TEMA 7

ESPACIO AFÍN

Ejercicios para Selectividad
de
Espacio Afín

Detalladamente
resueltos

Cursos
1996 – 2004

Enunciados

EJERCICIO 1 [S/96]

Considera los puntos $A=(2\,,-1\,,-2)$ y $B=(-1\,,-1\,,2)$.

Determina los puntos del segmento $\overline{AB}$ que lo dividen en tres segmentos iguales.

EJERCICIO 2 [S/96]

Discute, según los valores de a la posición relativa de la recta r de ecuaciones

$$r:\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & (a+1)z & = & 3 \\ -x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

respecto del plano $ax+2y+3z=3$.

EJERCICIO 3 [S/96]

Dados los planos de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & z & = & -1 \\ & & 2y & - & z & = & -2 \\ x & - & y & + & \lambda z & = & -5 \end{array}\right\}$$

determina el valor de λ para el que los cuatro planos tienen un sólo punto común y calcula dicho punto.

EJERCICIO 4 [S/97]

a) Define lo que son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$.

b) Prueba que los vectores $\vec{u}=(2\,,-1\,,0)$ y $\vec{v}=(1\,,0\,,1)$ son linealmente independientes.

c) Halla el valor de t para el cual el vector $\vec{w}=(8\,,-5\,,t)$ depende linealmente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

EJERCICIO 5 [S/97]

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A=(1\,,1\,,2)$ y es paralelo a las rectas r y s dadas por:

$$r:\frac{x-2}{-1}=y=\frac{z+1}{2} \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=-2 \\ -x+y+3z=1 \end{array}\right.$$

EJERCICIO 6 [S/97]

Determina la ecuación del plano que contiene al punto $P=(2\,,0\,,1)$ y a la recta de ecuaciones

$$r:\frac{x-1}{2}=y+3=\frac{z-2}{3}$$

EJERCICIO 7 [S/97]

Considera el punto $P = (1\,,0\,,-1)$ y la recta de ecuaciones

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

Determina el plano que pasa por P y contiene a la recta r.

EJERCICIO 8 [S/98]

Dados los puntos $A = (1\,,0\,,1)$, $B = (0\,,0\,,-1)$, $C = (3\,,\alpha\,,\beta)$, determina, si es posible, α y β de forma que los tres puntos estén alineados.

EJERCICIO 9 [S/98]

Los tres planos cuyas ecuaciones son, respectivamente,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & az & = & 1 \\ 2x & + & y & + & az & = & 0 \\ 3x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right\}$$

se cortan en una recta. ¿Cuánto vale a?

EJERCICIO 10 [S/98]

Sean r y s las rectas dadas por

$$r : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 1 & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \quad , \quad s : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & - & 3 & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Determina la ecuación de un plano que contenga a r y sea paralelo a s.

EJERCICIO 11 [S/98]

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & - & y & + & mz & = & -2m \end{array}\right\}$$

1) Determina si existe y, en ese caso, calcula el valor del parámetro m para el que los tres planos determinados por las ecuaciones de sistema se cortan en una línea recta.
2) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta determinada en el apartado anterior y pasa por el punto $(2\,,1\,,3)$.

EJERCICIO 12 [S/98]

Averigua razonadamente si el punto $P = (2\,,2\,,1)$ se encuentra o no entre los planos cuyas ecuaciones son:

$$\pi_1 : x - 2y + z + 3 = 0 \quad , \quad \pi_2 : x - 2y + z - 4 = 0$$

EJERCICIO 13 [S/99]

Un objeto se mueve en el espacio siguiendo una línea recta cuya dirección viene dada por el vector $\vec{v} = (1\,,2\,,-1)$. En su movimiento, dicho objeto pasa por el punto $A = (2\,,1\,,2)$.

Calcula los puntos de corte la trayectoria del objeto con los planos coordenados.

EJERCICIO 14 [S/99]

Sea π el plano de ecuación $\pi : 3x - 2y - 6z = 1$ y sea r la recta dada por

$$r : (x\,,y\,,z) = (1\,,0\,,1) + \lambda\,(2\,,-1\,,1)$$

¿Cómo averiguarías si son paralelos? Comprueba si lo son.

EJERCICIO 15 [S/99]

Considera el plano π y la recta r dados por

$$\pi : ax + 2y - 4z + b = 0 \quad , \quad r : \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$$

Halla los valores de a y b para los que r está contenida en π.

EJERCICIO 16 [S/99]

Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P = (1\,,0\,,2)$ y corta a las rectas dadas por

$$r : \frac{x}{3} = y + 2 = z \quad , \quad s : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 6y & + & 2 & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

EJERCICIO 17 [S/99]

Un paralelogramo cuyo centro es $M = \left(\frac{3}{2}\,,3\,,4\right)$ tiene por vértices $A = (1\,,2\,,3)$ y $B = (3\,,2\,,5)$.

Halla las coordenadas de los otros vértices.

EJERCICIO 18 [S/01]

Calcula a sabiendo que los planos

$$ax + y - 7z = -5 \quad , \quad x + 2y + a^2 z = 8$$

se cortan en una recta que pasa por el punto $A = (0\,,2\,,1)$ pero que no pasa por el punto $B = (6\,,-3\,,2)$.

EJERCICIO 19 [S/01]

Considera los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + z = 1 \quad , \quad \pi_2 : x - y + z = 2 \quad , \quad \pi_3 : 3x + y + 3z = 5$$

¿Se cortan los dos primeros? ¿Hay algún punto que pertenezca a los tres planos?

EJERCICIO 20 [S/02]

Considera los puntos

$$A = (1\,,1\,,1)\ ,\ B = (2\,,2\,,2)\ ,\ C = (1\,,1\,,0)\ ,\ D = (1\,,0\,,0)$$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos A y B y no corta a la recta CD .

b) Halla las ecuaciones de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

EJERCICIO 21 [S/02]

Sea $\pi : 3x - y + 2z = 0$.

Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a π y pasa por el punto $P = (1\,,-2\,,2)$.

EJERCICIO 22 [S/02]

Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi : x + y - z = 6$ con la recta $s : \dfrac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + \ \ y & = & 4 \\ 4x - 3y + z & = & 1 \end{array} \right.$$

EJERCICIO 23 [S/02]

Sabiendo que las rectas siguientes se cortan, determina a y el punto de corte.

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 1 \\ x - y & = & 2 \end{array} \right. \quad , \quad s : \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y - z & = & a \\ 2x + z & = & a \end{array} \right.$$

EJERCICIO 24 [S/02]

Considera la recta r y el plano π siguientes

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x + \ z = a \\ y - az = 1 \end{array} \right. \quad , \quad \pi : 2x - y = b$$

Determina a y b sabiendo que la recta está contenida en el plano.

EJERCICIO 25 [S/03]

Se sabe que los puntos $A = (1\,,0\,,-1)$, $B = (3\,,2\,,1)$, $C = (-7\,,1\,,5)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo $ABCD$.

Calcula las coordenadas del punto D.

EJERCICIO 26 [S/03]

Considera el punto $P = (-2\,,3\,,0)$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{rcl} x + \ \ y + z & = & -2 \\ 2x - 2y + z & = & -1 \end{array} \right\}$.

Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a la recta r.

EJERCICIO 27 [S/03]

Estudia la posición relativa de la recta r y del plano π cuyas ecuaciones son, respectivamente, las siguientes:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = \quad t \\ y = \quad t \\ z = 0 \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R}) \quad , \quad \pi : \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \quad \beta \end{array} \right. \quad (\alpha \, , \beta \in \mathbb{R})$$

EJERCICIO 28 [S/03]

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3\,,1\,,-1)$, es paralela al plano $3x - y + z = 4$ y corta a la recta intersección de los planos $x + z = 4$ y $x - 2y + z = 1$.

EJERCICIO 29 [S/03]

Se sabe que el plano π corta a los semiejes positivos de coordenadas en los puntos A, B y C, siendo las longitudes de los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ de 4 unidades donde O es el origen de coordenadas.

Halla la ecuación del plano π.

EJERCICIO 30 [S/03]

Considera el plano $\pi : x - 2y + 1 = 0$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{rcr} x - 3y + \ z & = & 0 \\ x - \ y + az & = & -2 \end{array} \right\}$.

Halla el valor de a sabiendo que la recta está contenida en el plano.

EJERCICIO 31 [S/04]

Considera el punto, la recta y el plano dados por

$$A(0\,,1\,,-1) \quad , \quad r \equiv \left\{ \begin{array}{rcr} x - 2y + z & = & 0 \\ 2x - z & = & -4 \end{array} \right. \quad , \quad \pi \equiv x - 2y - z = 2$$

Halla la ecuación de la recta s que pasa por A, es paralela a π y corta a r.

EJERCICIO 32 [S/04]

Considera los puntos $P(6\,,-1\,,-10)$, $Q(0\,,2\,,2)$ y R, que es el punto de intersección del plano y de la recta

$$\pi \equiv 2x + \lambda y + z - 2 = 0 \ , \quad r \equiv \left\{ \begin{array}{r} x + y + z - 1 = 0 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

Determina λ sabiendo que los puntos P, Q y R están alineados.

EJERCICIO 33 [S/04]

Considera el plano y la recta definidos por

$$\pi \equiv 2x + y - z + 7 = 0 \quad , \quad r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{array} \right.$$

¿Hay algún plano paralelo a π que contenga a la recta r? En caso afirmativo determina sus ecuaciones.

EJERCICIO 34 [S/04]

Las rectas r y s definidas a continuación contienen dos lados de un cuadrado:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+y-2=0 \\ 2x+2y+z-4=0 \end{array} \right. \quad , \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+y-6=0 \\ x+y-z-6=0 \end{array} \right.$$

Halla la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

EJERCICIO 35 [S/04]

Sean los puntos $A(1\,,2\,,1)$, $B(2\,,3\,,1)$, $C(0\,,5\,,3)$, $D(-1\,,4\,,3)$.

Prueba que los cuatro puntos están en el mismo plano. Halla la ecuación de dicho plano.

Soluciones

EJERCICIO 1 [S/96]

Sean P y Q esos puntos:

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ \rightarrow\ P=A+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(2\,,-1\,,-2)+\frac{1}{3}(-3\,,0\,,4)=\rightarrow\ P=\left(1\,,-1\,,-\frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\ \rightarrow\ Q=A+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=(2\,,-1\,,-2)+\frac{2}{3}(-3\,,0\,,4)=\rightarrow\ Q=\left(0\,,-1\,,\frac{2}{3}\right)$$

EJERCICIO 2 [S/96]

Estudiaremos el sistema formado por las ecuaciones que definen la recta junto con la que define al plano:

$$r:\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & (a+1)z & = & 3\\ -x & + & y & + & z & = & 1\\ ax & + & 2y & + & 3z & = & 3\end{array}\right.\ \rightarrow\ A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & a+1 & 3\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ a & 2 & 3 & 3\end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\neq 0\ \xrightarrow{orlamos}\ \Delta_3^1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+1\\ -1 & 1 & 1\\ a & 2 & 3\end{vmatrix}=-a^2-a+6\,,\ \Delta_3^2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 1\\ a & 2 & 3\end{vmatrix}=-a+2$$

Veamos cuándo es cero el determinante de los coeficientes:

$$\det(C)=-a^2-a+6=0\ \rightarrow\ a=-3\,,a=2$$

<u>Caso 1</u>: $a\neq 2$ y $a\neq -3$.

Como $\det(C)\neq 0$:

$$\mathrm{rg}(C)=\mathrm{rg}(A)=3$$

S es compatible determinado y, por consiguiente, la recta y el plano son secantes (en un punto que es la solución del sistema).

<u>Caso 2</u>: $a=-3$.

Aquí tenemos

$$\mathrm{rg}(C)=2\neq\mathrm{rg}(A)=3$$

S es incompatible y, por consiguiente, la recta es paralela al plano.

<u>Caso 3</u>: $a=2$.

Aquí tenemos

$$\mathrm{rg}(C)=\mathrm{rg}(A)=2<3$$

S es compatible indeterminado con $3-2=1$ parámetro y, por consiguiente, la recta está contenida en el plano.

EJERCICIO 3 [S/96]

El sistema deberá ser compatible determinado y entonces la solución será el punto común a todos los planos.

Observemos los menores:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_4 = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ \hline 1 & -1 & 3\lambda & -5 \end{array} \right| = -18\lambda - 36$$

Veamos cuándo es cero la matriz ampliada:

$$\det(A) = -18\lambda - 36 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -2$$

<u>Caso 1</u>: $\lambda \neq -2$.

Como $\det(A) \neq 0$:

$$\text{rg}(C) = 3 \neq \text{rg}(A) = 4$$

S es compatible determinado y, por consiguiente, los planos no tienen ningún punto en común.

<u>Caso 2</u>: $\lambda = -2$.

Aquí tenemos

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 3$$

S es compatible indeterminado y, por consiguiente, los planos se cortan en un punto.

El sistema equivale al formado por las tres filas que forman Δ_3 y podemos resolver por Cramer:

$$(x\,,y\,,z) = (-1\,,0\,,2)$$

EJERCICIO 4 [S/97]

b) Es fácil observar que sus componentes no son proporcionales y por ello son independientes:

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{0}$$

c) Si los tres son dependientes entonces el determinante de sus componentes es cero:

$$\det[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & -5 & t \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow t + 2 = 0 \ \rightarrow t = -2$$

EJERCICIO 5 [S/97]

Los vectores directores de las rectas son paralelos al plano. Vamos a obtenerlos:

$$r : \frac{x-2}{-1} = y = \frac{z+1}{2} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_r = (-1\,,1\,,2)$$

$$s : \left\{ \begin{array}{rl} 2x - y = & -2 - \ \ z \\ -x + y = & \ \ 1 - 3z \end{array} \right. \quad \xrightarrow{z=\lambda} \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - 4\lambda \\ y = \quad\ \ - 7\lambda \\ z = \qquad\ \ \lambda \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \vec{v}_s = (-4\,,-7\,,1)$$

Así, el plano está determinado por el punto $A=(1\,,1\,,2)$ y los vectores de dirección $\vec{v}_r=(-1\,,1\,,2)$ y $\vec{v}_s=(-4\,,-7\,,1)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix}=0 \;\rightarrow\; 15x-7y+11z-30=0$$

EJERCICIO 6 [S/97]

Ante todo, observemos que si la recta está contenida en el plano, su punto $P_r=(1\,,-3\,,2)$ está en el plano y su vector director $\vec{v}_r=(2\,,1\,,3)$ está en la dirección del plano. Así tenemos para el plano:

Punto: $P=(2\,,0\,,1)$.

Vectores directores: $\overrightarrow{PP_r}=(-1\,,-3\,,1)$, $\vec{v}_r=(2\,,1\,,3)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

Desarrollando y simplificando:

$$-10x+5y+5z+15=0 \rightarrow -2x+y+z+3=0$$

EJERCICIO 7 [S/97]

Pasamos la recta a paramétricas y así observamos fácilmente un punto y un vector director de ella:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ z-1=0 \end{array}\right. \quad \xrightarrow{y=\lambda} \quad s:\left\{\begin{array}{ll} x= & -\lambda \\ y= & \lambda \\ z=1 & \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad P_r=(0\,,0\,,1)\;\;,\;\vec{v}_r=(-1\,,1\,,0)$$

Así para el plano solicitado tenemos

Punto: $P=(1\,,0\,,-1)$.

Vectores directores: $\overrightarrow{PP_r}=(-1\,,0\,,2)\;\;,\;\vec{v}_r=(-1\,,1\,,0)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \;\rightarrow\; -2x-2y-z+1=0$$

EJERCICIO 8 [S/98]

Los tres puntos están alineados precisamente cuando los vectores $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}$ son dependientes (sus componentes son proporcionales):

$$\frac{2}{-1}=\frac{\alpha}{0}=\frac{\beta-1}{-2} \;\rightarrow\; \alpha=0\;,\;\beta=5$$

EJERCICIO 9 [S/98]

El sistema deberá ser compatible indeterminado con solución dependiente de un parámetro (la recta intersección). La matriz ampliada del sistema es:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & a & 1\\ 2 & 1 & a & 0\\ 3 & 3 & -2 & 1\end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1=\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ 2 & 1 & a\\ 3 & 3 & -2\end{vmatrix}=6a+6\ ,\ \Delta_3^2=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$$

Veamos cuándo es cero la matriz de determinantes:

$$\det(C)=6a+6=0\ \rightarrow\ a=-1$$

<u>Caso 1</u>: $a\neq -1$.

Como $\det(C)\neq 0$:

$$\mathrm{rg}(C)=\mathrm{rg}(A)=3$$

S es compatible determinado y, por consiguiente, los planos son secantes en un punto.

<u>Caso 2</u>: $a=-1$.

Aquí tenemos

$$\mathrm{rg}(C)=\mathrm{rg}(A)=2<3$$

S es compatible indeterminado con $3-2=1$ parámetro y, por ello, los tres planos son secantes en una recta

EJERCICIO 10 [S/98]

Pasamos las rectas a paramétricas y así observamos fácilmente un punto y un vector director de ellas:

$$r:\left\{\begin{array}{r}x+y+1=0\\ 2x-y+z=0\end{array}\right. \xrightarrow{y=\lambda} r:\left\{\begin{array}{l}x=\ \ 1-\ \lambda\\ y=\qquad\ \lambda\\ z=-2+3\lambda\end{array}\right. \rightarrow\quad P_r=(1\,,0\,,-2)\ ,\ \vec{v}_r=(-1\,,1\,,3)$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}3x-2y=3\\ 2x+\ \ y=0\end{array}\right. \xrightarrow{z=\lambda} r:\left\{\begin{array}{l}x=\ \ 3/7\\ y=-6/7\\ z=\qquad\lambda\end{array}\right. \rightarrow\quad \vec{v}_s=(0\,,0\,,1)$$

Como el plano contiene a la recta, es P_r un punto y $\vec{v}_r$ un vector director del plano. Y al ser s paralela también es $\vec{v}_s$ un vector director para el plano. Así, tenemos

Punto: $P_r=(1\,,0\,,-2)$.

Vectores directores: $\vec{v}_r=(-1\,,1\,,3)\ ,\ \vec{v}_s=(0\,,0\,,1)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & y & z+2\\ -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\ \rightarrow\ x+y-1=0$$

EJERCICIO 11 [S/98]

1) El sistema deberá ser compatible indeterminado con solución dependiente de un parámetro (la recta intersección). La matriz ampliada del sistema es:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & m & -2m \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & m \end{vmatrix} = -m+1 \,,\; \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & -2m \end{vmatrix} = 2m-2$$

Es fácil observar que los dos orlados son cero cuando $m = 1$. Así, distinguimos

Caso 1: $m \neq 1$.

Como $\det(C) \neq 0$:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado y, por consiguiente, los planos son secantes en un punto.

Caso 2: $m = 1$.

Aquí tenemos

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro y, por consiguiente, los tres planos son secantes en una recta

2) De nuevo la ecuación de un plano que contiene a una recta y pasa por un punto. Obtengamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta resolviendo el sistema para $m = 1$.

$$r : \left\{ \begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 8 \end{array} \right. \xrightarrow{z=\lambda} \left\{ \begin{array}{l} x = -\;5 \\ y = -13 + \lambda \\ z = \qquad\;\; \lambda \end{array} \right. \quad \to \quad P_r = (-5\,, -13\,, 0) \;,\; \vec{v}_r = (0\,,1\,,1)$$

Ante todo, observemos que si la recta está contenida en el plano, su punto P_r está en el plano y su vector director $\vec{v}_r$ está en la dirección del plano. Así tenemos para el plano:

Punto: $P = (2\,,1\,,3)$.

Vectores directores: $\vec{v}_r = (0\,,1\,,1)$, $\overrightarrow{P_rP} = (7\,,14\,,3)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 14 & 3 \end{vmatrix} = 0 \;\to\; -11x + 7y - 7z + 36 = 0$$

EJERCICIO 12 [S/98]

Averigüemos razonadamente si el punto $P=(2\,,2\,,1)$ se encuentra o no entre los planos:

$$\pi_1 : x-2y+z+3=0 \quad , \quad \pi_2 : x-2y+z-4=0$$

Tomamos el punto $P_1=(-3\,,0\,,0)$ de π_1 y lo sustituimos en π_2:

$$P_1 \;\mapsto\; \pi_2 : -3-2\cdot 0+0-4=-7<0$$

Tomamos el punto $P_2=(4\,,0\,,0)$ de π_2 y lo sustituimos en π_1:

$$P_2 \;\mapsto\; \pi_1 : 4-2\cdot 0+0+3=7>0$$

Así, los puntos que están entre ambos planos son los que verifican

$$x-2y+z+3<0 \quad \text{y} \quad x-2y+z-4>0$$

Es fácil observar que $P=(2\,,2\,,1)$ cumple ambas condiciones, de donde concluimos que dicho punto está entre los dos planos.

EJERCICIO 13 [S/99]

Es evidente que la trayectoria del objeto es la recta

$$r:\begin{cases} x=2+\;\;t \\ y=1+2t \\ z=2-\;\;t \end{cases}$$

Corte con el eje XY:

$$z=0 \xrightarrow{z=2-t} 2-t=0 \to t=2 \overset{r}{\mapsto} P\,(4\,,5\,,0)$$

Corte con el eje XZ:

$$y=0 \xrightarrow{y=1+2t} 1+2t=0 \to t=-0.5 \overset{r}{\mapsto} Q\,(1.5\,,0\,,2.5)$$

Corte con el eje YZ:

$$x=0 \xrightarrow{x=2+t} 2+t=0 \to t=-2 \overset{r}{\mapsto} R\,(0\,,-3\,,4)$$

EJERCICIO 14 [S/99]

Una forma rápida es usar la condición de paralelismo entre recta y plano, que en nuestro caso queda:

$$av_1+bv_2+cv_3=3\cdot 2+(-2)\cdot(-1)+(-6)\cdot 1=6+2-6\neq 0$$

Así, la recta y el plano son secantes (no son paralelos)

EJERCICIO 15 [S/99]

Deben cumplirse dos condiciones:

Condición de paralelismo: $av_1+bv_2+cv_3=0 \to 4a-8-4=0 \to a=3.$

Cualquier punto de r está en π: $P_r=(3\,,1\,,-3)\in\pi \to 3\cdot 3+2\cdot 1-4\cdot(-3)+b=0 \to b=23.$

EJERCICIO 16 [S/99]

Llamemos t a la recta que pasa por P y que corta a las rectas r y s.

Como la recta t pasa por P y es secante con r está en el plano determinado por el punto P y la recta r.

Como la recta t pasa por P y es secante con s está en el plano determinado por el punto P y la recta s.

Así la recta t es la intersección de los dos planos anteriores.

Pasamos la recta s a paramétricas antes de comenzar:

$$s : \left\{ \begin{array}{r} 2x + 6y = -2 \\ y = -2z \end{array} \right. \xrightarrow{z=\lambda} \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - 6\lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = \qquad \lambda \end{array} \right. \rightarrow \quad P_s = (-1\,,0\,,0)\ ,\ \vec{v}_s = (-6\,,-2\,,1)$$

Plano π_1 que pasa por P y contiene a r:

Punto: $P = (-1\,,0\,,2)$ ó $P_r = (0\,,-2\,,0)$.

Vectores directores: $\vec{v}_r = (3\,,1\,,1)\ ,\ \overrightarrow{PP_r} = (-1\,,-2\,,-2)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{simplificando} y - z = -2$$

Plano π_2 que pasa por P y por la recta s:

Punto: $P = (-1\,,0\,,2)$ ó $P_s = (-1\,,0\,,0)$.

Vectores directores: $\vec{v}_s = (-6\,,-2\,,1)\ ,\ \overrightarrow{PP_s} = (-2\,,0\,,-2)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -6 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{simplificando} 2x - 7y - 2z = -2$$

La recta pedida es:

$$t : \left\{ \begin{array}{r} y - \quad z = -2 \\ 2x - 7y - 2z = -2 \end{array} \right.$$

EJERCICIO 17 [S/99]

Es fácil observar que M no es el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Así que A y B forman un lado. Llamemos A' al vértice diagonalmente opuesto de A y B' al de B.

Se tiene:

$$\frac{A + A'}{2} = M \rightarrow A' = 2M - A = (3\,,6\,,8) - (1\,,2\,,3) \rightarrow A' = (2\,,4\,,5)$$

$$\frac{B + B'}{2} = M \rightarrow A' = 2M - B = (3\,,6\,,8) - (3\,,2\,,5) \rightarrow B' = (0\,,4\,,3)$$

EJERCICIO 18 [S/01]

La recta r es la intersección de ambos planos es:

$$r:\begin{cases} ax+\ \ y-\ \ 7z=-5 \\ \ \ x+2y+a^2z=\ \ \ 8 \end{cases}$$

Si $A=(0\,,2\,,1)$ está en la recta verifica ambas ecuaciones. Al sustituir obtenemos que debe ser:

$$r:\begin{cases} -5=-5 \\ 4+a^2=8 \rightarrow a=\pm 2 \end{cases}$$

Si es $a=2$ al sustituir $B=(6\,,-3\,,2)$ en ambos obtenemos:

$$r:\begin{cases} 12-3-14=-5 \\ 6-6+8=8 \end{cases} \rightarrow B\in r$$

Si es $a=-2$ al sustituir $B=(6\,,-3\,,2)$ en ambos obtenemos:

$$r:\begin{cases} -12-3-14\neq -5 \\ 6-6+8=8 \end{cases} \rightarrow B\notin r$$

Concluimos así que debe ser $a=-2$ para que A esté en r pero B no.

EJERCICIO 19 [S/01]

Consideremos primero el sistema formado por los dos primeros:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$$

Es evidente que $\mathrm{rg}(C)=\mathrm{rg}(A)=2<3$ de donde tenemos que es compatible indeterminado con $3-2=1$ parámetro. Esto quiere decir que son dos planos secantes en una recta.

Consideremos ahora el sistema formado por los tres planos ahora. La matriz ampliada del sistema es

$$A=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0\ ,\ \Delta_3^2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}\neq 0$$

Aquí tenemos

$$\mathrm{rg}(C)=2\neq \mathrm{rg}(A)=3$$

S es incompatible, lo que viene a decir que los tres planos no tienen ningún punto en común.

EJERCICIO 20 [S/02]

a) Si el plano π contiene a los puntos A y B y no corta a la recta CD, tenemos que la recta AB está contenida en el plano y la recta CD es paralela al plano.

Punto: $A = (1\,,1\,,1)$.

Vectores directores: $\overrightarrow{AB} = (1\,,1\,,1)$, $\overrightarrow{CD} = (0\,,-1\,,0)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{simplificando} x - z = 0$$

b) Calculemos los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$:

$M = \dfrac{A+B}{2} \to M = \left(\dfrac{3}{2}\,,\dfrac{3}{2}\,,\dfrac{3}{2}\right)$

$N = \dfrac{C+D}{2} \to N = \left(1\,,\dfrac{1}{2}\,,0\right)$

La recta que pasa por ellos tiene como vector director $\overrightarrow{MN} = \left(-\dfrac{1}{2}\,,-\dfrac{2}{2}\,,-\dfrac{3}{2}\right)$, así es:

$$MN : \frac{x-1.5}{1} = \frac{y-1.5}{2} = \frac{z-1.5}{3}$$

EJERCICIO 21 [S/02]

El plano π_1 será

$$3x - y + 2z = d$$

Como pasa por el punto $P = (1\,,-2\,,2)$:

$$P = (1\,,-2\,,2) \;\mapsto\; \pi_1 : 3 + 2 + 4 = d \;\to\; d = 9$$

Quedando:

$$3x - y + 2z = 9$$

EJERCICIO 22 [S/02]

Hallamos primero la intersección de la recta $s : \dfrac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ con el plano $\pi : x + y - z = 6$ y pasamos la recta r a paramétricas:

$$P_s = (3\lambda\,,2+\lambda\,,-1+\lambda) \;\mapsto\; \pi : 3\lambda + 2 + \lambda + 1 - \lambda = 6 \;\to\; \lambda = 1 \;\mapsto\; P_s = (3\,,3\,,0)$$

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + y & = & 4 \\ 4x - 3y + z & = & 1 \end{array} \right. \xrightarrow{x=\mu} \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = 4 - 3\mu \\ z = 13 - 13\mu \end{array} \right. \to \vec{v}_r = (1\,,-3\,,-13)$$

Así, la recta que pasa por el punto de intersección y es paralela a r tiene de ecuación:

$$t : \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{-13}$$

EJERCICIO 23 [S/02]

Sabiendo que las rectas siguientes se cortan, determina a y el punto de corte.

$$r:\left\{\begin{array}{lcl} x+y-z & = & 1 \\ x-y & = & 2 \end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{lcl} x-2y-z & = & a \\ 2x \qquad +z & = & a \end{array}\right.$$

Pasamos r a paramétricas haciendo $x=\lambda$ y sustituimos en s:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=\qquad \lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=-3+2\lambda \end{array}\right. \quad \mapsto \quad s:\left\{\begin{array}{l} \lambda-2(-2+\lambda)-(-3+2\lambda)=a \\ 2\lambda-3+2\lambda=a \end{array}\right.$$

Igualando éstas últimas: $-3\lambda+7=4\lambda-3 \;\rightarrow\; \lambda=\dfrac{10}{7}.$

Sustituyendo sacamos a: $4\cdot\dfrac{10}{7}-3=a \;\rightarrow\; a=\dfrac{19}{7}.$

El punto intersección es: $\lambda=\dfrac{10}{7} \;\mapsto\; r:(x\,,y\,,z)=\left(\dfrac{10}{7}\,,-\dfrac{4}{7}\,,-\dfrac{1}{7}\right).$

EJERCICIO 24 [S/02]

Pasemos primero la recta r a paramétricas:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x \quad + z=a \\ \quad y-az=1 \end{array}\right. \quad \xrightarrow{x=\lambda} \quad \left\{\begin{array}{l} x=a-\lambda \\ y=1+a\lambda \\ z=\qquad\lambda \end{array}\right.$$

Deben cumplirse dos condiciones:

Condición de paralelismo: $av_1+bv_2+cv_3=0 \rightarrow -2-a+0=0 \rightarrow a=-2.$

Cualquier punto de r está en π: $P_r=(a\,,1\,,0) \;\mapsto\; \pi:2a-1=b \;\xrightarrow{a=-2}\; b=-5.$

EJERCICIO 25 [S/03]

Si son vértices consecutivos entonces:

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD} \;\Rightarrow\; D-C=A-B \;\Rightarrow\; D=C+A-B$$

Operando:

$$D=(-9\,,-1\,,3)$$

EJERCICIO 26 [S/03]

$$r:\left\{\begin{array}{lcl} x+\;y+z & = & -2 \\ 2x-2y+z & = & -1 \end{array}\right\} \quad \xrightarrow{y=\lambda} \quad \left\{\begin{array}{l} x=\;1+3\lambda \\ y=\qquad\lambda \\ z=-3-4\lambda \end{array}\right.$$

Como la recta está contenida en el plano, tenemos para éste:

Punto: $P=(-2\,,3\,,0)$ ó $P_r=(1\,,0\,,-3)$.

Vectores directores: $\vec{v}_r=(3\,,1\,,-4)$, $\overrightarrow{PP_r}=(3\,,-3\,,-3)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z \\ 3 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & -3 \end{vmatrix}=0 \;\rightarrow\; 5x+y+4z+7=0$$

EJERCICIO 27 [S/03]

Hallamos la ecuación general del plano:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \;\rightarrow\; x-y=0$$

Sustituyendo un punto genérico de la recta en el ésta:

$$P_r=(t\,,t\,,0) \;\mapsto\; \pi: t-t=0 \;\rightarrow 0\cdot t=0 \;\rightarrow t \;\text{ cualquiera}$$

Concluimos que la recta está contenida en el plano.

EJERCICIO 28 [S/03]

Pasamos primero la recta cortada, que llamaremos s, a paramétricas:

$$s:\left\{\begin{array}{l} x \quad\;\; +z=4 \\ x-2y+z=1 \end{array}\right. \quad \xrightarrow{x=\lambda} \quad \left\{\begin{array}{l} x=4-\lambda \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=\qquad \lambda \end{array}\right.$$

Método 1 (punto genérico): desarrollado

Llamemos r a la recta pedida: pasa por $(3\,,1\,,-1)$ y corta a s en un punto desconocido $P_s=\left(4-\lambda\,,\dfrac{3}{2}\,,\lambda\right)$.

Como r es paralela al plano $3x-y+z=4$ y $\overrightarrow{AP_s}=(1-\lambda\,,0.5\,,\lambda+1)$ es un vector director de ella, por la condición de paralelismo entre recta y plano:

$$3\cdot(1-\lambda\ )-0.5+\lambda+1=0 \rightarrow \lambda=1.75$$

Así, r pasa por $(3\,,1\,,-1)$ y tiene como vector director a $(-0.75\,,0.5\,,2.75)$:

$$r:\frac{x-3}{-0.75}=\frac{y-1}{0.5}=\frac{z+1}{2.75}$$

Método 2 (constructivo): sólo esbozado

En primer lugar obtenemos el plano π' paralelo a π por el punto $A=(3\,,1\,,-1)$.

En segundo lugar hallamos el punto intersección, que llamamos B, de π' con la recta s.

La recta que pasa por A, corta a s y es paralela a π es la recta AB.

EJERCICIO 29 [S/03]

Usaremos la ecuación segmentaria

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

con $a=b=c=4$:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1 \to x+y+z=4$$

EJERCICIO 30 [S/03]

Método 1 (Discusión de sistema)

Unamos la ecuación del plano con las dos ecuaciones que determinan la recta. El sistema deberá ser compatible indeterminado con solución dependiente de un parámetro (la propia recta r). La matriz ampliada del sistema es:

$$S:\left\{\begin{array}{rcr} x-2y & = & -1 \\ x-3y+\ \ z & = & 0 \\ x-\ \ y+az & = & -2 \end{array}\right\} \to A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a & -2 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -a \end{vmatrix}=-a-1\ ,\ \Delta_3^2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

<u>Caso 1</u>: $a\neq -1$.

Como $\det(C)\neq 0$:

$$\text{rg}(C)=\text{rg}(A)=3$$

S es compatible determinado y, por consiguiente, los planos son secantes en un punto.

<u>Caso 2</u>: $a=-1$.

Aquí tenemos

$$\text{rg}(C)=\text{rg}(A)=2<3$$

S es compatible indeterminado con $3-2=1$ parámetro y, por consiguiente, la solución del sistema es una recta, luego la recta está contenida en el plano.

Método 2 (Obtención de un punto y sustitución)

En el sistema que determina la recta hacemos $z=1$ y así hallamos un punto, que es

$$P_r=\left(-\frac{5}{2}-\frac{3a}{2},-\frac{1}{2}-\frac{a}{2},1\right)$$

Si la recta está contenida en el plano, ese punto está en el plano y por tanto verifica su ecuación:

$$-\frac{5}{2}-\frac{3a}{2}-2\left(-\frac{1}{2}-\frac{a}{2}\right)+1=0\ \to\ a=-1$$

EJERCICIO 31 [S/04]

Paso1. Expresemos la recta cortada en paramétricas (resolviendo el sistema):

$$r : \begin{cases} x - 2y = \quad -z \\ 2x \qquad = -4 + z \end{cases} \xrightarrow{z=4\lambda} \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \qquad 4\lambda \end{cases}$$

Paso 2. La recta pedida s tiene como vector director (para cierto λ):

$$\left.\begin{array}{l} A\,(0\,,1\,,-1) \\ P_r\,(-2+2\lambda\,,-1+3\lambda\,,4\lambda) \end{array}\right\} \longrightarrow \overrightarrow{AP_r} = (-2+2\lambda\,,-2+3\lambda\,,1+4\lambda)$$

Paso 3. Aplicamos la condición de paralelismo recta-plano ($Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0$):

$$\overrightarrow{AP_r} \parallel \pi \longrightarrow 1\cdot(-2+2\lambda) - 2\cdot(-2+3\lambda) - (1+4\lambda) = 0 \to -8\lambda + 1 = 0 \to \lambda = \frac{1}{8}$$

Paso 4. La ecuación de la recta AP_r es

$$\left.\begin{array}{l} A\,(0\,,1\,,-1) \\ \overrightarrow{AP_r} = \left(-2+\frac{2}{8}\,,-2+\frac{3}{8}\,,1+\frac{4}{8}\right) = \left(-\frac{14}{8}\,,-\frac{13}{8}\,,\frac{12}{8}\right) \end{array}\right\} \longrightarrow s : \frac{x}{-14} = \frac{y-1}{-13} = \frac{z+1}{12}$$

EJERCICIO 32 [S/04]

Paso 1. Pasamos la recta r a paramétricas:

$$r : \begin{cases} x + y = 1 - z \\ \quad y = 1 \end{cases} \xrightarrow{z=t} \begin{cases} x = -t \\ y = \quad 1 \\ z = \quad t \end{cases}$$

Paso 2. Cortamos la recta y el plano (sustituyendo “la recta en el plano”):

$$P_r = (-t\,,1\,,t) \longmapsto \pi : 2\cdot(-t) + \lambda\cdot 1 + (t-2) = 0 \ \to t = \lambda - 2$$

Luego:

$$R\,(2-\lambda\,,2\,,\lambda+8)$$

Paso 3. Tres puntos están alineados si determinan vectores dependientes (proporcionales):

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-6\,,3\,,12) \\ \overrightarrow{PR} = (-4-\lambda\,,2\,,\lambda+8) \end{array}\right\} \longrightarrow \frac{-4-\lambda}{-6} = \frac{2}{3} = \frac{\lambda+8}{12} \quad \longrightarrow \lambda = 0$$

EJERCICIO 33 [S/04]

Paso 1. Un plano paralelo al dado es de la forma:

$$\pi' \equiv 2x + y - z + d = 0$$

Paso 2. El plano anterior contiene a la recta si dos puntos de ella están en el plano. Sustituimos:

$$\lambda = 0 : P = (1\,,1\,,1) \longmapsto \pi : 2 + 1 - 1 + d = 0 \to d = -2$$

$$\lambda = 1 : Q = (2\,,2\,,4) \longmapsto \pi : 4 + 2 - 4 + d = 0 \to d = -2$$

Paso 3: Para $d = -2$ la recta está en plano, así que la ecuación (normal) es:

$$\pi' \equiv 2x + y - z - 2 = 0$$

Paso 4. Sacamos las ecuaciones paramétricas despejando, por ejemplo, z ahí:

$$\pi' : z = 2x + y - 7 \quad \xrightarrow{x=s\,,y=t} \quad \pi' : \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = -7 + 2s + t \end{cases}$$

EJERCICIO 34 [S/04]

Paso 1. Pasamos las rectas a paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = 2 - y \\ 2x + z = 4 - 2y \end{cases} \quad \xrightarrow{y=\lambda} \quad \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \phantom{2-{}} \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = 6 - y \\ x - z = 6 - y \end{cases} \quad \xrightarrow{y=\mu} \quad \begin{cases} x = 6 - \mu \\ y = \phantom{6-{}} \mu \\ z = 0 \end{cases}$$

Paso 2. Son claramente paralelas, así que el cuadrado está en el plano que las contiene.

Paso 3. Ecuación del plano que contiene a las rectas r y s:

Puntos: $P_r = (2\,,0\,,0)$ ó $P_s = (6\,,0\,,0)$

Vectores directores: $\vec{v}_r = (-1\,,1\,,0)$, $\overrightarrow{P_rP_s} = (4\,,0\,,0)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; z = 0$$

EJERCICIO 35 [S/04]

Paso 1. Los puntos son coplanarios pues:

$$\det\left[\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; \text{Son coplanarios}$$

Paso 2. Calculemos la ecuación del plano que los contiene:

Punto: $A = (1\,,2\,,1)$

Vectores directores: $\overrightarrow{AB} = (1\,,1\,,0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1\,,3\,,2)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; 2x - 2y + 4z - 2 = 0 \;\rightarrow\; x - y + 2z - 1 = 0$$