

Ejercicios para Selectividad
de
Integral definida

Cursos
1996 – 2003



Enunciados

EJERCICIO 1 [S/96]

De una función integrable $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que para cada x en dicho intervalo se tiene $|f(x)| \leq 1 + x^2$.

De los números $-3, -2, -1, 2.5$ y 2.75 , justifica cuáles pueden ser el valor de la integral

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

EJERCICIO 2 [S/96]

Las coordenadas (a, b) del centro de gravedad de una lámina de densidad uniforme que está limitada por la curva $y = \sin x$ y la porción del eje OX comprendida entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$, vienen dadas por:

$$a = \frac{\int_0^{\pi/2} x \sin x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin x dx}, \quad b = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx}{2 \int_0^{\pi/2} \sin x dx}$$

a) [1] Describe el método de integración por partes.

b) [1,5] Utiliza dicho método para calcular dicho centro de gravedad, sabiendo que $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}$

EJERCICIO 3 [S/96]

Si una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, se llama valor medio de f en el intervalo $[a, b]$ al número

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Para hacer un estudio sobre la capacidad de memorizar de un niño se utiliza el siguiente modelo: si x es su edad en años, entonces su capacidad de memorizar viene dada por

$$f(x) = 1 + 2x \ln(x) \quad (0 \leq x \leq 5)$$

a) [1] Describe el método de integración por partes.

b) [1,5] Encuentra el valor medio de la capacidad de memorizar de un niño entre su primer y su tercer cumpleaños.

EJERCICIO 4 [S/96]

Sabiendo que

$$\int_1^5 f(x) dx = \int_1^5 g dx = \int_1^3 f dx = \int_3^5 g dx = 3$$

calcula

$$\int_3^5 (f(x) + 3g(x)) dx - \int_1^3 (3f(x) + g(x)) dx$$

EJERCICIO 5 [S/96]

Un objeto se mueve a lo largo de una línea recta debido a la acción de una fuerza F que depende continuamente de la posición x del objeto en dicha línea recta. Se sabe que el trabajo realizado por la fuerza para mover el objeto desde $x = a$ hasta $x = b$ viene dado por

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

- a) [1,5] Si la fuerza es $F(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$, calcula el trabajo para ir desde $x = 3$ hasta $x = 5$.
- b) [1] Determina razonadamente si la fuerza $G(x) = \frac{2}{(x^2+1)^2}$ realiza más o menos trabajo que la fuerza F anterior para el mismo desplazamiento.

EJERCICIO 6 [S/96]

Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 4} \quad (x \neq \pm 2)$$

- a) [1] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- b) [1,5] Teniendo en cuenta cómo es la función en el intervalo $[3, 4]$ demuestra, sin calcular la integral, que se cumple

$$\frac{1}{4} \leq \int_3^4 f(x) dx \leq \frac{3}{5}$$

EJERCICIO 7 [S/96]

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función polinómica definida por

$$f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 80$$

- a) [1] Determina el intervalo $[a, b]$ en el que f es creciente.
- b) [1,5] Calcula el área de la región limitada por la parte de la gráfica de f correspondiente al intervalo anterior $[a, b]$, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$.

EJERCICIO 8 [S/97]

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = e^{x-1}$$

- a) De todas tangentes a la gráfica de la función, halla la que pasa por el origen de coordenadas.
- b) Dibuja la región limitada por la gráfica de f , la recta tangente hallada en el punto anterior y el eje de ordenadas.
- c) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

EJERCICIO 9 [S/97]

- Halla el punto de inflexión de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot e^{-x}$.
- Dibuja la región limitada por la gráfica de f , el eje OX y la recta $x = b$ donde b es la abscisa del punto de inflexión hallado en el apartado anterior.
- Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior

EJERCICIO 10 [S/97]

- Dibuja la región limitada por la recta de ecuación $y = 3$ y las gráficas de las funciones f y g definidas en todo \mathbb{R} por

$$f(x) = 3x^2 \quad , \quad g(x) = 1 - x^2.$$

- Calcula el área de dicha región.

EJERCICIO 11 [S/97]

- Describe el método de integración por partes.
- Calcula

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx$$

EJERCICIO 12 [S/97]

- Dibuja la región limitada por las curvas de ecuaciones

$$y^2 = x \quad , \quad y = |x - 2|$$

- Calcula el área de dicha región.

EJERCICIO 13 [S/97]

- Define el concepto de derivada de una función en un punto
- Estudia la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| e^x$.
- Siendo f la función dada en el apartado anterior, calcula

$$\int_0^1 f(x) dx$$

EJERCICIO 14 [S/97]

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x - 2) e^x$.

- Determina los intervalos en los que la función f es creciente
- Dibuja la región limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x = 1$ y $x = 3$.
- Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

EJERCICIO 15 [S/97]

Considera la función valor absoluto, es decir, la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$.

- Estudia la derivabilidad de f .
- Dibuja la gráfica de f .
- Halla $\int_{-2}^2 f(x) dx$

EJERCICIO 16 [S/97]

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^x \operatorname{sen}(2x)$$

- Si es $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

¿Qué dice el teorema fundamental del cálculo integral sobre la función F ?

- Halla $F(\pi)$.

EJERCICIO 17 [S/97]

Consideremos las curvas cuyas ecuaciones son

$$y = x - x^2, \quad y = x^4 - x^2$$

- Dibuja el recinto limitado por ellas.
- Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

EJERCICIO 18 [S/98]

- Representa las curvas de ecuaciones siguientes, calculando dónde se cortan:

$$y = x^2 - 3x + 3, \quad y = x$$

- Halla el área del recinto limitado por dichas curvas.

EJERCICIO 19 [S/98]

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4}$$

- Dibuja el recinto limitado por la gráfica de la función f y sus tangentes en los puntos de abscisa $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$.
- Prueba que el eje de ordenadas divide el recinto anterior en dos que tienen igual área.

EJERCICIO 20 [S/98]

Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \\ cx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

es derivable en todo su dominio y que en los puntos $x = 0$ y $x = 4$ toma el mismo valor.

- 1) Halla a , b y c .
- 2) Calcula $\int_0^2 f(x) dx$

EJERCICIO 21 [S/98]

- 1) Halla el área del triángulo formado por el eje OX y las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $y = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.
- 2) Halla el área de la región limitada por la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y el eje OX para los valores $-1 \leq x \leq 0$.

EJERCICIO 22 [S/98]

- 1) Calcula los extremos relativos y absolutos de la función $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 6x^2 + 49$.
- 2) Sea β el punto en el que f alcanza su máximo absoluto. Calcula $\int_{-7}^{\beta} f(x) dx$.

EJERCICIO 23 [S/98]

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x + 1|$.

- 1) Representala gráficamente
- 2) Estudia su derivabilidad
- 3) Calcula $\int_{-2}^3 f(x) dx$

EJERCICIO 24 [S/99]

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x \operatorname{sen} x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) Estudia la derivabilidad de f .
- b) Calcula

$$\int_{-1}^{\pi/2} 2f(x) dx$$

EJERCICIO 25 [S/99]

Dibuja y calcula el área del recinto limitado por la recta $y + x = 0$ y la curva de ecuación $y = x^2 + 4x + 4$.

EJERCICIO 26 [S/99]

De las funciones continuas $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que

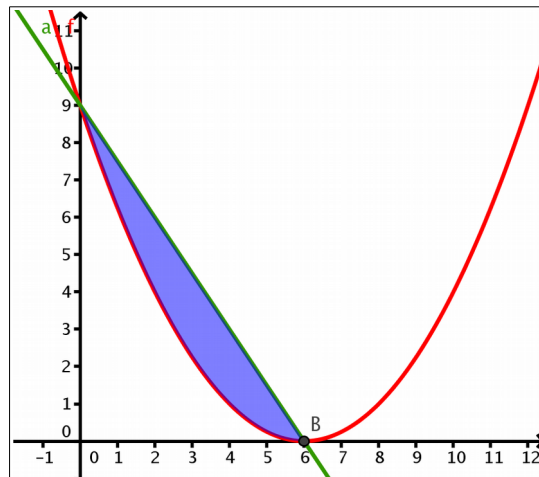
$$\int_1^2 (f + g) = 3, \int_2^3 3(f - g) = 3, \int_1^3 f = 3, \int_1^2 2f = 3$$

Calcula, si es posible:

$$\int_1^3 g(x) dx$$

EJERCICIO 27 [S/99]

La gráfica de la función f de la figura corresponde a una función polinómica de grado 2.



- a) Determina una expresión algebraica de la función f .
- b) Calcula el área de la región sombreada.

EJERCICIO 28 [S/99]

Haciendo el cambio de variable $t = e^x$ calcula

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$$

EJERCICIO 29 [S/99]

Dibuja y calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3 - 2x$$

EJERCICIO 30 [S/99]

- a) [1] Dibuja la región limitada por la gráfica de la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(1 + x)$, la recta tangente a su gráfica en el origen y la recta $x = 1$.
- b) [1'5] Halla el área de dicha región.

EJERCICIO 31 [S/99]

Dibuja y calcula el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = \frac{1}{1+x^2}$ y las rectas de ecuaciones $x = 1$ e $y = 3x + 2$.

EJERCICIO 32 [S/99]

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^3 + 3x + 2, \quad g(x) = -x^2 - 3x + 10$$

- a) [1] Representa gráficamente ambas funciones.
- b) [1'5] Halla el área de la región del plano que está formada por todos los puntos (x, y) que cumplen que $f(x) \leq y \leq g(x)$.

EJERCICIO 33 [S/99]

Dibuja y halla el área de la región limitada por la recta $y = -x + 3$ y la curva de ecuación $y = x^2 - 4x + 3$

EJERCICIO 34 [S/00]

- a) [1] Dibuja el recinto limitado por las curvas

$$y = e^{x+2}, \quad y = e^{-x}, \quad x = 0$$

- b) [1'5] Halla el área del recinto anterior

EJERCICIO 35 [S/00]

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2 + x - x^2.$$

Calcula $\alpha < 2$ de forma que

$$\int_{\alpha}^2 f(x) dx = \frac{9}{2}$$

EJERCICIO 36 [S/00]

Calcula el valor del número positivo α para que el área encerrada entre la curva $y = \alpha x - x^2$ y el eje de abscisas sea 36.

Representa la curva que se obtiene para dicho valor de α .

EJERCICIO 37 [S/00]

a) [1] Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas

$$y = x^2 + 1 \quad , \quad y = \frac{2}{x} \quad , \quad y = x - 1$$

b) [1,5] Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

EJERCICIO 38 [S/00]

a) [1] Dibuja el recinto limitado por la curva $y = \frac{9 - x^2}{4}$, la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa $x = 1$ y el eje de abscisas.

b) [1'5] Calcula el área del recinto considerado en el apartado anterior.

EJERCICIO 39 [S/00]

Calcula la siguiente integral definida y explica qué representa geoméricamente:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$$

EJERCICIO 40 [S/00]

Calcula el valor de la integral

$$\int_{-1}^3 (x^2 + 5) e^{-x} dx$$

EJERCICIO 41 [S/00]

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 6 - x^2 \quad , \quad g(x) = |x|$$

a) [1] Dibuja el recinto limitado por las gráficas de f y g .

b) [1'5] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

EJERCICIO 42 [S/00]

Sea $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt$$

a) [1'5] Determina $F(1)$.

b) [1] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

EJERCICIO 43 [S/00]

Considera las funciones $f, g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 2 \operatorname{sen}(x) \quad , \quad g(x) = \operatorname{sen}(2x)$$

- a) [1] Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de f y de g .
- b) [1,5] Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

EJERCICIO 44 [S/01]

Considera la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

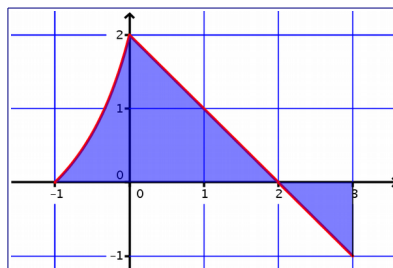
$$f(x) = x \ln x$$

Calcula:

- a) [1'5] $\int f(x) dx$.
- b) [1] Una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(1, 0)$

EJERCICIO 45 [S/01]

Halla el área del recinto rayado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la parte curva tiene como ecuación $y = \frac{2x+2}{1-x}$.



EJERCICIO 46 [S/01]

- a) [0,5] Dibuja el recinto limitado por la curva $y = \frac{1}{2} + \cos x$, los ejes de coordenadas y la recta $x = \pi$.
- b) [2] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

EJERCICIO 47 [S/01]

Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas.

EJERCICIO 48 [S/01]

Se quiere dividir la región encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ en dos regiones de igual área mediante la recta $y = a$.

Halla el valor de a .

EJERCICIO 49 [S/01]

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 10 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- Esboza la gráfica de f .
- Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

EJERCICIO 50 [S/01]

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 1|$

- Esboza la gráfica de f .
- Estudia la derivabilidad de f .

c) Calcula $\int_0^2 f(x) dx$.

EJERCICIO 51 [S/01]

Considera la función $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a(x - 1) & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Determina el valor de a sabiendo que f es derivable.

b) Calcula $\int_0^2 f(x) dx$.

EJERCICIO 52 [S/01]

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$

- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- Determina sus extremos relativos α y β de manera que $\alpha < \beta$ y calcula $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

EJERCICIO 53 [S/01]

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - mx - x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Determina m sabiendo que la función es derivable.

b) Calcula $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

EJERCICIO 54 [S/01]

Considera la función $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{16}{(x+1)^2} & \text{si } 1 < x < 3 \\ 4-x & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases} ?$$

- (a) [1] Determina la gráfica de f .
 (b) [1,5] Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

EJERCICIO 55 [S/02]

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x|x-4|$.

- a) [0,75] Esboza la gráfica de f .
 b) [0,75] Estudia su derivabilidad en $x = 4$.
 c) [1] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

EJERCICIO 56 [S/02]

Esboza el recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas de las funciones $y = 1$ e $y = \ln x$. Calcula su área.

EJERCICIO 57 [S/02]

Calcula

$$\int_0^1 \frac{3x^3 + 1}{x^2 - x - 2} dx$$

EJERCICIO 58 [S/02]

Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que

$$P(0) = P(2) = 1 \quad \text{y} \quad \int_0^2 P(x) dx = \frac{1}{3}$$

- a) [1'5] Calcula las asíntotas de la gráfica de f .
 b) [1] Estudia la posición de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

EJERCICIO 59 [S/02]

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x e^{-x}$.

Esboza el recinto limitado por la curva $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x = -1$. Calcula su área.

EJERCICIO 60 [S/02]

Esboza el recinto limitado por la gráfica de la parábola $y = -(x - 2)^2 - 2$, la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x = 3$, el semieje positivo de abscisas y el semieje negativo de ordenadas. Calcula su área.

EJERCICIO 61 [S/03]

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = e^{\frac{x}{3}}$$

- [1] ¿En qué punto de la gráfica de f la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas? Halla la ecuación de dicha recta tangente.
- [1'5] Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la gráfica de f , la recta tangente obtenida y el eje de abscisas.

EJERCICIO 62 [S/03]

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

- Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.
- Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , la recta tangente obtenida y el eje OY .

EJERCICIO 63 [S/03]

Halla a , b y c sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

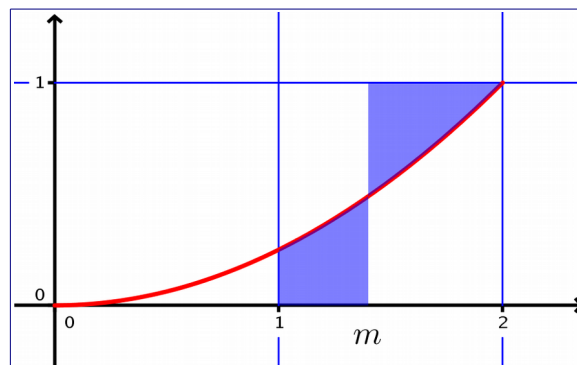
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

tiene máximo absoluto en el punto de abscisa $x = 1$, que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$ y que se tiene

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{32}{2}$$

EJERCICIO 64 [S/03]

En la figura adjunta puedes ver representada en el intervalo $[0, 2]$ la gráfica de la parábola de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$. Halla el valor de m para el que las áreas de las superficies rayadas son iguales.



EJERCICIO 65 [S/03]

Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = -1$. Halla a , b y c sabiendo además que:

$$\int_0^1 f(x) dx = 6$$

EJERCICIO 66 [S/03]

Dadas la parábola de ecuación $y = 1 + x^2$ y la recta de ecuación $y = 1 + x$, se pide:

- [1'5] Área de la región delimitada por la recta y la parábola.
- [1] Ecuación de la recta paralela a la dada que es tangente a la parábola.

EJERCICIO 67 [S/03]

Determina el valor positivo de λ para el que el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = \lambda x$ es 1.

EJERCICIO 68 [S/03]

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

- Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
- Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta tangente obtenida.
- Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

EJERCICIO 69 [S/03]

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 4$$

Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y su recta tangente en el punto de abscisa correspondiente al máximo relativo de la función.

EJERCICIO 70 [S/03]

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 6 - x^2, \quad g(x) = |x|$$

- Dibuja el recinto acotado que está limitado por las gráficas de f y g .
- Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.