TEMA 6

SISTEMAS DE ECUACIONES

Ejercicios para Selectividad
de
Sistemas de Ecuaciones

Cursos
1996 – 2003

Enunciados

EJERCICIO 1 [S/96]

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & - & z & = & 4 \\ x & + & 2y & - & 2z & = & -1 \\ x & & & - & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

a) ¿Existe una solución del mismo en la que $y = 0$?

b) Resuelve el sistema homogéneo asociado al sistema dado.

c) Haz una interpretación geométrica tanto del sistema dado como de sus soluciones.

EJERCICIO 2 [S/96]

Del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & by & + & 1 & = & 0 \\ a'x & + & b'y & + & c' & = & 0 \end{array}\right\}$$

se sabe que $(x\,,y) = (1\,,2)$ es una solución, y que $(x\,,y) = (7\,,3)$ es otra solución.

¿Qué puede afirmarse respecto de las soluciones del sistema? ¿Cuántas soluciones tiene? ¿Cuáles son?

EJERCICIO 3 [S/96]

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de α no tiene inversa la matriz de los coeficientes?

Discute sus soluciones según los valores del parámetro e interpreta geométricamente el resultado.

EJERCICIO 4 [S/96]

Sean S y S' dos sistemas distintos de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes.

a) Justifica con un ejemplo que S puede ser compatible y S' incompatible.

b) Si los dos son compatibles, ¿puede tener S solución única y S' infinitas soluciones? Justifica la respuesta.

c) ¿Qué puedes decir de un sistema lineal no homogéneo, de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, que al resolverlo mediante el método de Gauss, conduce a la siguiente matriz ampliada?

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

EJERCICIO 5 [S/96]

Consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ ax & & & + & 4z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discute el sistema según los valores del número real a.

b) [1] Resuélvelo para $a = -1$.

EJERCICIO 6 [S/96]

Una ganadera da a su ganado una mezcla de dos tipos de piensos A y B. Un kilo de pienso A proporciona a una res el 6% de sus necesidades diarias de proteínas y el 14% de sus necesidades de carbohidratos. Un kilo del pienso B contiene el 35% del requerimiento diario de proteínas y el 15% de carbohidratos.

Si la ganadera desea que su ganado tenga cubiertas, pero sin excedentes, sus necesidades diarias de proteínas y carbohidratos, ¿cuántos kilos de cada tipo de pienso deberá proporcionar a cada res?

EJERCICIO 7 [S/97]

Escribe cuando sea posible, sistemas de ecuaciones que respondan a las características siguientes:

a) Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga infinitas soluciones..

b) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible y determinado.

c) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que no tenga ninguna solución.

d) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única.

EJERCICIO 8 [S/97]

Del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$$

se conocen todas sus soluciones, que son $(x\,y) = (\lambda\,, 2\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

También se sabe que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resuelve el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 1 \\ a_{21}x + a_{22}y = 2 \end{cases}$$

EJERCICIO 9 [S/97]

Una fabrica de electrodomésticos tiene una producción semanal fija de 42 unidades. La fábrica abastece a tres establecimientos - digamos A, B y C - que demandan toda su producción. En una determinada semana el establecimiento A solicitó tantas unidades como B y C juntos y, por otro lado, B solicitó un 20% más que la suma de la mitad de lo que pidió A más la tercera parte de lo que pidió C. ¿ Cuantas unidades solicitó cada establecimiento dicha semana?

EJERCICIO 10 [S/97]

Sea A la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcr} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & 1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & -1 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & = & 2 \end{array}\right.$$

Resuelve el sistema sabiendo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 11 [S/98]

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k & 3 & -1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de k no tiene inversa la matriz de los coeficientes?

b) Discute el sistema según los valores de k.

EJERCICIO 12 [S/98]

Se sabe que no tiene inversa la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & \alpha \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuánto vale α? Justifica la respuesta.

b) Resuelve el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) ¿Existe alguna solución de dicho sistema con $y = -1$?

EJERCICIO 13 [S/98]

Halla a sabiendo que se cortan en una recta los tres planos cuyas ecuaciones son, respectivamente,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & az & = & 1 \\ 2x & + & y & + & az & = & 0 \\ 3x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right\}$$

EJERCICIO 14 [S/98]

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & - & y & + & mz & = & 2m \end{array}\right\}$$

Determina si existe y, en ese caso, calcula el valor del parámetro m para el que los tres planos determinados por las ecuaciones de sistema se cortan en una línea recta.

EJERCICIO 15 [S/98]

Considera las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

¿Existe algún valor real de λ para el cual el sistema $AX = \lambda X$ tiene solución distinta de la trivial? Si la respuesta es afirmativa, calcula el valor de λ y resuelve el sistema; si es negativa, di por qué.

EJERCICIO 16 [S/99]

a) Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro b

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & bz & = & b^2 \\ -x & + & y & + & z & = & -3 \\ bx & + & y & + & z & = & 3b \end{array}\right\}$$

b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 17 [S/99]

Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 1 \\ & & my & + & z & = & 0 \\ x & + & (1+m)y & + & mz & = & 1+m \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Estudia su comportamiento según los valores del parámetro m .

b) [1] Resuélvelo para $m = 2$.

EJERCICIO 18 [S/99]

En un supermercado se ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de los mismos productos.

- El primer lote está compuesto por una botella de cerveza, tres bolsas de cacahuetes y siete vasos, con un precio de 5.65 Ptas.
- El segundo lote está compuesto por una botella de cerveza, cuatro bolsas de cacahuetes y diez vasos, con un precio de 740 Ptas.

Con estos datos, ¿se podría averiguar cuánto debería valer un lote formado por una botella de cerveza, una bolsa de cacahuetes y un vaso? Justifica la respuesta.

EJERCICIO 19 [S/99]

Una persona trata de adivinar, mediante ciertas pistas, el coste de tres productos A , B y C que un amigo suyo ha comprado:

Pista 1: si compro una unidad de A, dos de B y una de C me gasto 9000 ptas.

Pista 2: Si compro k unidades de A , k+3 de B y 3 de C me gasto 2.950 ptas.

a) ¿Hay algún valor de k para el que estas dos pistas no son compatibles?

b) Si en la pista 2 se toma $k = 4$, ¿ es posible saber el coste de cada uno de los productos?

Pista 3: El amigo le dice finalmente que el producto C vale cinco veces lo que vale el producto A y que en la pista 2 se tiene $k = 4$.

c) ¿Cuánto valen A , B y C ?

EJERCICIO 20 [S/99]

Considera el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -1 \\ 2x & + & 5y & + & 4z & = & -2 \\ x & + & 3y & + & m^2 z & = & m \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m .

b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

c) Razona para qué valores de m tiene inversa la matriz de los coeficientes del sistema.

EJERCICIO 21 [S/00]

Considera el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro b.

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible determinado.

EJERCICIO 22 [S/00]

Un mayorista de café dispone de tres tipos base (Moka, Brasil y Colombia) para preparar tres tipos de mezcla (A, B y C), que envasa en sacos de 60 kg. con los siguientes contenidos en kilos y precios del kilo:

	Mezcla A	Mezcla B	Mezcla C
Moka	15	30	12
Brasil	30	10	18
Colombia	15	20	30
Precio (€/kg.)	4	4.5	4.7

Si preparar las mezclas no supone coste alguno, ¿cuál es el precio de cada uno de los tipos base de café?

EJERCICIO 23 [S/00]

Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores de λ:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & \lambda y & + & z & = & 0 \\ \lambda x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & \lambda z & = & 0 \end{array}\right\}$$

EJERCICIO 24 [S/00]

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & \lambda y & + & (\lambda-1)z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & -3 \end{array}\right\}$$

a) Halla todos los posibles valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene al menos dos soluciones posibles.

b) Resuelve el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior.

c) Discute el sistema para los restantes valores de λ.

EJERCICIO 25 [S/00]

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & + & 2y & & & = & 3 \\ -x & & & + & 2\lambda z & = & -1 \\ 3x & - & y & - & 7z & = & \lambda+1 \end{array}\right\}$$

a) Halla todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.

b) Resuelve el sistema para los valores de λ en el apartado anterior.

c) Discute el sistema para los restantes valores de λ.

EJERCICIO 26 [S/00]

Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & - & 5z & = & 1 \\ 4x & + & y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & - & 3y & + & az & = & b \end{array}\right\}$$

a) Determina a y b sabiendo que el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Resuelve el sistema resultante.

EJERCICIO 27 [S/00]

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa.

b) Tomando $\lambda = 1$, resuelve el sistema escrito en forma matricial:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 28 [S/01]

Considera

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix} \ , \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina el rango de A en función del parámetro a.

b) Discute en función de a el sistema, dado en forma matricial $AX = B$.

c) Resuelve $AX = B$ en los casos en que sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 29 [S/01]

Considera el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & my & + & z & = & 4 \\ x & + & y & + & mz & = & m \end{array}\right\}$$

a) Discútelo según los valores de m.

b) ¿Cuál es, según los valores de m, la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones respectivas son las tres que forman el sistema?

EJERCICIO 30 [S/01]

a) Clasifica el siguiente sistema según los valores del parámetro m:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & my & & & = & 0 \\ x & & & + & mz & = & m \\ x & + & y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right\}$$

b) Resuelve el sistema anterior para $m = 6$.

EJERCICIO 31 [S/01]

Resuelve el sistema de ecuaciones, dado en forma matricial, $AX = -AX + B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \;,\; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 32 [S/02]

En el sector de las aceitunas sin hueso, tres empresas A, B y C se encuentran en competencia. Calcula el precio por unidad dado por cada empresa sabiendo que verifican las siguientes relaciones:

– El precio de la empresa A es 0.6 euros menos que la media de los precios establecidos por B y C.

– El precio de la empresa B es la media de los precios de A y C.

– El precio dado por C es igual a 2 euros más 2/5 del precio dado por A más 1/3 del precio dado por B.

EJERCICIO 33 [S/02]

Sean

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-\alpha & 3 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \;,\; b = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; c = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Determina α, si es posible, para que los sistemas de ecuaciones (dados en forma matricial) $AX = b\,,\; BX = c\,$ tengan infinitas soluciones (cada uno de ellos).

EJERCICIO 34 [S/02]

Considera

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \;,\; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;,\; C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A?

b) Resuelve, para $m = 2$, el sistema de ecuaciones $AX = C$.

EJERCICIO 35 [S/02]

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & my & + & z & = & m \\ 3x & + & 5y & + & mz & = & 5 \end{array}\right\}$$

Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema

a) Tenga una y sólo una solución.

b) Tenga al menos dos soluciones.

c) No tenga solución.

EJERCICIO 36 [S/02]

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcc} x & - & my & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & m+2 \\ x & + & y & + & mz & = & 4 \end{array}\right\}$$

a) Clasifícalo según los valores del parámetro m.

b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 37 [S/03]

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) [1'25] Calcula los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.

b) [1'25] Resuelve el sistema $A \cdot X = 3X$ e interpreta geométricamente el conjunto de todas sus soluciones.

EJERCICIO 38 [S/03]

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcc} x & - & my & + & z & = & -2+2my \\ mx & - & y & + & 4z & = & 5+2z \\ 6x & - & 10y & - & z & = & -1 \end{array}\right\}$$

a) [1'5] Discute las soluciones del sistema según los valores de m .

b) [1] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 39 [S/03]

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix} \; , \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \; , \; C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) [0'75] ¿Para qué valores de m existe la matriz A^{-1}?

b) [1] Siendo $m = 2$, calcula A^{-1} y resuelve el sistema $A \cdot X = B$.

c) [0'75] Resuelve el sistema $A \cdot X = B$ para $m = 1$.

EJERCICIO 40 [S/03]

Determina razonadamente los valores de m para los que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & mx \\ x & + & 2y & + & z & = & my \\ x & + & 2y & + & 4z & = & mz \end{array}\right\}$$

tiene más de una solución.

EJERCICIO 41 [S/03]

Una empresa cinematográfica dispone de tres salas (A , B y C). Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la primera sala hubieran asistido a la segunda y los de la segunda a la primera, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.