$s:\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

EJERCICIO 6 [S/97]

Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P=(1\,,0\,,2)$, es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+z=0$ y es paralelo a la recta:

$$r:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z-3$$

EJERCICIO 7 [S/97]

a) Halla el punto C que es la proyección ortogonal del punto $B = (2\,,1\,,1)$ sobre $\pi : 2x + y - 2z = -6$.

b) Halla el punto A del eje OX y tal que el área del triángulo ABC valga 6. ¿Cuántas soluciones existen?

EJERCICIO 8 [S/97]

Calcula el ángulo que forma el plano que contiene al punto $P = (2\,,0\,,1)$ y a la recta de ecuaciones

$$r : \frac{x-1}{2} = y + 3 = \frac{z-2}{3}$$

con la recta de ecuaciones

$$s : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

EJERCICIO 9 [S/97]

Calcula de manera razonada, un plano que sea paralelo al plano de ecuación $x + y + z = 1$ y determine con los ejes coordenados un triángulo cuya área sea $18\sqrt{3}$.

EJERCICIO 10 [S/97]

Considera el tetraedro formado por el origen de coordenadas y los tres puntos en los que el plano

$$\pi : 2x + 3y + 6z - 6 = 0$$

corta a los ejes coordenados.

a) Describe un procedimiento para calcular el volumen del tetraedro y calcula efectivamente su valor.

b) Calcula razonadamente las coordenadas del punto simétrico al origen de coordenadas respecto al plano π.

EJERCICIO 11 [S/97]

Considera los puntos $P\,(1\,,1\,,1)$ y $Q\,(-1\,,-1\,,2)$.

a) Halla la ecuación del lugar geométrico de los untos que se encuentran a igual distancia del punto P que del punto Q.

b) Halla la ecuación del plano que corta perpendicularmente y en su punto medio al segmento que une los puntos P y Q.

EJERCICIO 12 [S/97]

Considera el punto $P = (2\,,1\,,3)$ y la recta de ecuaciones

$$r : \begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

b) Determina dos puntos A y B de la recta r de forma que el triángulo PAB sea equilátero.

EJERCICIO 13 [S/97]

Considera el punto $P=(1\,,0\,,-1)$ y la recta de ecuaciones

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ z-1=0 \end{array}\right.$$

Halla la distancia de P a r.

EJERCICIO 14 [S/98]

Dados los puntos $A=(1\,,0\,,1)$, $B=(0\,,0\,,-1)$, se pide:

1) Encuentra, si existe, un punto P situado en el eje OY y tal que el triángulo ABP sea un triángulo rectángulo con ángulo recto en B.
2) Si $Q=(2\,,0\,,-2)$, prueba que el triángulo ABQ es rectángulo y calcula su área.

EJERCICIO 15 [S/98]

Calcula dos vectores $\vec{u}=(1\,,u_2\,,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1\,,v_2\,,0)$ de $\mathbb{R}^3$ que forman un ángulo de 45º y cuyo producto vectorial sea el vector $\vec{w}=(1\,,1\,,0)$.

EJERCICIO 16 [S/98]

Considera el tetraedro de vértices:

$$A=(1\,,0\,,0)\,,\ B=(0\,,1\,,0)\,,\ C=(0\,,0\,,1)\,,\ D=(0\,,0\,,0)$$

1) Halla la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a $A\,,B\,,C$.
2) Halla la mínima distancia entre la recta r y la que pasa por los puntos A y B.
3) Calcula el volumen del tetraedro.

EJERCICIO 17 [S/99]

Un objeto se mueve en el espacio siguiendo una línea recta cuya dirección viene dada por el vector $\vec{v}=(1\,,2\,,-1)$. En su movimiento, dicho objeto pasa por el punto $A=(2\,,1\,,2)$.

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a dicha trayectoria.
b) ¿Cuál es el ángulo que forma la trayectoria del objeto con el plano XOY?

EJERCICIO 18 [S/99]

Un paralelogramo cuyo centro es $M=\left(\dfrac{3}{2}\,,3\,,4\right)$ tiene por vértices $A=(1\,,2\,,3)$ y $B=(3\,,2\,,5)$.

a) Halla las coordenadas de los otros vértices.
b) Halla la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.
c) Calcula el área del paralelogramo.

EJERCICIO 19 [S/99]

Halla el punto del plano de ecuación $x - z = 3$ que está más cerca del punto $P(3, 1, 4)$ así como la distancia entre éste punto y el plano dado.

EJERCICIO 20 [S/99]

a) Averigua cuál es el punto P de la recta r que está más cerca de $A = (2, 3, -1)$ siendo

$$r : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & - & 2y & - & 4z & = & 1 \end{array} \right.$$

b) Halla el área del triángulo cuyos vértices son A, P y B con $B = (1, 0, 0)$.

EJERCICIO 21 [S/99]

Sea π el plano de ecuación $\pi : 3x - 2y - 6z = 1$ y sea r la recta dada por

$$r : (x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda (2, -1, 1)$$

a) ¿Cómo averiguarías si son paralelos? Comprueba si lo son.

b) ¿Cómo averiguarías si son perpendiculares? Comprueba si lo son.

EJERCICIO 22 [S/99]

Considera el punto $P = (-1, 2, 1)$.

a) Determina el punto Q el plano $\pi : -3x + y + z + 5 = 0$ de forma que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular al plano π.

b) Determina un punto M de la recta $r : \dfrac{x-2}{-1} = y + 1 = \dfrac{z-10}{-1}$ de forma que el vector $\overrightarrow{MP}$ sea paralelo al plano π.

c) Calcula el área del triángulo MPQ.

EJERCICIO 23 [S/99]

Sea la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$$

Halla a, b, c, d sabiendo que:

i. El vector cuyas componentes son la primera columna de A es ortogonal al vector $(1, -1, 1)$.

ii. El producto vectorial del vector cuyas coordenadas son las de la tercera columna de A por el vector $(1, 0, 1)$ es el vector $(-2, 3, 2)$.

iii. El rango de la matriz A es 2.

EJERCICIO 24 [S/00]

Considera el plano π y la recta r dados por

$$\pi : ax + 2y - 4z + b = 0 \quad , \quad r : \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$$

a) Halla los valores de a y b para los que r está contenida en π.

b) ¿Existe algún valor de a y algún valor de b para los que r es perpendicular a π?

EJERCICIO 25 [S/00]

Los puntos $A\,(3\,,3\,,5)$ y $B\,(3\,,3\,,2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. El vértice C consecutivo de B está en la recta de ecuaciones $r : x = 6 - y = \dfrac{z+1}{2}$.

Determina los vértices C y D.

EJERCICIO 26 [S/00]

Calcula el punto de la recta de ecuaciones

$$r : x - 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-3}$$

más cercano al punto $A\,(1\,,-1\,,1)$.

EJERCICIO 27 [S/00]

Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones respectivas:

$$\pi_1 : x + y + 2z = 4 \quad , \quad \pi_2 : 2x - y + z = 2$$

EJERCICIO 28 [S/00]

Calcula las coordenadas del punto simétrico del $A\,(1\,,3\,,-7)$ respecto de la recta dada por las ecuaciones:

$$r : x - 1 = y + 3 = \frac{z-4}{2}$$

EJERCICIO 29 [S/00]

Halla las ecuaciones de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas definidas por:

$$r : x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{-2} \quad , \quad s : \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$

EJERCICIO 30 [S/00]

Calcula el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están, respectivamente, en los planos

$$2x - 2y + z - 1 = 0 \quad , \quad 2x - 2y + z - 5 = 0$$

EJERCICIO 31 [S/00]

Halla las coordenadas del punto simétrico del punto $P = (1\,,2\,,-2)$ respecto al plano de ecuación $3x + 2y + z - 7 = 0$.

EJERCICIO 32 [S/00]

Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $(-1\,,2\,,1)$.

EJERCICIO 33 [S/00]

Determina los puntos de la recta de ecuaciones

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$$

que equidistan de los planos de ecuaciones

$$3x + 4y - 1 = 0 \quad , \quad 4x - 3z - 1 = 0$$

EJERCICIO 34 [S/01]

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A = (1\,,0\,,-1)$, es perpendicular al plano de ecuación $x - y + 2z = -1$ y es paralelo a la recta $r : \left\{ \begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$.

EJERCICIO 35 [S/01]

Considera los puntos

$$A = (1\,,2\,,3) \quad , \quad B = (3\,,2\,,1) \quad , \quad C = (2\,,0\,,2)$$

Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano que los contiene.

EJERCICIO 36 [S/01]

Considera los puntos $A(1\,,0\,,3)\,,\ B(3\,,-1\,,0)\,,\ C(0\,,-1\,,2)\,,\ D(a\,,b\,,-1)$.

Halla a y b sabiendo que la recta AB corta perpendicularmente a la recta CD.

EJERCICIO 37 [S/01]

Sea r la recta de ecuaciones

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 0 \\ 3x + 2z & = & 0 \end{array} \right\}$$

(a) [1,5] Halla los puntos de r cuya distancia al origen es de 7 unidades..

(b) [1] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1\,,2\,,-1)$.

EJERCICIO 38 [S/01]

Halla las coordenadas del punto simétrico de $(0\,,-1\,,1)$ con respecto a la recta $\dfrac{x-5}{2}=y=\dfrac{z-2}{3}$.

EJERCICIO 39 [S/01]

Considera los planos $\pi_1: 2x+5=0$ y $\pi_2: 3x+3y-4=0$.

(a) ¿Qué ángulo determinan ambos planos?.

(b) Halla el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos dados.

EJERCICIO 40 [S/01]

Halla el punto de la recta $x=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ que equidista del punto $(1\,,2\,,1)$ y del origen de coordenadas.

EJERCICIO 41 [S/01]

Considera el plano $2x+y+2z-4=0$.

(a) [1'75] Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano dado con los ejes coordenados.

(b) [0'75] Calcula la distancia del origen al plano dado.

EJERCICIO 42 [S/01]

Determina todos los puntos del plano $2x-y+2z-1=0$ que equidistan de los puntos $A(3\,,0\,,-2)$ y $B(1\,,2\,,0)$. ¿Qué representa geométricamente?

EJERCICIO 43 [S/02]

Considera los puntos $A=(1\,,-3\,,2)$, $B=(1\,,1\,,2)$, $C=(1\,,1\,,-1)$.

a) [1'25] ¿Pueden ser A, B y C vértices consecutivos de un rectángulo? Justifica la respuesta.

b) [1'25] Halla, si es posible, un punto D para que el paralelogramo $ABCD$ sea un rectángulo.

EJERCICIO 44 [S/02]

Considera los puntos

$$A=(1\,,-1\,,2)\ ,\ B=(1\,,3\,,0)\ ,\ C=(0\,,0\,,1)$$

Halla el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por B y C.

EJERCICIO 45 [S/02]

Calcula el área del triángulo de vértices

$$A\,(1\,,1\,,2)\quad,\quad B\,(1\,,0\,,-1)\quad,\quad C\,(1\,,-3\,,2)$$

EJERCICIO 46 [S/02]

Sea $\pi : 3x - y + 2z = 0$.

a) [1] Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a π y pasa por el punto $P = (1\,,-2\,,2)$.

b) [1'5] Halla la ecuación del plano π_2 perpendicular a ambos que contiene a la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 4z & = & 1 \end{array} \right.$$

EJERCICIO 47 [S/02]

Los puntos $A = (1\,,0\,,2)$ y $B = (-1\,,0\,,-2)$ son los vértices opuestos de un cuadrado.

a) [1] Calcula el área del cuadrado.

b) [1'5] Calcula el plano perpendicular al segmento de extremos A y B que pasa por su punto medio.

EJERCICIO 48 [S/02]

Considera el plano $\pi : x - y + 2z = 3$ y el punto $A = (-1\,,-4\,,2)$.

a) [1] Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A.

b) [1'5] Halla el punto simétrico de A respecto de π.

EJERCICIO 49 [S/02]

Determina la recta que no corta al plano de ecuación $\pi : x - y + z = 7$ y cuyo punto más cercano al origen es $P\,(1\,,2\,,3)$.

EJERCICIO 50 [S/02]

Halla el punto de la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -1 \end{array} \right.$$

que está más cercano al punto $P\,(1\,,-1\,,0)$.

EJERCICIO 51 [S/02]

Considera la recta r y el plano π siguientes

$$r : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & a \\ & & y & - & az & = & 1 \end{array} \right. \quad , \quad \pi : 2x - y = b$$

a) Determina a y b sabiendo que la recta está contenida en el plano.

b) Halla la ecuación de un plano que contenga r y sea perpendicular a π.

EJERCICIO 52 [S/03]

Se sabe que los puntos $A=(1,0,-1)$, $B=(3,2,1)$, $C=(-7,1,5)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo $ABCD$.

Halla el área del paralelogramo.

EJERCICIO 53 [S/03]

Los puntos $A=(1,1,0)$, $B=(2,2,1)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. Además se sabe que los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Halla C y D.

EJERCICIO 54 [S/03]

Considera una recta r y un plano π cuyas ecuaciones son, respectivamente, las siguientes:

$$r:\begin{cases} x = t \\ y = t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad \pi:\begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{R}) \\ z=\beta \end{cases}$$

Dados los puntos $A=(4,4,4)$, $C=(0,0,0)$, halla un punto B en la recta r de manera que el triángulo formado por los puntos A, B y C sea rectángulo en C.

EJERCICIO 55 [S/03]

Sabiendo que las rectas

$$r: x=y=z \quad , \quad s:\begin{cases} x=1+\mu \\ y=3+\mu \\ z=-\mu \end{cases}$$

se cruzan, halla los puntos A y B, de r y s, respectivamente, que están a distancia mínima.

EJERCICIO 56 [S/03]

Determina el punto P de la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi_1: x+y+z+3=0 \quad , \quad \pi_2:\begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6-\mu \end{cases}$$

EJERCICIO 57 [S/03]

Se sabe que el plano π corta a los semiejes positivos de coordenadas en los puntos A, B y C, siendo las longitudes de los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ de 4 unidades donde O es el origen de coordenadas.

a) Calcula el área del triángulo ABC.

b) Obtén un plano paralelo al plano π que diste 4 unidades del origen de coordenadas.

EJERCICIO 58 [S/03]

Halla la perpendicular común a las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \quad \alpha \\ z = \; - \alpha \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x = \quad \beta \\ y = 2 + 2\beta \\ z = 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 59 [S/03]

Considera el plano $\pi : x - 2y + 1 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x - 3y + \ z &= \ 0 \\ x - \ y + az &= -2 \end{cases}$.

a) Halla el valor de a sabiendo que la recta está contenida en el plano.

b) Calcula el ángulo formado por el plano π y la recta $s : \begin{cases} x - 3y + z &= \ 0 \\ x - \ y + z &= -2 \end{cases}$.

EJERCICIO 60 [S/03]

Considera el punto $P = (-2\,,3\,,0)$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{rcr} x + \ y + z &=& -2 \\ 2x - 2y + z &=& -1 \end{array} \right\}$.

Determina el punto de r más próximo a P.

EJERCICIO 61 [S/03]

Considera la recta $r : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ \quad\ y \quad\ \ = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi : x - 2y + z = 0$.

a) Calcula el haz de planos que contienen a la recta r.

b) Halla el plano que contiene a la recta r y corta al plano π en una recta paralela al plano $z = 0$.

Soluciones

EJERCICIO 1 [S/96] (Hallar un punto en una recta: punto genérico + condición)

El punto C será, pasando la recta a paramétricas:

$$C = (1+\lambda\,,1-\lambda\,,1+2\lambda)$$

La condición pedida es:

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \;\rightarrow\; \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \;\rightarrow\; (-1+\lambda\,,2-\lambda\,,3+2\lambda)\cdot(2+\lambda\,,2-\lambda\,,-1+2\lambda) = 0$$

Operando y simplificando:

$$6\lambda^2+\lambda-1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -\frac{1}{2}\,,\lambda = \frac{1}{3}$$

Hay, pues, dos soluciones:

$$C_1 = \left(\frac{1}{2}\,,\frac{3}{2}\,,0\right) \quad , \quad C_2 = \left(\frac{4}{3}\,,\frac{2}{3}\,,\frac{5}{3}\right)$$

EJERCICIO 2 [S/96] (Simétrico respecto de un plano)

Primero calculamos la recta que pasa por $O = (0\,,0\,,0)$ y es perpendicular a $\pi : x+2y+3z = 1$ (el vector normal del plano es director para la recta):

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Ahora hallamos el punto proyección Q que es la intersección de esa recta con el plano:

$$P_r \mapsto \pi : \lambda + 2\cdot 2\lambda + 3\cdot 3\lambda = 1 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{1}{14}$$

Es:

$$Q = \left(\frac{1}{14}\,,\frac{2}{14}\,,\frac{3}{14}\right)$$

Ahora, teniendo en cuenta que Q es el punto medio del segmento formado por los simétricos:

$$\frac{O+O'}{2} = Q \;\rightarrow\; 0' = 2O - Q \;\rightarrow\; P' = \left(\frac{1}{7}\,,\frac{2}{7}\,,\frac{3}{7}\right)$$

El cuadrado de las distancias entre ambos simétricos es

$$|\overrightarrow{OO'}|^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{2}{7}$$

EJERCICIO 3 [S/96] (Paralelogramo y ortogonalidad)

a) Hallamos el cuarto vértice D del paralelogramo, suponiendo que son vértices consecutivos:

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \;\rightarrow\; D - C = \overrightarrow{BA} \;\rightarrow\; D = C + \overrightarrow{BA} \;\rightarrow\; D = (0\,,-1\,,2) + (2\,,1\,,0) = (2\,,0\,,2)$

Ahora veamos que son ortogonales:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (-2\,,-2\,,0) \\ \overrightarrow{BD} = (2\,,0\,,2) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = -4+0+4 = 0 \;\rightarrow\; \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$$

Encuentra el ángulo que forman las diagonales $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ del paralelogramo $ABCD$ en el que conocemos $A = (2\,,1\,,0)$, $B = (0\,,0\,,0)$ y $C = (0\,,-1\,,2)$.

b) No es un cuadrado, pues se aprecia claramente que las diagonales no miden igual:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} \\ |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} \end{array}\right\} \rightarrow |\overrightarrow{AC}| \neq |\overrightarrow{BD}|$$

EJERCICIO 4 [S/96] (Manipulación algebraica con módulos y productos escalares)

Primero, con los datos que nos dan vamos a calcular el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos 120^\circ = -\frac{15}{2}$$

a) $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(a\vec{u}+\vec{v}) = 0 \;\rightarrow\; a|\vec{u}|^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} - a\vec{u}\cdot\vec{v} - |\vec{v}|^2 = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{65a}{2} - \dfrac{33}{2} = 0 \;\rightarrow\; a = \dfrac{33}{65}.$

b) $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} = 25+9+15 = 49 \;\rightarrow\; |\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{49} = 7.$

EJERCICIO 5 [S/96] (Recta perpendicular a un plano por un punto)

a) Primero veamos ese plano: pasa por $P = (1\,,1\,,1)$ y contiene a la recta

$$r:\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ 2x+3z & = & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{z=\lambda} \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\lambda \\ y = 0 \\ z = \quad\lambda \end{array}\right. \rightarrow P_r = \left(\frac{1}{2}\,,0\,,0\right)\,,\ \vec{v}_r = \left(-\frac{3}{2}\,,0\,,1\right)$$

Tenemos así dos vectores paralelos al plano:

$$\overrightarrow{P_rP} = \left(\frac{1}{2}\,,1\,,1\right)\,,\ \vec{v}_r = \left(-\frac{3}{2}\,,0\,,1\right)$$

El vector director el vector normal al plano es vector director para la recta:

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_rP}\times\vec{v}_r = \left|\begin{array}{ccc} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left(-1\,,2\,,-\frac{3}{2}\right)$$

La recta pedida s pasa por el origen de coordenadas, así :

$$s:\ \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3/2}$$

EJERCICIO 6 [S/97] (Plano que pasa por un punto, es paralelo a una recta y perpendicular a otro plano)

El plano π' pedido pasa por el punto $P = (1\,,0\,,2)$.

Observemos que tanto el vector director de la recta, $\vec{v}_r = (2\,,3\,,1)$, como el vector normal al plano dado, $\vec{n} = (2\,,-1\,,1)$, son paralelos al plano solicitado.

Así, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{simplificando} \pi' : x - 2z + 3 = 0$$

EJERCICIO 7 [S/97] (Proyección sobre un plano y área de un triángulo con parámetro)

a) Halla el punto C que es la proyección ortogonal del punto $B = (2\,,1\,,1)$ sobre $\pi : 2x + y - 2z = -6$.

Primero calculamos la recta r perpendicular al plano por B. Pasa por el punto $B = (2\,,1\,,1)$ y tiene la dirección del vector normal al plano $\vec{n} = (2\,,1\,,-2)$:

$$r : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Ahora hallamos a intersección de esa recta con el plano, que es el punto proyección C:

$$P_r \mapsto \pi : 2 \cdot (2 + 2\lambda) + (1 + \lambda) - 2 \cdot (1 - 2\lambda) = -6 \to 9\lambda = -9 \to \lambda = -1$$

Es:

$$C = (0\,,0\,,3)$$

b) Si el punto A está en el eje OX, entonces es $A = (a\,,0\,,0)$.

El área del triángulo de vértices A, B y C es la mitad de la del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$. Por ello:

$$\mathscr{A}\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}| = 6 \to |\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}| = 12$$

Calculamos

$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (3\,,2a-6\,,a) \to \sqrt{3^2 + (2a-6)^2 + a^2} = 12$$

Simplificando:

$$5a^2 - 24a - 99 = 0 \to a_1 = \frac{24 - \sqrt{2556}}{10}\,,\ a_2 = \frac{24 + \sqrt{2556}}{10}$$

Hay, pues, dos soluciones:

$$A_1 = (a_1\,,0\,,0) \quad , \quad A_2 = (a_2\,,0\,,0)$$

EJERCICIO 8 [S/97] (Ángulo entre plano y recta)

Recordemos que el ángulo que forman una recta y un plano es el complementario del ángulo agudo que forman un vector director de la recta y un vector normal al plano.

El vector director de la recta lo tenemos: $\vec{v}_s = (3\,,2\,,-1)$.

Para hallar el vector normal al plano observemos que al estar r contenida en él, dos vectores paralelos al plano son $\vec{v}_r = (2\,,1\,,3)$ y $\overrightarrow{P_rP} = (2\,,0\,,1) - (1\,,-3\,,2) = (1\,,3\,,-1)$. Luego es normal al plano el vector

$$\vec{n} = \vec{v}_r \times \overrightarrow{P_rP} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-10\,,-5\,,-5)$$

El ángulo que forman los vectores director y normal viene dado por:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_s = (3\,,2\,,-1) \\ \vec{n} = (-10\,,-5\,,-5) \end{array}\right\} \to \cos\left(\widehat{\vec{v}_s\,,\vec{n}}\right) = \frac{-45}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{150}}$$

Luego:

$$(\widehat{s\,,\pi}) = 90^\circ - \arccos\frac{45}{\sqrt{2100}} \approx 72^\circ 17' 4''$$

EJERCICIO 9 [Área del triángulo cuyos vértices son los cortes de los ejes coordenados con un plano]

Un plano paralelo a $x+y+z=1$ es $x+y+z=d$.

Los puntos de corte con los ejes coordenados son (hacemos $y=z=0$, $x=z=0$ y $x=y=0$):

$$A = (d\,,0\,,0) \ , \ B = (0\,,d\,,0) \ , \ C = (0\,,0\,,d)$$

Como el área de un triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que determinan dos lados con origen común:

$$\mathscr{A}\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = 18\sqrt{3} \ \to \ |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = 36\sqrt{3}$$

Calculamos

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -d & d & 0 \\ -d & 0 & -d \end{vmatrix} = \left(-d^2\,,-d^2\,,d^2\right) \ \to \ \sqrt{d^4+d^4+d^4} = 36\sqrt{3}$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$3d^4 = 3888 \ \to \ d = \pm\sqrt[4]{1296} = \pm 6$$

Hay, pues, dos planos que son solución:

$$\pi_1 : x+y+z=-6 \quad , \quad \pi_2 : x+y+z=6$$

EJERCICIO 10 [Volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados con un plano]

a) Los puntos de corte de π con los ejes coordenados son (hacemos $y = z = 0$, $x = z = 0$ y $x = y = 0$):

$$A = (3\,,0\,,0)\ ,\ B = (0\,,2\,,0)\ ,\ C = (0\,,0\,,1)$$

Así que queremos calcular el volumen del tetraedro de vértices OABC, donde O es el origen de coordenadas.

Recordemos que el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ es el valor absoluto de su producto mixto. Y teniendo en cuenta que dicho paralelepípedo contiene 6 tetraedros idénticos en volumen al de vértices OABC tenemos::

$$\left[\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{OC}\right] = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \rightarrow \mathscr{V}\,(OABC) = 1 \text{ u.v.}$$

b) Brevemente: primero calcularemos la ecuación de la recta r que pasa por el punto O y que es perpendicular al plano π. A continuación calcularemos el punto Q intersección de r con π (la proyección de O en π). Por último hallaremos el simétrico O' teniendo en cuenta que el punto medio del segmento $\overline{OO'}$ es Q.

La recta r pasa por el punto $O = (0\,,0\,,0)$ y tiene la dirección del vector normal al plano $\vec{n} = (2\,,3\,,6)$:

$$r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 6\lambda \end{cases}$$

Ahora hallamos a intersección de esa recta con el plano, que es el punto proyección Q:

$$P_r \mapsto \pi : 2\cdot(2\lambda) + 3\cdot(3\lambda) + 3\cdot(3\lambda) = 6 \rightarrow \lambda = \frac{6}{49}$$

Es:

$$Q = \left(\frac{12}{49}\,,\frac{18}{49}\,,\frac{36}{49}\right)$$

Como el punto medio del segmento $\overline{OO'}$ es Q:

$$\frac{O+O'}{2} = Q \rightarrow O' = 2Q - O \rightarrow O' = \left(\frac{24}{49}\,,\frac{36}{49}\,,\frac{72}{49}\right)$$

EJERCICIO 11 [Plano mediador de un segmento]

Observemos que los puntos que equidistan de $P\,(1\,,1\,,1)$ y de $Q\,(-1\,,-1\,,2)$ son los del plano mediador del segmento $\overline{PQ}$. Así, basta obtener la ecuación del plano π que pasa por el punto medio de $\overline{PQ}$ y que tiene como vector normal a $\overrightarrow{PQ}$ para responder a ambas cuestiones.

$$\left.\begin{array}{l} M = \dfrac{P+Q}{2} = (0\,,0\,,1.5) \\ \overrightarrow{PQ} = (-2\,,-2\,,1) \end{array}\right\} \rightarrow \pi : -2\,(x-0) - 2\,(y-0) + 1\,(z-1.5) = 0$$

Simplificando:

$$\pi : -2x - 2y + z - 1.5 = 0$$

EJERCICIO 12 [Recta secante perpendicular y problema de triángulo equilátero]

a) Para hallar la ecuación de la recta s que es secante perpendicular a r y pasa por $P=(2,1,3)$ usaremos el método del punto genérico.

Ponemos la recta cortada en paramétricas y expresamos en función de un parámetro el punto de corte Q:

$$r:\begin{cases} x-y-5=0 \\ z-1=0 \end{cases} \xrightarrow{x=\lambda} \begin{cases} x= \lambda \\ y=-5+\lambda \\ z=1 \end{cases} \rightarrow Q=(\lambda,-5+\lambda,1)\ ,\ \vec{v}_r=(1,1,0)$$

Como las rectas son perpendiculares, el producto escalar de $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{v}_r$ es cero:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r=(\lambda-2,\lambda-6,-2)\cdot(1,1,0)=0 \rightarrow 2\lambda-8=0 \rightarrow \lambda=4$$

La recta s pedida pasa por $Q=(4,-1,1)$ y tiene como vector director a $\overrightarrow{PQ}=(2,-2,-2)$:

$$s:\frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-2}$$

b) De nuevo usaremos el método del punto genérico. Será:

$$A=(\lambda,-5+\lambda,1)$$

Es fácil observar que la altura del triángulo PAB es $\overline{PQ}$ y entonces, como es equilátero, la longitud del lado $\overline{AP}$ es el doble la longitud del segmento $\overline{AQ}$:

$$|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{AQ}| \rightarrow \sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda-6)^2+(-2)^2}=2\cdot\sqrt{(\lambda-4)^2+(\lambda-4)^2+(0)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y simplificando:

$$6\lambda^2-48\lambda+84=0 \rightarrow \lambda=-\sqrt{2}+4\,,\ \lambda=\sqrt{2}+4$$

Lógicamente, una solución del parámetro proporciona A y la otra B. Como el nombre es indiferente pongamos:

$$A=\left(4-\sqrt{2},-1-\sqrt{2},1\right) \quad , \quad B=\left(4+\sqrt{2},-1+\sqrt{2},1\right)$$

EJERCICIO 13 [Distancia de un punto a una recta]

Para hallar la distancia del punto $P=(1,0,-1)$ a la recta r usaremos el método del punto genérico.

Ponemos la recta en paramétricas y expresamos en función de un parámetro el pie de la perpendicular Q:

$$r:\begin{cases} x+y=0 \\ z-1=0 \end{cases} \xrightarrow{x=\lambda} \begin{cases} x= \lambda \\ y= -\lambda \\ z=1 \end{cases} \rightarrow Q=(\lambda,-\lambda,1)\ ,\ \vec{v}_r=(1,-1,0)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{PQ}$ perpendicular a $\vec{v}_r$, así que su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r=(\lambda-1,-\lambda,2)\cdot(1,-1,0)=0 \rightarrow 2\lambda-1=0 \rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

La distancia de pedida es la distancia del punto a su proyección sobre la recta:

$$\mathrm{d}(P,r)=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$