TEMA 5

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicios para Selectividad
de
Matrices y Determinantes

Cursos
1996 – 2003

©José Álvarez Fajardo bajo una licencia Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 2.5 Spain de Creative Commons

Enunciados

EJERCICIO 1 [S/96]

Consideremos la relación

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina una matriz X que la verifique.

b) Calcula el determinante de la matriz X hallada.

EJERCICIO 2 [S/96]

Dado $x \in \mathbb{R}$, considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$$

a) Calcula $A \cdot A^t$.

b) Prueba que A tiene inversa y hállala.

EJERCICIO 3 [S/96]

a) Sean A y B dos matrices cuadradas invertibles del mismo orden. Razona si $A \cdot B$ también tiene inversa.

b) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Determina si $C \cdot D$ tiene inversa y, en ese caso, hállala.

EJERCICIO 4 [S/96]

a) Si A y B son dos matrices cuadradas y del mismo orden, razona si es cierta en general la siguiente relación:

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$

b) Calcula, según los valores de a el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5 [S/97]

Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0$$

EJERCICIO 6 [S/97]

a) ¿Qué condición debe cumplir el determinante de una matriz cuadrada para que ésta sea invertible?

b) Estudia si hay algún valor de a para el que la siguiente matriz tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3-2a \\ 1 & a+1 & a-5 \\ 3 & 3a+1 & 1-3a \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 7 [S/97]

Sabiendo que la matriz A verifica la relación

$$A + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

resuelve el sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 8 [S/97]

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que se verifica $A^2 - 2A + I = O$.

b) Usando la igualdad anterior, calcula razonadamente A^{-1} y A^2.

EJERCICIO 9 [S/97]

Sin desarrollar el determinante, demuestra la siguiente igualdad, enunciando las propiedades que utilices.

$$\begin{vmatrix} a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \\ a & a+b & a+2b \end{vmatrix} = 9b^2(a+b)$$

EJERCICIO 10 [S/97]

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro b no tiene inversa la matriz A? Justifica la respuesta

b) Si existe, calcula la inversa para $b = -1$.

EJERCICIO 11 [S/97]

Resuelve la ecuación matricial $AX + 2B = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 12 [S/97]

Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

calcula razonadamente y sin desarrollar

$$\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 5/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 13 [S/97]

Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2 tales que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene A inversa? Justifica la respuesta y si la respuesta es afirmativa indica cuál es dicha inversa.

b) ¿Es cierto que $A \cdot B = B \cdot A$ en este caso?

EJERCICIO 14 [S/98]

Sea A una matriz no nula dada y considera la ecuación matricial $AX = A + X$, donde X es la incógnita.

1) Encuentra razonadamente la relación que debe existir entre las dimensiones de A y de X.

2) ¿Puede ser la suma de dos soluciones una nueva solución? ¿Y el producto de un número por una solución? Justifica la respuesta.

3) Si $A = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y buscamos una solución de la forma $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, discute la ecuación matricial que resulta y resuélvela cuando sea posible.

EJERCICIO 15 [S/98]

1) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ calcula la matriz X que cumple

$$X + (AB)^t = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 16 [S/99]

Sea C la matriz, que depende del parámetro m:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro m no tiene inversa la matriz C?

b) Calcula la matriz inversa de C para $m = 2$.

EJERCICIO 17 [S/99]

Consideremos el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$$

a) Comprueba, sin desarrollarlo, que su valor vale cero para $a = 3$ e indicando las propiedades que se apliquen

b) Determina todos los valores a para los que las tres columnas del determinante anterior son linealmente independientes. Justifica la respuesta.

EJERCICIO 18 [S/99]

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$$

donde a , b , c son no nulos.

a) Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.

b) Calcula el rango de A y razona si dicha matriz tiene inversa.

EJERCICIO 19 [S/99]

Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal cuando coinciden su inversa y su traspuesta. Para cada número real x sea B la matriz

$$B = \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es ortogonal la matriz B?

b) ¿Es B^2 ortogonal?

EJERCICIO 20 [S/99]

La matriz cuadrada X de orden 3 verifica la relación

$$X^3 + X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determina, si es posible, el rango de X.

b) Estudia si las matrices A y B verifican esa relación, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; , \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 21 [S/99]

Se dice que dos matrices A y B son semejantes cuando existe una matriz P invertible tal que $AP = PB$.

a) Prueba que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ son semejantes.

b) Resuelve los sistemas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 22 [S/00]

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

calcula $(A^t A^{-1})^2 A$.

EJERCICIO 23 [S/00]

Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

calcula los siguientes determinantes y enuncia las propiedades que utilices:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} \; , \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 24 [S/00]

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 3 \\ 4 & 1 & -b \end{pmatrix}$$

a) Determina para qué valores de b existe A^{-1}.

b) Calcula A^{-1} para $b = 2$.

EJERCICIO 25 [S/00]

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores de x e y tales que $AX = U$.

b) Halla la matriz A^{-1} y calcula $A^{-1}U$

c) Encuentra los valores de m para los que los vectores

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes.

EJERCICIO 26 [S/01]

Sea

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de x existe la inversa de A? Calcula dicha matriz inversa.

EJERCICIO 27 [S/01]

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Prueba que $A^3 + \mathrm{I} = \mathrm{O}$.

b) Calcula A^{10}.

EJERCICIO 28 [S/00]

Resuelve la ecuación matricial $A^2X = 2B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 29 [S/01]

Determina $a\,,b\,,c$ sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}$ verifica $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{rg}(A) = 2$

EJERCICIO 30 [S/01]

De las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determina cuáles tienen inversa y en los casos en que exista, calcúlala.

EJERCICIO 31 [S/01]

Se sabe que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$$

verifica que $\det(A) = 1$ y sus columnas son vectores perpendiculares dos a dos.

(a) Calcula los valores de a y b.

(b) Comprueba que para dichos valores se verifica que $A^{-1} = A^t$.

EJERCICIO 32 [S/01]

Determina la matriz X tal que

$$AX - 3B = \mathrm{O}$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 33 [S/01]

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula el determinante de las matrices: $2A$, A^{31} y $(A^{31})^{-1}$.

(b) Halla la matriz A^{-1}.

EJERCICIO 34 [S/01]

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determina para que valores del parámetro λ la matriz A no tiene inversa.

(b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda = -2$.

EJERCICIO 35 [S/02]

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla los valores de t para los que es $\det A > 0$ y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

EJERCICIO 36 [S/02]

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores de para los que la matriz $3A$ tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, la inversa de la matriz A^2 para $\alpha = 0$.

EJERCICIO 37 [S/02]

Determina una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que $\det(A) = -7$ y

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 38 [S/02]

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz inversa de A .

b) Calcula A^{127} y A^{128}.

c) Determina x e y tal que $AB = BA$.

EJERCICIO 39 [S/02]

Determina la matriz X que verifica la ecuación $AX = X - B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 40 [S/02]

Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \;,\; C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $(AB)^t$ y $(BA)^t$.

b) Determina una matriz X que verifique la relación $\frac{1}{2}X + (AB)^t = C$.

EJERCICIO 41 [S/02]

Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz siguiente, enunciando las propiedades usadas

$$\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 42 [S/03]

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de m tiene solución la ecuación matricial $A \cdot X + 2B = 3C$?

b) Resuelve la ecuación matricial dada para $m = 1$.

EJERCICIO 43 [S/03]

Halla la matriz X que cumple $A \cdot X = (B \cdot A^t)^t$ donde son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 44 [S/03]

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, la inversa de A para $m = 2$.

EJERCICIO 45 [S/03]

a) El determinante de una matriz cuadrada A de orden 3 vale –2. ¿Cuál es el valor del determinante de la matriz $4A$?

b) Halla los valores de λ para los que la matriz $3B + B^2$ no tiene inversa, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 46 [S/03]

Sean C_1, C_2, C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) Los determinantes de A^{-1}, A^3 y de $2A$.

b) El determinante de la matriz cuyas respectivas columnas son $3C_1 - C_3, 2C_3, C_2$.

EJERCICIO 47 [S/03]

Considera la siguiente matriz, en la que x es un número real:

$$M(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de x existe $M(x)^{-1}$? Para los valores de x obtenidos obtenidos, calcula $M(x)^{-1}$.

b) Resuelve, si es posible, la ecuación $M(2) \cdot M(x) = M(5)$.