TEMA 3

CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Ejercicios para Selectividad
de
Cálculo de Primitivas

Con modelos
detalladamente resueltos

Cursos
1996 – 2018

Enunciados

EJERCICIO 1 [S/96]

De todas las primitivas de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=1+x|x|$, determina aquella cuya gráfica pasa por el punto $(1\,,0)$.

EJERCICIO 2 [S/96]

Determina una función $f:[0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(0)=\ln 27$ y cuya función derivada está dada por

$$f'(x)=\ln\left((x+3)(x+1)\right)$$

EJERCICIO 3 [S/96]

a) Calcula, de forma razonada, todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que verifican

$$f'(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si} \quad x<0 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

b) Estudia la derivabilidad de cada una de de las funciones f halladas.

EJERCICIO 4 [S/97]

a) Determina razonadamente la expresión algebraica de una función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$f(3)=\frac{9}{2} \quad , \quad f'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<3 \\ x & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

b) Razona si la función f es derivable en el punto $x=3$.

c) Esboza la gráfica de esta función f.

EJERCICIO 5 [S/97]

Determina una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que es tres veces derivable y que cumple

$$f(0)=0 \quad , \quad f'(0)=1 \quad , \quad f''(0)=2 \quad , \quad f'''(x)=24x\ (x\in\mathbb{R})$$

EJERCICIO 6 [S/97+]

Usa el cambio de variable $t=\tan x$ para hallar:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x+\cos x\,\mathrm{sen}\,x}$$

EJERCICIO 7 [S/97+]

La recta que pasa por los puntos $(0\,,-6)$ y $(1\,,0)$ es la gráfica de la derivada segunda f'' de una cierta función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Se sabe que el origen de coordenadas pertenece a la curva $y=f(x)$ y que en ese punto la recta tangente tiene una pendiente igual a 3. Determina una expresión de la función f.

EJERCICIO 8 [S/97+]

Calcula

$$\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$$

EJERCICIO 9 [S/98]

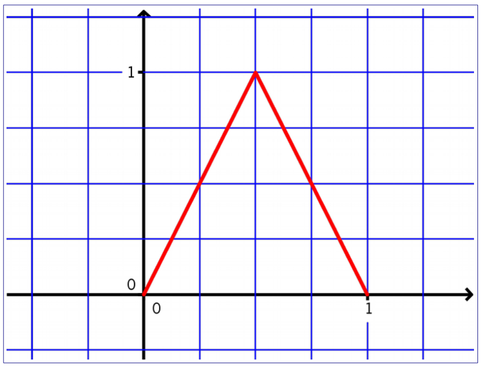
De una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sabe que es dos veces derivable y también que

$$g(0) = 5\ ,\ g'(0) = 0\ ,\ g''(x) = 8 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Calcula una expresión algebraica de esta función g.

EJERCICIO 10 [S/98]

En la gráfica adjunta se representa la gráfica de la función derivada f' de una cierta función $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$



a) Halla una expresión algebraica de f sabiendo que su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

b) Representa gráficamente la función f.

c) Estudia la derivabilidad de f'.

EJERCICIO 11 [S/99]

Consideremos

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x)^3}\, \mathrm{d}x$$

a) Calcula la integral haciendo el cambio de variable $t = \cos x$.

b) Calcula la integral haciendo el cambio de variable $u = \tan x$.

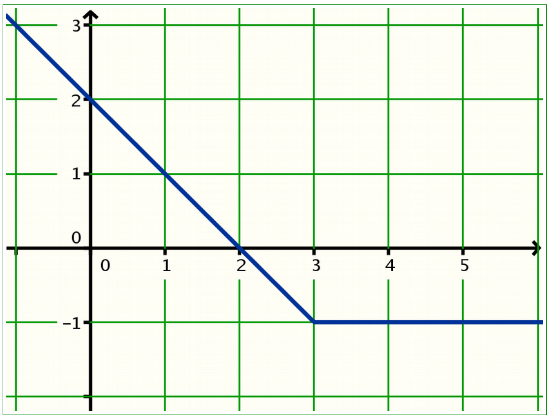
c) ¿Se obtiene el mismo resultado en ambos casos? Justifica la respuesta.

EJERCICIO 12 [S/99]

Calcula una primitiva de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 \operatorname{sen} x$ cuya gráfica pase por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 13 [S/99]

La función derivada de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por la gráfica siguiente, y además se sabe que $f(-1) = \dfrac{9}{2}$



a) Determina la expresión algebraica de f.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

EJERCICIO 14 [S/99+]

Halla una primitiva de la función $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

EJERCICIO 15 [S/99+]

Encuentra la función derivable $f : [-1\,,1] \to \mathbb{R}$ que cumple $f(1) = -1$ y

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ \mathrm{e}^x - 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

EJERCICIO 16 [S/99+]

Halla la primitiva de la función f cuya gráfica pase por el punto $(2\,,\ln 8)$, siendo

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{x - x^2}$$

EJERCICIO 17 [S/99+]

Determina la función $f : (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que es dos veces derivable, que su gráfica pasa por el punto $(1\,,1)$, que $f'(1) = 0$ y que $f''(x) = \dfrac{1}{x}$.

EJERCICIO 18 [S/00]

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x$.

a) Calcula $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0\,,3)$.

EJERCICIO 19 [S/01]

Considera la función $f:(0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x\ln x$$

a) Calcula $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(1\,,0)$.

EJERCICIO 20 [S/01]

De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se sabe que $f''(x)=x^2+2x+2$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P=(1\,,2)$. Halla la expresión de f .

EJERCICIO 21 [S/02]

Sea $f:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\frac{1}{x\,(\ln x)^2}$$

a) Determina $\mathbb{D}$ sabiendo que está formado por todos los puntos $x\in\mathbb{R}$ para los que existe $f(x)$.

b) Usa el cambio de variable $t=\ln x$ para calcular una primitiva de f.

EJERCICIO 22 [S/02]

Calcula

$$\int\frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 23 [S/02]

Calcula una primitiva de la función f definida por

$$f(x)=\frac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}\ \text{para}\ x\neq 1\ \text{y}\ x\neq -3$$

EJERCICIO 24 [S/03]

Sea $f:(-1\,,1)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$.

Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0\,,1)$.

EJERCICIO 25 [S/03]

Sea $f:(0\,,+\infty)\ \to\ \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=(x-1)\ln(x)$$

Calcula la primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(1\,,-\frac{3}{2})$.

EJERCICIO 26 [S/03]

Se sabe que la función $f : (0\,,3) \;\to\; \mathbb{R}$ es derivable en todo punto de su dominio, siendo

$$f'(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ -x+3 & \text{si} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

y que $f(1) = 0$. Halla la expresión analítica de f .

EJERCICIO 27 [S/04]

Sea $f : \mathbb{R} \;\to\; \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = (x-1)\cdot \mathrm{e}^{2x}$$

Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1\,, e^2)$.

EJERCICIO 28 [S/04]

De la función $f : (-1\;+\infty) \;\to\; \mathbb{R}$ se sabe que $f(2) = 0$ y que

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$$

a) Determina f.

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0\,,1)$.

EJERCICIO 29 [S/05]

Calcula la integral

$$\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 30 [S/05]

Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \cos(5x+1)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,\mathrm{d}x$

EJERCICIO 31 [S/05]

Sea $f : \mathbb{R} \;\to\; \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^2\,\mathrm{sen}(2x)$$

Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0\,,1)$.

EJERCICIO 32 [S/06]

Calcula

a) $\displaystyle\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int (2x-3)\cdot\tan(x^2-3x)\,\mathrm{d}x$

EJERCICIO 33 [S/06]

Halla la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.

EJERCICIO 34 [S/06]

Calcula

$$\int (x^2-1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 35 [S/06]

Sea $f:[0\,,4]\to\mathbb{R}$ una función tal que su función derivada viene dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x & \text{si} \quad 0 < x < 3 \\ -2x+8 & \text{si} \quad 3 \le x < 4 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de f sabiendo que $f(1) = \dfrac{16}{3}$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

EJERCICIO 36 [S/07]

Calcula

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 37 [S/07]

Determina una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que su derivada viene dada por

$$f'(x) = x^2 + x - 6$$

y que el valor que alcanza f en su punto máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto mínimo (relativo).

EJERCICIO 38 [S/07]

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\ln(1+x^2)$$

halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 39 [S/07]

Sea

$$I=\int \frac{2}{2-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t=\mathrm{e}^x$.

b) Calcula I .

EJERCICIO 40 [S/07]

Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que

$$f''(x)=x^2-1$$

y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es la recta $y=1$.

EJERCICIO 41 [S/08]

Sean $f,g:(0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\quad,\quad g(x)=x^3\cdot\ln x$$

a) Halla la primitiva de f que toma el valor 1 cuando $x=\dfrac{\pi}{3}$(sugerencia: $t=\cos x$).

b) Calcula la integral indefinida de g.

EJERCICIO 42 [S/09]

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$$

Halla la primitiva F de f que cumple $F(0)=3$ (*sugerencia*: $t=\dfrac{3}{2}x^2$).

EJERCICIO 43 [S/09]

Calcula

$$\int x\cdot\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 44 [S/10]

Sea

$$I = \int \frac{5}{1+\sqrt{\mathrm{e}^{-x}}}\,\mathrm{d}x$$

a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t^2 = \mathrm{e}^{-x}$.

b) Determina I .

EJERCICIO 45 [S/10]

Determina la primitiva F de f tal que $F(1) = 1$, siendo

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x} \quad \text{si} \quad x \neq -1 \ , \ x \neq 0$$

EJERCICIO 46 [S/11]

Determina la primitiva de la función $f:(0\,,+\infty) \ \to \ \mathbb{R}$ cuya gráfica pasa por $P(1\,,1)$, siendo

$$f(x) = x(1-\ln x)$$

EJERCICIO 47 [S/11]

Halla la función $f:(0\,,+\infty) \ \to \ \mathbb{R}$ tal que

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

y cuya gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1\,,1)$.

EJERCICIO 48 [S/11]

Calcula:

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 49 [S/11] Halla

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^{2x}-1)\,(\mathrm{e}^x+1)}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \mathrm{e}^x$.

EJERCICIO 50 [S/12]

Sea la función $f:\mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2\cos(x)$$

Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(\pi, 0)$.

EJERCICIO 51 [S/12]

Sea

$$I = \int \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

a) Expresa la integral I aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1-x}$.

b) Calcula el valor de I.

EJERCICIO 52 [S/12]

Halla una primitiva de la función f definida por

$$f(x) = \frac{2}{x^2-1} \text{ si } x \neq 1\,, x \neq -1$$

EJERCICIO 53 [S/12]

Sea la función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$$

Determine la primitiva de f que pasa por $P\,(-1\,,0)$.

EJERCICIO 54 [S/13]

Determina una función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$$

y cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 55 [S/13]

Sea $g:(0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

Determina la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto $P(1\,,0)$.

EJERCICIO 56 [S/13]

Haciendo el cambio $t = \sqrt{x}$, calcule

$$\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 57 [S/13]

Halle la primitiva de $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que pasa por el origen de coordenadas, siendo

$$g(x) = \ln(x^2+1)$$

EJERCICIO 58 [S/14]

Sea la función f definida por

$$f(x) = x \cdot \ln(x+1) \quad , \quad x > -1$$

Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1\,,0)$.

EJERCICIO 59 [S/14]

Determina una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f(1) = 1$ y que

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ \mathrm{e}^x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 60 [S/14]

Sea $f : (-1\,,3) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x+9}{(x+1)\,(x-3)}$$

Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1\,,0)$.

EJERCICIO 61 [S/14] Calcula

$$\int \frac{1}{2x\,(x+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: hágase el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

EJERCICIO 62 [S/14]

Obtén la primitiva de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$$

cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 63 [S/15] Calcula

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 64 [S/15]

Determina la función $f : (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que

$$f''(x) = \ln x$$

y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P\,(1\,,2)$.

EJERCICIO 65 [S/15]

Calcula

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{x+2}}$$

Sugerencia: $\sqrt{x+2} = t$.

EJERCICIO 66 [S/15]

Calcula

$$\int \mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$

EJERCICIO 67 [S/15]

Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{\ln x}{2x} \qquad (x > 0)$$

y F la primitiva de f tal que $F(1) = 2$.

a) Calcula $F'(\mathrm{e})$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = \mathrm{e}$.

EJERCICIO 68 [S/15]

Sea f definida por

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^2(x-1)} \qquad (x \neq 0\,,\ x \neq 1)$$

Determina la primitiva F que pasa por $P(2\,, \ln 2)$.

EJERCICIO 69 [S/16]

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abscisa $x = 1$ sabiendo que $f(0) = 0$ y que

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1} \qquad (x > -1)$$

EJERCICIO 70 [S/16]

Sea f la función definida para $x > 0$ por:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{\ln x}{x}$$

a) Halla todas las primitivas de f.

b) Determina la primitiva de f que toma el valor 3 para $x = 1$.

EJERCICIO 71 [S/16]

Calcula

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $t=\sqrt{x}$.

EJERCICIO 72 [S/16]

Calcula

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1+\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $t=\sqrt{2x+1}$.

EJERCICIO 73 [S/16]

Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que verifica

$$f''(x)=-2\,\mathrm{sen}\,(2x) \quad , \quad f(0)=1 \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

EJERCICIO 74 [S/17]

Sea f la función definida por

$$f(x)=(x+2)\ln(x) \quad , \quad (x>0)$$

a) Calcula

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1\,,0)$.

EJERCICIO 75 [S/17]

Calcula

$$\int \frac{x^2}{\left(1+x^3\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $t=1+x^3$.

¿Cuál es la primitiva cuya gráfica pasa por $(2\,,0)$.

EJERCICIO 76 [S/17]

De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x\arctan(x)$$

determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0\,,\pi)$

EJERCICIO 77 [S/17]

Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f''(x) = x\,\mathrm{e}^x$$

sabiendo que su gráfica pasa por el origen de coordenadas y que tiene un extremo relativo en $x = 1$.

EJERCICIO 78 [S/18]

Determina la función $f : (1\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que

$$f''(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ es $y = x + 2$.

EJERCICIO 79 [S/18]

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

a) [1,75] Calculemos $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$

b) [1,25] Encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0\,,1)$.

Soluciones

EJERCICIO 1 [S/96]

En primer lugar, expresemos $f(x) = 1 + x|x|$ como una función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x\cdot(-x) = 1 - x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 + x\cdot x = 1 + x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Ahora integramos cada trozo. Llamando F a la función primitiva:

$$F(x) = \begin{cases} x - \dfrac{1}{3}x^3 + a & \text{si} \quad x < 0 \\ x + \dfrac{1}{3}x^3 + b & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Como F es continua, en particular en $x = 0$:

$$F(0-) = F(0+) \ \rightarrow \ a = b$$

Por otro lado, se dice que la gráfica de F pasa por $(1\,,0)$:

$$F(1) = 0 \ \rightarrow \ 1 + \frac{1}{3} + b = 0 \ \rightarrow \ b = -\frac{4}{3}$$

Queda, pues:

$$F(x) = \begin{cases} x - \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{4}{3} & \text{si} \quad x < 0 \\ x + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{4}{3} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 2 [S/96]

Aplicando las propiedades de los logaritmos (el logaritmo de un producto igual a la suma de los logaritmos de los factores):

$$f'(x) = \ln(x+3) + \ln(x+1) \xrightarrow{integrando} f(x) = \int \ln(x+3)\,\mathrm{d}x + \int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$$

A cada una de esas integrales le aplicamos la integración por partes, tomando 1 como factor a integrar y el logaritmos como parte a derivar:

$$f(x) = x\ln(x+3) - \int x\cdot\frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x + x\ln(x+1) - \int x\cdot\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \ [*]$$

Ahora esas integrales las resolvemos descomponiéndolas mediante la división de polinomios o descomponiéndolas mediante truquillo:

$$\int \frac{x}{x+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+3-3}{x+3}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x = x - 3\ln(x+3) + C$$

$$\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = x - \ln(x+1) + C$$

Sustituyendo en [*] nos queda:

$$\begin{aligned} f(x) &= x\ln(x+3) - [x - 3\ln(x+3)] + x\ln(x+1) - [x - \ln(x+1)] + C \\ &= (x+3)\ln(x+3) + (x+1)\ln(x+1) - 2x + C \end{aligned}$$

Como debe ser $f(0) = \ln 27$, sustituyendo:

$$3\ln(3) + \ln(1) + C = \ln(27) \rightarrow C = \ln(27) - 3\ln(3) \rightarrow C = 0$$

Nos queda por fin

$$f(x) = (x+3)\ln(x+3) + (x+1)\ln(x+1) - 2x$$

Observación: al indicarse en el enunciado que el dominio de f es $[0\,,+\infty)$ podemos escribir sin problemas los argumentos de los logaritmos sin valores absolutos.

EJERCICIO 3 [S/96]

a) Integrando cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x + a & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + x + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Pero como la función f ha de estar definida para todo número real, debemos asignar un valor para $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x + a & \text{si} \quad x < 0 \\ c & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2 + x + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

b) Observemos que esa función sólo puede ser discontinua para $x = 0$ (separa-fórmulas), siendo:

$$f(0) = c \quad , \quad f(0-) = 1 + a \quad , \quad f(0+) = b$$

Si son todos iguales entre sí tendremos

$$b = c = 1 + a$$

Y la función quedará

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x + a & \text{si} \quad x < 0 \\ a + 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2 + x + a + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

donde a es un número real cualquiera.

En este caso es fácil comprobar que f es también derivable para $x = 0$, pues las derivadas laterales coinciden, siendo $f'(0) = 1$.

En caso contrario tendremos que f no es continua para $x = 0$ y, por ello, no será derivable para $x = 0$.

EJERCICIO 4 [S/97]

a) Ha de ser, integrando cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x < 3 \\ \dfrac{1}{2}x^2 + b & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Como debe ser continua:

$$f(3) = f(3-) = f(3+) \;\rightarrow\; \frac{9}{2} = a = \frac{9}{2} + b \;\rightarrow\; a = \frac{9}{2}\,,\, b = 0$$

De donde nos queda:

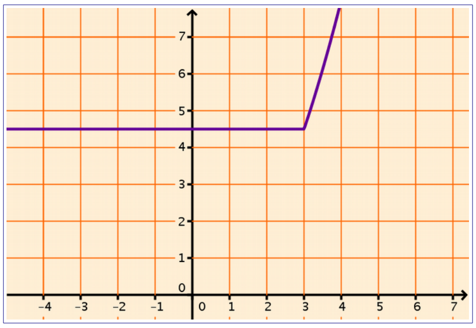
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2} & \text{si} \quad x \leq 3 \\ \dfrac{1}{2}x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

b) Es fácil comprobar que las derivadas laterales son

$$f'(3-) = 0 \quad , \quad f'(3+) = 3$$

Con lo que resulta que f no es derivable para $x = 3$ (punto anguloso).

c) La gráfica es simple: función constante junto con trozo de parábola.



EJERCICIO 5 [S/97]

Integrando la derivada tercera obtenemos la derivada segunda:

$$f''(x) = \int 24x \,\mathrm{d}x = 12x^2 + a$$

Como conocemos un valor particular:

$$f''(0) = 2 \;\rightarrow\; a = 2$$

Integrando ahora la derivada segunda:

$$f'(x) = \int (12x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x = 4x^3 + 2x + b$$

Como sabemos un valor concreto:

$$f'(0) = 1 \;\rightarrow\; b = 1$$

Integrando ahora la derivada primera:

$$f(x) = \int (4x^3 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x = x^4 + x^2 + x + c$$

Sustituyendo el valor conocido.

$$f(0) = 0 \;\rightarrow\; c = 0$$

Queda

$$f(x) = x^4 + x^2 + x$$

EJERCICIO 6 [S/97+]

Tenemos que

$$t = \tan x \to \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

dividiendo el numerador y el denominador entre $\cos^2 x$ nos será más fácil hacer el cambio:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x + \cos x \operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+t) + C = \ln(1+\tan x) + C$$

EJERCICIO 7 [S/97+]

Calculemos la ecuación de la recta usando la punto-pendiente:

$$\left.\begin{array}{r} P = (1\,,0) \\ m = \dfrac{0-(-6)}{1-0} = 6 \end{array}\right\} \to\ y - 0 = 6\,(x-1)\ \to\ y = 6x - 6$$

Integrando ahora la derivada segunda:

$$f'(x) = \int (6x-6)\,\mathrm{d}x = 3x^2 - 6x + a$$

Se nos dice que para $x = 0$ la curva tiene una pendiente 3, así:

$$f'(0) = 3\ \to\ a = 3$$

Integrando ahora la derivada primera:

$$f(x) = \int (3x^2 - 6x + 3)\,\mathrm{d}x = x^3 - 3x^2 + 3x + b$$

Como pasa por el origen de coordenadas la gráfica:

$$f(0) = 0\ \to\ b = 0$$

Definitivamente nos queda

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

EJERCICIO 8 [S/97+]

Una sencilla integral por partes donde integramos la potencia y el logaritmo es el factor para derivar:

$$\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C$$

EJERCICIO 9 [S/98]

Integrando la derivada segunda:

$$g'(x) = \int 8\,\mathrm{d}x = 8x + a$$

Como sabemos un valor concreto:

$$g'(0) = 0\ \to\ a = 0$$

Integrando ahora la derivada primera:

$$g(x) = \int 8x\,\mathrm{d}x = 4x^2 + b$$

Sustituyendo el valor conocido.

$$g(0) = 5 \;\rightarrow\; b = 5$$

Queda

$$g(x) = 4x^2 + 5$$

EJERCICIO 10 [S/98]

a) Observemos que f' es en el intervalo $[0\,,0.5]$ la recta que pasa por los puntos $(0\,,0)$ y $(0.5\,,1)$: $y = 2x$

Y en el intervalo $[0.5\,,1]$ la recta que pasa por los puntos $(0.5\,,1)$ y $(1\,,0)$: $y = -2x + 2$

Así, integrando cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si} \quad 0 \le x \le 0.5 \\ -x^2 + 2x + b & \text{si} \quad 0.5 < x \le 1 \end{cases}$$

Como ha de ser continua:

$$f(0.5-) = f(0.5+) \;\rightarrow\; 0.25 + a = -0.25 + 1 + b \;\rightarrow\; b = -0.5 + a$$

Sabemos también que su gráfica pasa por el origen de coordenadas:

$$f(0) = 0 \;\rightarrow\; 0 + a = 0 \;\rightarrow\; a = 0$$

Definitivamente nos queda

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 0.5 \\ -x^2 + 2x - 0.5 & \text{si} \quad 0.5 < x \le 1 \end{cases}$$

b) Su gráfica es simple: dos trozos de parábola que pueden dibujarse fácilmente.

c) Gráficamente, es fácil observar que f' es derivable en todo punto (trozos de recta) salvo para $x = 0.5$ donde presenta un punto anguloso.

De todas formas, es fácil calcular las derivadas segundas laterales

$$f''(0.5-) = +2 \quad , \quad f''(0.5+) = -2$$

Como vemos, no son iguales, por lo que f' no es derivable en el separa-fórmulas.

EJERCICIO 11 [S/99]

a) Hacemos el cambio de variable $t = \cos x \;\rightarrow\; \mathrm{d}t = -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2t^2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

b) Hacemos el cambio de variable $u = \tan x \;\rightarrow\; \mathrm{d}u = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \int t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\tan^2 x + C'$$

c) Sí son los mismos resultados, pues ambos se diferencian sólo en una constante:

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\tan^2 x = \frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \;\rightarrow\; C' = C - \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 12 [S/99]

Realizaremos una integración por partes, donde la potencia será la parte a derivar y la función trigonométrica la parte a integrar:

$$\begin{aligned} F(x) &= -2x^2\cos x - \int 4x(-\cos x)\,\mathrm{d}x = -2x^2\cos x + 4\left[x\,\mathrm{sen}\,x - \int 1\cdot \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x\right] \\ &= -2x^2\cos x + 4x\,\mathrm{sen}\,x + 4\cos x + C \end{aligned}$$

Como vemos, hemos aplicado dos veces la integración por partes. Y, ahora, conociendo un valor concreto:

$$F(0) = 0 \;\rightarrow\; C = -4$$

Nos queda:

$$F(x) = -2x^2\cos x + 4x\,\mathrm{sen}\,x + 4\cos x - 4$$

EJERCICIO 13 [S/99]

a) Observemos que si $x \leq 3$ la derivada es la recta que pasa por $(0\,,2)$ y $(2\,,0)$: $y=-x+2$

Y si $x > 3$ la derivada es la función constante igual a -1: $y=-1$.

Integrando cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + a & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -x + b & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Como ha de ser continua:

$$f(3-) = f(3+) \;\rightarrow\; -\frac{9}{2} + 6 + a = -3 + b$$

Por otro lado, al ser:

$$f(-1) = \frac{9}{2} \;\rightarrow\; -\frac{1}{2} - 2 + a = \frac{9}{2}$$

Resolviendo ambas ecuaciones.

$$a = 7 \quad , \quad b = \frac{23}{2}$$

Definitivamente nos queda

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 7 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -x + \dfrac{23}{2} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

b) Ese límite ya lo hemos visto arriba al considerar que es continua en $x=3$:

$$f(3-) = f(3+) = f(3) = \frac{17}{2}$$

EJERCICIO 14 [S/99+]

Una sencilla integral por partes donde integramos la exponencial y el polinomio es el factor para derivar:

$$F(x) = \int x \cdot \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x = x \cdot (-\mathrm{e}^{-x}) - \int 1 \cdot (-\mathrm{e}^{-x})\, \mathrm{d}x = -x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + C$$

EJERCICIO 15 [S/99+]

Integrando cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + a & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ \mathrm{e}^x - x + b & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Como ha de ser continua:

$$f(0-) = f(0+) \to a = 1 + b$$

Y, por otro lado, ha de ser:

$$f(1) = -1 \to \mathrm{e} - 1 + b = -1 \to b = -\mathrm{e}$$

De donde resulta $a = 1 - \mathrm{e}$, y definitivamente nos queda

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 1 - \mathrm{e} & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ \mathrm{e}^x - x - \mathrm{e} & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

EJERCICIO 16 [S/99+]

Dividiendo

$$\left(x^3 - 2x + 3\right) : \left(-x^2 + x\right) \to \begin{cases} c(x) = -x - 1 \\ r(x) = -x + 3 \end{cases}$$

Luego:

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \int \left(-x - 1 + \frac{-x+3}{-x^2+x}\right) \mathrm{d}x \text{ (*)}$$

Ahí, intentaremos la siguiente descomposición:

$$\frac{-x+3}{-x^2+x} = \frac{x-3}{x^2-x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} \text{ (**)}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$x - 3 = a(x-1) + bx \longrightarrow \begin{cases} \text{si } x = 0 \to -3 = -a \to a = 3 \\ \text{si } x = 1 \to -2 = b \to b = -2 \end{cases}$$

De (*) y (**) resulta:

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \int (-x-1)\, \mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x-1}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3\ln|x| - 2\ln|x-1| + C$$

Si llamamos F a la primitiva buscada:

$$F(2) = \ln(8) \to -2 - 2 + 3\ln 2 - 2\ln 1 + C = \ln 8 \to C = 4$$

Con lo que definitivamente nos queda:

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3\ln|x| - 2\ln|x-1| + 4$$

EJERCICIO 17 [S/99+]

Integrando la derivada segunda:

$$f'(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + a$$

Como sabemos un valor concreto:

$$f'(1) = 0 \;\rightarrow\; \ln(1) + a = 0 \;\rightarrow\; a = 0$$

Integramos ahora f': por partes, dejando el logaritmo como factor a derivar y tomando 1 para integrar:

$$f(x) = \int 1 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + b$$

Como la gráfica de f pasa por el punto $(1\,,1)$:

$$f(1) = 1 \;\rightarrow\; 1\ln 1 - 1 + b = 1 \;\rightarrow\; b = 2$$

Queda

$$f(x) = x\ln x - x + 2$$

EJERCICIO 18 [S/00]

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x$.

a) Integramos por partes con el polinomio para derivar y con la exponencial como factor para integrar:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = (x+1)\,\mathrm{e}^x - \int 1 \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x+1)\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = x\,\mathrm{e}^x + C$$

b) Sea F esa primitiva:

$$F(0) = 3 \;\rightarrow\; 0 \cdot \mathrm{e}^0 + C = 3 \;\rightarrow\; C = 3$$

Queda:

$$F(x) = x\,\mathrm{e}^x + 3$$

EJERCICIO 19 [S/01]

a) Integramos por partes, dejando el logaritmo como factor a derivar y tomando el polinomio para integrar:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

b) Sea F esa primitiva:

$$F(1) = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \ln 1 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 + C = 0 \;\rightarrow\; C = \frac{1}{4}$$

Queda:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$$

EJERCICIO 20 [S/01]

Integrando la derivada segunda obtenemos la derivada primera:

$$f'(x) = \int (x^2 + 2x + 2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + a$$

La tangente para $x = 1$ es horizontal, así la pendiente (derivada) es cero:

$$f'(1) = 0 \ \rightarrow \ \frac{1}{3} + 1 + 2 + a = 0 \ \rightarrow \ a = -\frac{10}{3}$$

Integramos ahora la derivada primera:

$$f(x) = \int \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x - \frac{10}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{10}{3}x + b$$

Como la gráfica de f pasa por el punto $(1\,,2)$:

$$f(1) = 2 \ \rightarrow \ \frac{1}{12} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{10}{3} + b = 2 \ \rightarrow \ b = \frac{71}{12}$$

Queda

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{71}{12}$$

EJERCICIO 21 [S/02]

a) En primer lugar, para que exista $\ln(x)$ debe ser $x > 0$. Y, además, el denominador no puede ser cero:

$$x\,(\ln x)^2 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Así:

$$\mathbb{D} = (0\,,+\infty) - \{1\} = (0\,,1) \cup (1\,,+\infty)$$

b) Hacemos el cambio de variable $t = \ln x \ \rightarrow \ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$

EJERCICIO 22 [S/02]

Dividiendo

$$\left(x^3 + 2x^2 - 2x + 3\right) : \left(x^2 - 1\right) \ \rightarrow \ \begin{cases} c(x) = -x + 2 \\ r(x) = -x + 5 \end{cases}$$

Luego:

$$I = \int \left(-x + 2 + \frac{-x+5}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x \ (*)$$

Ahí descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-x+5}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \ (**)$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$-x+5=a(x+1)+b(x-1) \longrightarrow \begin{cases} \text{si } x=1 \to 4=2a \to a=2 \\ \text{si } x=-1 \to 6=-2b \to b=-3 \end{cases}$$

De (*) y (**) resulta:

$$I=\int(-x+2)\,\mathrm{d}x+2\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x-3\int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+2x+2\ln|x-1|-3\ln|x+1|+C$$

EJERCICIO 23 [S/02]

Dividiendo

$$\left(2x^2+10x\right):\left(x^2+2x-3\right) \to \begin{cases} c(x)=2 \\ r(x)=6x+6 \end{cases}$$

Luego:

$$I=\int\left(2+\frac{6x+6}{x^2+2x-3}\right)\mathrm{d}x \text{ (*)}$$

Ahí, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{6x+6}{x^2+2x-3}=\frac{6x+6}{(x-1)(x+3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3} \text{ (**)}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$6x+6=a(x+3)+b(x-1) \longrightarrow \begin{cases} \text{si } x=-3 \to -12=-4b \to b=3 \\ \text{si } x=1 \to 12=4a \to a=3 \end{cases}$$

De (*) y (**) resulta:

$$I=\int 2\,\mathrm{d}x+3\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x+3\int\frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x=2x+3\ln|x-1|+3\ln|x+3|+C$$

EJERCICIO 24 [S/03]

Integramos por partes, dejando el logaritmo como factor a derivar y tomando la unidad para integrar:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int 1\cdot\ln(1-x^2)\,\mathrm{d}x=x\ln(1-x^2)-\int x\cdot\frac{-2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=x\ln(1-x^2)-\int\frac{2x^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Dividiendo en la última integral:

$$\left(2x^2\right):\left(x^2-1\right) \to \begin{cases} c(x)=2 \\ r(x)=2 \end{cases}$$

Luego:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=x\ln(1-x^2)-\int\left(2+\frac{2}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x \text{ (*)}$$

Ahí, intentaremos la siguiente descomposición:

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1} \text{ (**)}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$2 = a(x+1) + b(x-1) \longrightarrow \begin{cases} \text{si } x = 1 \to 2 = 2a \to a = 1 \\ \text{si } x = 1 \to 2 = -2b \to b = -1 \end{cases}$$

De (*) y (**) resulta:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(1-x^2) - \int \left(2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = x\ln(1-x^2) - 2x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

Si llamamos F a la primitiva buscada:

$$F(0) = 1 \;\to\; 0\cdot\ln 1 - 2\cdot 0 - \ln 1 + \ln 1 + C = 1 \;\to\; C = 1$$

Nos queda:

$$F(x) = x\ln(1-x^2) - 2x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + 1$$

EJERCICIO 25 [S/03]

Integramos por partes, con el polinomio para integrar y el logaritmo como factor para derivar:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (x-1)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln(x) - \int \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + x + C$$

Si llamamos F a la primitiva buscada:

$$F(1) = -\frac{3}{2} \;\to\; 0 - \frac{1}{4} + 1 + C = -\frac{3}{2} \;\to\; C = -\frac{9}{4}$$

Quedando:

$$F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{9}{4}$$

EJERCICIO 26 [S/03]

Integrando cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + a & \text{si } \; 0 < x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x + b & \text{si } \; 2 \le x < 3 \end{cases}$$

Como ha de ser continua:

$$f(2-) = f(2+) \;\to\; 2 - 2 + a = -2 + 6 + b \;\to\; a = 4 + b$$

Y, por otro lado, ha de ser:

$$f(1) = 0 \;\to\; \frac{1}{2} - 1 + a = 0 \;\to\; a = \frac{1}{2} \xrightarrow{b=a-4} b = -\frac{7}{2}$$

Definitivamente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} & \text{si } \; 0 < x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{7}{2} & \text{si } \; 2 \le x < 3 \end{cases}$$

EJERCICIO 27 [S/04]

Una integral por partes donde integramos la exponencial y el polinomio es el factor para derivar:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (x-1)\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = (x-1)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \int 1\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-1)\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x} + C$$

Si llamamos F a la primitiva buscada:

$$F(1) = \mathrm{e}^2 \;\rightarrow\; 0 - \frac{1}{4}\cdot\mathrm{e}^2 + C = \mathrm{e}^2 \;\rightarrow\; C = \frac{5}{4}\,\mathrm{e}^2$$

Con lo que definitivamente nos queda, sacando factor común la exponencial:

$$F(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{2x} + \frac{5}{4}\,\mathrm{e}^2$$

EJERCICIO 28 [S/04]

a) La integral que debemos calcular es de tipo potencial:

$$f(x) = \int \frac{3}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-3}{x+1} + a$$

Como también sabemos:

$$f(2) = 0 \;\rightarrow\; \frac{-3}{3} + a = 0 \;\rightarrow\; a = 1$$

Queda

$$f(x) = -\frac{3}{x+1} + 1$$

b) Ahora hay que integrar f:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -3\ln|x+1| + x + b$$

Si llamamos F a la primitiva buscada, como su gráfica pasa por el punto indicado:

$$F(0) = 1 \;\rightarrow\; -3\ln(1) + 0 + b = 1 \;\rightarrow\; b = 1$$

Resulta finalmente

$$F(x) = -3\ln|x+1| + x + 1$$

EJERCICIO 29 [S/05]

Dividiendo

$$\left(3x^3 + x^2 - 10x + 1\right) : \left(x^2 - x - 2\right) \;\rightarrow\; \begin{cases} c(x) = 3x + 4 \\ r(x) = 9 \end{cases}$$

Luego:

$$I = \int \left(3x + 4 + \frac{9}{x^2 - x - 2}\right)\mathrm{d}x \;(*)$$

Como es

$$x^2 - x - 2 = 0 \ \to \ x = -1\,, x = 2$$

Descomponemos en fracciones simples así:

$$\frac{9}{x^2 - x - 2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} \; (**)$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$9 = a(x-2) + b(x+1) \ \longrightarrow \ \begin{cases} \text{si } x = -1 \to 9 = -3a \to a = -3 \\ \text{si } x = -1 \to 9 = 3b \to b = 3 \end{cases}$$

De (*) y (**) resulta:

$$I = \int (3x+4)\,\mathrm{d}x + \int \frac{-3}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}x^2 + 4x - 3\ln|x+1| + 3\ln|x-2| + C$$

EJERCICIO 30 [S/05]

a) Es una simple integral tipo seno-coseno:

$$\int \cos(5x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int 5\cos(5x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}(5x+5) + C$$

b) Es de tipo potencial. Primero escribimos la raíz como potencia (fraccionaria y negativa):

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,\mathrm{d}x = \int (x+2)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = -2(x+2)^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{-2}{\sqrt{x+2}} + C$$

EJERCICIO 31 [S/05]

Realizaremos una integración por partes, donde la potencia será la parte a derivar y la función trigonométrica la parte a integrar:

$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x &= x^2 \cdot \frac{-1}{2}\cos(2x) - \int 2x \cdot \frac{-1}{2}\cos(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + x\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x) - \int \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C \end{aligned}$$

Como vemos, hemos aplicado dos veces la integración por partes. Y, ahora, llamando a F a la primitiva pasa por el punto $(0\,,1)$:

$$F(0) = 1 \ \to \ 0 + 0 + \frac{1}{4} + C = 1 \ \to \ C = \frac{3}{4}$$

Nos queda:

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{3}{4}$$

EJERCICIO 32 [S/06]

a) Dividiendo

$$\left(5x^2 - x - 160\right) : \left(x^2 - 25\right) \;\rightarrow \begin{cases} c\,(x) = 5 \\ r\,(x) = -x - 35 \end{cases}$$

Luego:

$$I = \int \left(5 + \frac{-x - 35}{x^2 - 25}\right) \mathrm{d}x \text{ (*)}$$

Como es

$$x^2 - 25 = (x+5)\,(x-5)$$

Descomponemos en fracciones simples así:

$$\frac{-x - 35}{x^2 - 25} = \frac{a}{x+5} + \frac{b}{x-5} \text{ (**)}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$-x - 35 = a\,(x-5) + b\,(x+5) \;\longrightarrow \begin{cases} \text{si } x = +5 \rightarrow -40 = 10b \rightarrow b = -4 \\ \text{si } x = -5 \rightarrow -30 = -10a \rightarrow a = 3 \end{cases}$$

De (*) y (**) resulta:

$$I = \int 5\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x+5}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-4}{x-5}\,\mathrm{d}x = 5x + 3\ln|x+5| - 4\ln|x-5| + C$$

b) Si observamos bien, nos damos cuenta de que es logarítmica:

$$I = \int (2x-3)\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(x^2 - 3x\right)}{\cos\left(x^2 - 3x\right)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(2x-3)\operatorname{sen}\left(x^2 - 3x\right)}{\cos\left(x^2 - 3x\right)}\,\mathrm{d}x \overset{[*]}{=} -\ln\left|\cos\left(x^2 - 3x\right)\right| + C$$

[*] Logarítmica con $u = \cos\left(x^2 - 3x\right)$.

EJERCICIO 33 [S/06]

Si la tangente para $x = 2$ es $4x - y - 7 = 0 \rightarrow y = 4x - 7$, deducimos dos cosas:

1. La pendiente de la tangente es la derivada: $m = 4 \Longrightarrow f'\,(2) = 4$
2. Sustituyendo la abscisa sale la ordenada: $x = 2 \longmapsto y = 4\cdot 2 - 7 = 1 \Longrightarrow f\,(2) = 1$

Integrando la derivada segunda obtenemos la derivada primera:

$$f'(x) = \int (12x - 6)\,\mathrm{d}x = 6x^2 - 6x + C$$

De [1]:

$$f'\,(2) = 4 \;\rightarrow\; 24 - 12 + C = 4 \rightarrow\; C = -4$$

Integramos ahora la derivada primera sale ya la función:

$$f(x) = \int \left(6x^2 - 6x - 4\right)\mathrm{d}x = 2x^3 - 3x^2 - 4x + D$$

De [2]:

$$f\,(2) = 1 \;\rightarrow\; 16 - 12 - 8 + D = 1 \;\rightarrow\; D = 5$$

Queda
$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5$$

EJERCICIO 34 [S/06]

Realizaremos una integración por partes, donde el polinomio será la parte a derivar y la exponencial la parte a integrar:
$$\begin{aligned}\int \left(x^2-1\right) \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x &= -\left(x^2-1\right) \mathrm{e}^{-x} + \int 2x \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = \\ &= -\left(x^2-1\right) \mathrm{e}^{-x} - 2x \, \mathrm{e}^{-x} - \int 2 \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\left(x^2-1\right) \mathrm{e}^{-x} - 2x \, \mathrm{e}^{-x} + 2 \, \mathrm{e}^{-x} + C\end{aligned}$$

Como vemos, hemos aplicado dos veces la integración por partes y hemos usado varias veces:
$$\int \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = -\int \mathrm{e}^{-x} (-1) \, \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + C$$

EJERCICIO 35 [S/06]

Sea $f : [0\,,4] \to \mathbb{R}$ una función tal que su función derivada viene dada por
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x & \text{si} \quad 0 < x < 3 \\ -2x+8 & \text{si} \quad 3 \le x < 4 \end{cases}$$

a) Integramos cada trozo:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x^2 + a & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \\ -x^2+8x+b & \text{si} \quad 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

Sabemos que $f(1) = \dfrac{16}{3}$:
$$f(1) = \frac{16}{3} \;\to\; \frac{1}{3} + a = \frac{16}{3} \;\to\; a = 5$$

Al existir derivada para $x = 3$, debe ser continua en $x = 3$:
$$f(3-) = f(3+) \;\to\; \frac{1}{3} \cdot 3^2 + a = -3^2 + 8 \cdot 3 + b \xrightarrow{a=5} b = -7$$

Definitivamente nos queda
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x^2 + 5 & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \\ -x^2+8x-7 & \text{si} \quad 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

b) La tangente para $x = 1$:
$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1) \;\to\; y - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}(x-1) \;\to\; y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$$

EJERCICIO 36 [S/07]

Basta expresar el integrando como la suma de dos fracciones con el mismo denominador (x^2+1): esto da lugar a una integral logarítmica y a otra arcotangente.

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{4}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right) + 4\arctan(x) + C$$

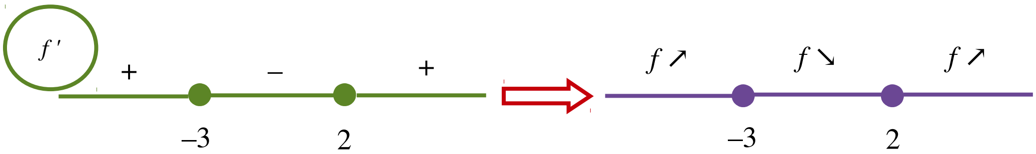
EJERCICIO 37 [S/07]

Antes de nada, veamos dónde se alcanzan los extremos relativos de los que habla el enunciado.

Los ceros de la derivada de f:

$$f'(x) = x^2 + x - 6 = 0 \to x = -3\,, x = 2$$

Estudiemos el signo de $f'(x) = x^2 + x - 6$:



El enunciado nos dice que "valor que alcanza f en su punto máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto mínimo (relativo)":

$$f(-3) = 3\cdot f(2)\,[*]$$

Obtendremos la expresión de la función integrando su derivada:

$$f(x) = \int \left(x^2 + x - 6\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + C$$

Aquí [*] nos dice que:

$$\frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 - 6(-3) + C = 3\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + C\right)$$

Limpiamos y despejamos:

$$-9 + \frac{9}{2} + 18 + C = 8 + 6 - 36 + 3C \to C = \frac{71}{4}$$

Por fin:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{71}{4}$$

EJERCICIO 38 [S/07]

Por partes, donde la constante 1 la parte a integrar y el logaritmo la parte a deriivar:

$$\int 1\cdot\ln\left(1+x^2\right)\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln\left(1+x^2\right) - \int x\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x\ln\left(1+x^2\right) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= x\ln\left(1+x^2\right) - \int\left(2 - \frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= x\ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2\arctan(x) + C$$

Y, ahora, llamando a F a la primitiva pasa por el punto $(0\,,0)$:

$$F(0)=0 \;\to\; 0-0+0+C=0 \;\to\; C=0$$

Nos queda:

$$F(x)=x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2\arctan(x)$$

—

$$\left(2x^2\right):\left(x^2+1\right) \;\to\; \left\{\begin{array}{l} c(x)=2 \\ r(x)=-2 \end{array}\right\} \;\to\; \frac{2x^2}{x^2+1}=2-\frac{2}{x^2+1}$$

EJERCICIO 39 [S/07]

Sea

$$I=\int \frac{2}{2-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

a) Con el cambio sugerido:

$$t=\mathrm{e}^x \;\to\; \mathrm{d}t=e^x\,\mathrm{d}x$$

Y así:

$$I=\int \frac{1}{2-\mathrm{e}^x}\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{(2-t)\,t}\,\mathrm{d}t$$

b) La integral ha quedado reducida a una racional:

Descomponemos en fracciones simples así:

$$\frac{1}{t\,(2-t)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{2-t}\;(*)$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$1=a\,(2-t)+b\,t \;\longrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \text{si } t=0\to 1=2a\to a=\dfrac{1}{2} \\ \text{si } t=2\to 1=2b\to b=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

De (*) resulta:

$$I=\int\frac{1/2}{t}\,\mathrm{d}t+\int\frac{1/2}{2-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\frac{-1}{2-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|2-t|+C$$

Deshacemos el cambio recordando que $t=\mathrm{e}^x$ y que $\ln\left(\mathrm{e}^x\right)=x$:

$$I=\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{2}\ln|2-\mathrm{e}^x|+C$$

EJERCICIO 40 [S/07]

Si la tangente para $x=0$ es la recta $y=1$, deducimos dos cosas:

3. La pendiente de la tangente es la derivada: $m=0\Longrightarrow f'(0)=0$
4. Sustituyendo la abscisa sale la ordenada: $x=0\longmapsto y=1\Longrightarrow f(0)=1$

Integrando la derivada segunda obtenemos la derivada primera:

$$f'(x) = \int (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,x^3 - x + C$$

De [1]:

$$f'\,(0) = 0 \;\to\; 0 + 0 + C = 0 \to\; C = 0$$

Integramos ahora la derivada primera y sale ya la función:

$$f(x) = \int \left(\frac{1}{3}\,x^3 - x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\,x^4 - \frac{1}{2}\,x^2 + D$$

De [2]:

$$f\,(0) = 1 \;\to\; 0 - 0 + D = 1 \;\to\; D = 1$$

Queda

$$f\,(x) = \frac{1}{12}\,x^4 - \frac{1}{2}\,x^2 + 1$$

EJERCICIO 41 [S/08]

Sean $f, g : (0\,, +\infty) \;\to\; \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \quad , \quad g(x) = x^3 \cdot \ln x$$

a) Calcularemos la integral de f siguiendo con la sugerencia dada: que toma el valor 1 cuando $x = \dfrac{\pi}{3}$

$$t = \cos x \;\to\; \mathrm{d}t = -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$$

Calculamos la integral cambiando la variable y luego deshaciendo el cambio:

$$\int f\,(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{t^3}\,\mathrm{d}t = -\int t^{-3}\mathrm{d}t = -\frac{1}{-2}t^{-2} + C = \frac{1}{2t^2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

Si llamamos F a la primitiva buscada, se tiene que verificar:

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \;\to\; \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} + C = 1 \;\to\; \frac{1}{2 \cdot 0{,}25} + C = 1 \;\to\; C = -1$$

Por fin

$$F\,(x) = \frac{1}{2\cos^2 x} - 1$$

b) Para calcular la integral indefinida de g actuaremos por partes, con el polinomio como parte a integrar y el logaritmo para derivar:

$$\int x^3 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,x^4 \ln(x) - \frac{1}{4}\int x^4 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,x^4 \ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,x^4 \ln(x) - \frac{1}{16}\,x^4 + C$$

EJERCICIO 42 [S/09]

Siguiendo con el cambio sugerido:

$$t = \frac{3}{2}x^2 \;\to\; 2t = 3x^2 \;\to\; 2\,\mathrm{d}t = 6x\,\mathrm{d}x \;\to\; \mathrm{d}t = 3x\,\mathrm{d}x$$

Hay que ajustar un poquito el integrando. La raíz del denominador queda:

$$\sqrt{4 - 9x^4} = \sqrt{4 - (3x^2)^2} = \sqrt{4 - (2t)^2} = \sqrt{4 - 4t^2} = \sqrt{4\,(1 - t^2)} = 2\sqrt{1 - t^2}$$

Ahora cambiamos la variable, integramos y finalmente deshacemos el cambio:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{3x}{\sqrt{4-9x^4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,sen}(t) + C = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3x^2}{2}\right) + C$$

Obtengamos la constante con la condición dada:

$$F(0) = 3 \;\rightarrow\; \frac{1}{6}\operatorname{arc\,sen}(0) + C = 3 \;\rightarrow\; 0 + C = 3 \;\rightarrow\; C = 3$$

Por fin:

$$F(x) = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3x^2}{2}\right) + 3$$

EJERCICIO 43 [S/09]

Sencilla integral por partes en la que tomamos el polinomio para derivar y el seno para integrar:

$$\int x\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x = -x\cdot\cos x + \int 1\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = -x\cdot\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cdot\cos x + \mathrm{sen}\,x + C$$

EJERCICIO 44 [S/10]

Sea

$$I = \int \frac{5}{1+\sqrt{\mathrm{e}^{-x}}}\,\mathrm{d}x$$

a) Con el cambio sugerido:

$$t^2 = \mathrm{e}^{-x} \;\rightarrow\; 2t\,\mathrm{d}t = -e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Y así:

$$I = -5\int \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}\left(1+\sqrt{\mathrm{e}^{-x}}\right)}\mathrm{d}x = -5\int \frac{2t}{t^2\left(1+\sqrt{t^2}\right)}\,\mathrm{d}t = -10\int \frac{1}{t\,(1+t)}\,\mathrm{d}t$$

b) Descomponemos en fracciones simples así:

$$\frac{1}{t\,(1+t)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t}\;(*)$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$1 = a\,(t+1) + b\,t \;\longrightarrow\; \begin{cases} \text{si } t = 0 \rightarrow 1 = a \rightarrow a = 1 \\ \text{si } t = -1 \rightarrow 1 = -b \rightarrow b = -1 \end{cases}$$

De (*) resulta:

$$I = -10\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - 10\int \frac{-1}{1+t}\,\mathrm{d}t = -10\ln|t| + 10\ln|1+t| + C$$

Deshacemos el cambio recordando que $t = \sqrt{\mathrm{e}^{-x}}$ y que $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-x}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-x/2}\right) = -\frac{x}{2}$:

$$I = -10\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-x}}\right) + 10\ln\left(1+\sqrt{\mathrm{e}^{-x}}\right) + C = 5x + 10\ln\left(1+\sqrt{\mathrm{e}^{-x}}\right) + C$$

EJERCICIO 45 [S/10]

Vamos a calcular la integral indefinida descomponiendo el integrando en fracciones simples:

$$\frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \text{ (*)}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$1 = a\,(x+1) + b\,x \;\longrightarrow\; \begin{cases} \text{si } x=0 \to 1=a \to a=1 \\ \text{si } x=-1 \to 1=-b \to b=-1 \end{cases}$$

De (*) resulta:

$$F\,(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

Calcularemos la constante con la condición dada:

$$F\,(1) = 1 \;\to\; \ln 1 - \ln 2 + C = 1 \;\to\; C = 1 + \ln 2$$

Tenemos así que es

$$F\,(x) = \ln|x| - \ln|x+1| + 1 + \ln 2$$

EJERCICIO 46 [S/11]

Integramos f por partes, donde $u = x$ es la parte a integrar y $v = 1 - \ln x$ la parte a derivar:

$$\int x \cdot (1-\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2 \cdot (1-\ln x) - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{-1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2\,(1-\ln x) + \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\,x^2 \cdot (1-\ln x) + \frac{1}{4}\,x^2 + C$$

Y, ahora, llamando a F a la primitiva pasa por el punto $(1\,,1)$:

$$F\,(1) = 1 \;\to\; \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4} + C = 1 \;\to\; C = \frac{1}{4}$$

Nos queda:

$$F\,(x) = \frac{1}{2}\,x^2 \cdot (1-\ln x) + \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{4}$$

EJERCICIO 47 [S/11]

Si la tangente a la gráfica de f es horizontal en $P(1\,,1)$, deducimos dos cosas:

1. La pendiente de la tangente (cero) es la derivada: $m = 0 \Longrightarrow f'\,(1) = 0$
2. Sustituyendo la abscisa sale la ordenada: $x = 1 \longmapsto y = 1 \Longrightarrow f\,(1) = 1$

Integrando la derivada segunda obtenemos la derivada primera:

$$f'\,(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$$

De [1]:

$$f'\,(1) = 0 \;\to\; \ln 1 + C = 0 \;\to\; C = 0$$

Integrando ahora la derivada primera sale ya la función. Lo haremos por partes, con la constante 1 para integrar y el logaritmo como factor para derivar:

$$f'(x) = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + D$$

De [2]:

$$f(1) = 1 \ \rightarrow \ 1 \ln 1 - 1 + D = 1 \ \rightarrow \ D = 2$$

Queda

$$f(x) = x \ln x - x + 2$$

EJERCICIO 48 [S/11]

Integral de una función racional. Dividiendo

$$\left(x^3 + 2x^2\right) : \left(x^2 + x - 2\right) \ \rightarrow \ \begin{cases} c(x) = x \\ r(x) = 2x \end{cases}$$

Y veamos los ceros de ese denominador:

$$x^2 + x - 2 = 0 \ \rightarrow \ x = -2 \, , x = 1$$

Así que tenemos:

$$I = \int x \, \mathrm{d}x + \int \frac{2x}{(x+2)(x-1)} \, \mathrm{d}x \text{ (*)}$$

Ahí, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x}{(x+2)(x-1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} \text{ (**)}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$2x = a(x-1) + b(x+2) \ \longrightarrow \ \begin{cases} \text{si } x = -2 \rightarrow -4 = -3a \rightarrow a = \dfrac{4}{3} \\ \text{si } x = 1 \rightarrow 2 = 3b \rightarrow b = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

De (*) y (**) resulta:

$$I = \int x \, \mathrm{d}x + \frac{4}{3} \int \frac{1}{x+2} \, \mathrm{d}x + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x-1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} x + \frac{4}{3} \ln|x+2| + \frac{2}{3} \ln|x-1| + C$$

EJERCICIO 49 [S/11] Halla

Con el cambio sugerido:

$$t = \mathrm{e}^x \ \rightarrow \ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

Y así, teniendo en cuenta que $\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^x)^2$:

$$I = \int \frac{1}{(t^2-1)(t-1)} \mathrm{d}t = \int \frac{1}{(t+1)(t-1)(t-1)} \mathrm{d}t = \int \frac{1}{(t+1)(t-1)^2} \, \mathrm{d}t$$

Descomponemos en fracciones simples, teniendo en cuenta que hay raíces múltiples en el denominador:

$$\frac{1}{(t+1)(t-1)^2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{(t-1)^2} \text{ (*)}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$1 = a\,(t-1)^2 + b\,(t+1)\,(t-1) + c\,(t+1) \;\longrightarrow\; \begin{cases} \text{si } t = 1 \to 1 = 2c \to c = \frac{1}{2} \\ \text{si } t = -1 \to 1 = 4a \to a = \frac{1}{4} \\ \text{si } t = 0 \to 1 = \frac{1}{4} - b + \frac{1}{2} \to b = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

De (*) resulta:

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{2\,(t-1)} + C$$

Deshacemos el cambio recordando que $t = \mathrm{e}^x$:

$$I = \frac{1}{4}\ln|\mathrm{e}^x + 1| - \frac{1}{4}\ln|\mathrm{e}^x - 1| - \frac{1}{2\,(\mathrm{e}^x - 1)} + C$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (t-1)^{-2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-1}\,(t-1)^{-1} + C = -\frac{1}{2\,(t-1)} + C$$

EJERCICIO 50 [S/12]

Realizaremos una integración por partes, donde la potencia será la parte a derivar y la función trigonométrica la parte a integrar:

$$\begin{aligned} \int f(x)\;\mathrm{d}x &= x^2\cdot\operatorname{sen} x - \int 2x\cdot\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \\ &= x^2\cdot\operatorname{sen} x - \left[-2x\cdot\cos x + \int 2\cos x\,\mathrm{d}x\right] = \\ &= x^2\cdot\operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,\mathrm{d}x = \\ &= x^2\cdot\operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

Como vemos, hemos aplicado dos veces la integración por partes. Y, ahora, llamando a F a la primitiva pasa por el punto $(\pi, 0)$:

$$F(\pi) = 0 \;\to\; 0 - 2\pi - 0 + C = 0 \;\to\; C = 2\pi$$

Nos queda:

$$F(x) = x^2\cdot\operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + 2\pi$$

EJERCICIO 51 [S/12]

a) Con el cambio sugerido:

$$t^2 = 1 - x \;\to\; x = 1 - t^2 \;\to\; \mathrm{d}x = -2t\,\mathrm{d}t$$

Y así:

$$I = \int \frac{\left(1-t^2\right)\cdot(-2t)}{1+t}\mathrm{d}t = \int \frac{2t^3 - 2t}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

b) Dividiendo:

$$\left(2t^3-2t\right):(t+1)\ \rightarrow\ \begin{cases} c\,(t)=2t^2-2t \\ r\,(t)=0 \end{cases}$$

Así que tenemos:

$$I=\int\left(2t^2-2t\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3-t^2+C$$

Deshacemos el cambio recordando que $t=\sqrt{1-x}$:

$$I=\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}-\sqrt{(1-x)^2}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}-1+x+C$$

EJERCICIO 52 [S/12]

Es una sencilla integral de función racional en la que el denominador es

$$x^2-1=(x+1)\,(x-1)$$

Ahí, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{(x+1)\,(x-1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}\ (*)$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$2=a\,(x-1)+b\,(x+1)\ \longrightarrow\ \begin{cases} \text{si } x=-1\rightarrow 2=-2a\rightarrow a=-1 \\ \text{si } x=+1\rightarrow 2=2b\rightarrow b=+1 \end{cases}$$

De (*) resulta:

$$I=\int\frac{-1}{x+1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=-\ln|x+1|+\ln|x-1|+C$$

EJERCICIO 53 [S/12]

Integramos por partes, donde el polinomio será la parte a derivar y la exponencial la parte a integrar:

$$\begin{aligned}\int\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x&=-\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}-\int 2x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\\ &=-\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}-\left[-2x\,\mathrm{e}^{-x}+\int 2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right]=\\ &=-\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}+2x\,\mathrm{e}^{-x}-2\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\\ &=\left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x}+2x\,\mathrm{e}^{-x}+2\,\mathrm{e}^{-x}+C\\ &=\left(x^2+2x+1\right)\mathrm{e}^{-x}+C\end{aligned}$$

$$\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=-\int\mathrm{e}^{-x}\,(-1)\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}+C$$

Como vemos, hemos aplicado dos veces la integración por partes. Y, ahora, llamando F a la primitiva pasa por el punto $P\,(-1\,,0)$:

$$F(-1) = 0 \ \rightarrow \ 0 \cdot \mathrm{e}^1 + C = 0 \ \rightarrow \ C = 0$$

Nos queda:

$$F(x) = \left(x^2 + 2x + 1\right) \mathrm{e}^{-x}$$

EJERCICIO 54 [S/13]

La función es la integral de su derivada. Procederemos por partes, donde el polinomio será la parte a derivar y la exponencial la parte a integrar:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = -(2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} + \int 2x\,\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \\ &= -(2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} + \left[-2x\,\mathrm{e}^{-x} + \int 2\,\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x\right] = \\ &= -(2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} - 2x\,\mathrm{e}^{-x} + 2\int \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \\ &= -(2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} - 2x\,\mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-x} + C \end{aligned}$$

$$\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\int \mathrm{e}^{-x}\,(-1)\ \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + C$$

La gráfica de f pasa por el origen de coordenadas:

$$f(0) = 0 \ \rightarrow \ -1 \cdot 1 - 0 - 2 \cdot 1 + C = 0 \ \rightarrow \ C = 4$$

Nos queda:

$$f(x) = (-4x - 3)\,\mathrm{e}^{-x} + 3$$

EJERCICIO 55 [S/13]

Con el cambio sugerido:

$$t^2 = x \ \rightarrow \ 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

Y así:

$$I = \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{[x=t^2]}{=} \int \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Dividiendo

$$(2t) : (t+1) \ \rightarrow \ \begin{cases} c(t) = 2 \\ r(t) = -2 \end{cases}$$

Así que tenemos:

$$I = \int \left(2 - \frac{2}{t+1}\right) \mathrm{d}t = 2t - 2\ln|t+1| + C$$

Deshacemos el cambio recordando que $t = \sqrt{x}$:

$$I = 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$$

Llamando G a la primitiva que pasa por $P(1\,,0)$:

$$G\,(1) = 0 \;\rightarrow\; 2 - 2\ln 1 + C = 0 \;\rightarrow\; C = -2$$

Nos queda:

$$G\,(x) = 2\sqrt{x} - 2\ln|1 + \sqrt{x}| - 2$$

EJERCICIO 56 [S/13]

Con el cambio sugerido:

$$t^2 = x \;\rightarrow\; 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

Y así:

$$I = \int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{[x=t^2]}{=} \int \frac{t^2+1}{1+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t^3+2t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Dividiendo

$$\left(2t^3+2t\right) : (t+1) \;\rightarrow\; \begin{cases} c\,(t) = 2t^2 - 2t + 4 \\ r\,(t) = -4 \end{cases}$$

Así que tenemos:

$$I = \int \left(2t^2 - 2t + 4 - \frac{4}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\,t^3 - t^2 + 4t - 4\ln|t+1| + C$$

Deshacemos el cambio recordando que $t = \sqrt{x}$:

$$I = \frac{2}{3}\,\sqrt{x^3} - \sqrt{x^2} + 4\sqrt{x} - 4\ln|1+\sqrt{x}| + C = \frac{2}{3}\,\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln|1+\sqrt{x}| + C$$

EJERCICIO 57 [S/13]

Es igual al ejercicio 38.

EJERCICIO 58 [S/14]

Integramos por partes, dejando el polinomio para integrar y el logaritmo para derivar:

$$I = \int x\cdot\ln\,(x+1)\;\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2\ln(1-x^2) - \int \frac{1}{2}\,x^2\cdot\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Dividiendo en la última integral:

$$\left(x^2\right) : (x+1) \;\rightarrow\; \begin{cases} c\,(x) = x - 1 \\ r\,(x) = 1 \end{cases}$$

Luego:

$$I = \frac{1}{2}\,x^2\ln\,(x+1) - \frac{1}{2}\int\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2\ln\,(x+1) - \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln\,(x+1) + C$$

Llamando F a la primitiva cuya gráfica pasa por el punto $(1\,,0)$.

$$F\,(0) = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\cdot\ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\ln 2 + C = 0 \;\rightarrow\; C = -\frac{1}{4}$$

Por fin:

$$F\left(x\right)=\frac{1}{2}\,x^{2}\ln\left(x+1\right)-\frac{1}{4}\,x^{2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln\left(x+1\right)-\frac{1}{4}$$

EJERCICIO 59 [S/14]

La función es la integral de su derivada. Integrando cada trozo:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\,x^{3}-x^{2}+a & \text{si} \quad x<0\\ \mathrm{e}^{x}-x+b & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

Como es $f(1)=1$:

$$f\left(1\right)=1\;\rightarrow\;\mathrm{e}-1+b=1\;\rightarrow\;b=2-\mathrm{e}$$

Como ha de ser continua:

$$f\left(0-\right)=f\left(0+\right)\;\rightarrow\;a=1-0+2-\mathrm{e}$$

De donde resulta $a=3-\mathrm{e}$, y definitivamente nos queda

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\,x^{3}-x^{2}+3-\mathrm{e} & \text{si} \quad x<0\\ \mathrm{e}^{x}-x+2-\mathrm{e} & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

EJERCICIO 60 [S/14]

Integramos descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{x+9}{\left(x+1\right)\left(x-3\right)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}\,(*)$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$x+9=a\left(x-3\right)+b\left(x+1\right)\;\longrightarrow\;\begin{cases}\text{si } x=3\rightarrow 12=4b\rightarrow b=3\\ \text{si } x=-1\rightarrow 8=-4a\rightarrow a=-2\end{cases}$$

De (*) la integral de la función es:

$$I=\int\frac{-2}{x+1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{3}{x-3}\,\mathrm{d}x=-2\ln|x+1|-3\ln|x-3|+C$$

Llamando F a la primitiva cuya gráfica pasa por el punto $(1\,,0)$:

$$F\left(1\right)=0\;\rightarrow\;-2\ln 2-3\ln 2+C=0\;\rightarrow\;C=5\ln 2$$

Por fin:

$$F\left(x\right)=-2\ln|x+1|-3\ln|x-3|+5\ln 2$$

Y ya

EJERCICIO 61 [S/14]

Con el cambio sugerido:

$$t^{2}=x\;\rightarrow\;2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$$

Y así:

$$I=\int\frac{1}{2x\left(x+\sqrt{x}\right)}\,\mathrm{d}x\overset{[x=t^2]}{=}\int\frac{2t}{2t^2\left(t^2+t\right)}\,\mathrm{d}t=\int\frac{2t}{2t^3\left(t+1\right)}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t^2\left(t+1\right)}\,\mathrm{d}t$$

Descomponemos en fracciones simples, teniendo en cuenta que hay raíces múltiples en el denominador:

$$\frac{1}{t^2\left(t+1\right)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t^2}+\frac{c}{t+1}\ (*)$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$1=a\,t\,(t+1)+b\,(t+1)+c\,t^2\ \longrightarrow\begin{cases}\text{si } t=0\rightarrow 1=b\rightarrow b=1\\ \text{si } t=-1\rightarrow 1=c\rightarrow c=1\\ \text{si } t=1\rightarrow 1=2a+2+1\rightarrow a=-1\end{cases}$$

De (*) resulta:

$$I=\int\frac{-1}{t}\,\mathrm{d}t+\int\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t+\int\frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t=-\ln|t|-\frac{1}{t}+\ln|t+1|+C$$

$$\int\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int t^{-2}\mathrm{d}t=\frac{1}{-1}t^{-1}+C=-\frac{1}{t}+C$$

Deshacemos el cambio recordando que $t=\sqrt{x}$:

$$I=-\ln|\sqrt{x}|-\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln|\sqrt{x}+1|+C$$

EJERCICIO 62 [S/14]

Integramos por partes, tomando la exponencial para derivar y la parte trigonométrica para integrar.

$$\begin{aligned}I=\int\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x&=\mathrm{e}^x\operatorname{sen}x-\int\mathrm{e}^x\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x=\\&=\mathrm{e}^x\operatorname{sen}x-\left[-\mathrm{e}^x\cos x+\int\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x\right]=\\&=\mathrm{e}^x\operatorname{sen}x+\mathrm{e}^x\cos x-I\end{aligned}$$

Como vemos, se ha aplicado dos veces la integración por partes y hemos obtenido

$$I=\mathrm{e}^x\left(\operatorname{sen}x+\cos x\right)-I$$

Despejando

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\left(\operatorname{sen}x+\cos x\right)+C$$

Llamando F a la primitiva cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas:

$$F\left(0\right)=0\ \rightarrow\ \frac{1}{2}+C=0\ \rightarrow\ C=-\frac{1}{2}$$

Por fin:

$$F\left(x\right)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\left(\operatorname{sen}x+\cos x\right)-\frac{1}{2}$$

EJERCICIO 63 [S/15] Calcula

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$$

Primero efectuemos la división:

$$\left(-x^2\right):\left(x^2+x-2\right) \;\rightarrow\; \begin{cases} c\,(x) = -1 \\ r\,(x) = x-2 \end{cases}$$

Luego:

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int \left(-1+\frac{x-2}{x^2+x-2}\right)\mathrm{d}x \text{ [*]}$$

Los ceros del denominador son:

$$x^2+x-2=0 \rightarrow x=-2\,,\, x=1$$

Ahí, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x-2}{(x+2)\,(x-1)} = \frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-1} \text{ [**]}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$x-2 = a\,(x-1)+b\,(x+2) \;\longrightarrow\; \begin{cases} \text{si } x=-2 \rightarrow -4=-3a \rightarrow a=\frac{4}{3} \\ \text{si } x=+1 \rightarrow -1=3b \rightarrow b=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

De [*] y [**] resulta:

$$I = \int -1\,\mathrm{d}x + \int \frac{4/3}{x+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-1/3}{x-1}\,\mathrm{d}x = -x+\frac{4}{3}\ln|x+2|-\frac{1}{3}\ln|x-1|+C$$

EJERCICIO 64 [S/15]

Si la tangente a la gráfica de f en $P\,(1\,,2)$ es horizontal , deducimos dos cosas:

1. La pendiente de la tangente es la derivada: $m=0 \Longrightarrow f'\,(1)=0$
2. Sustituyendo la abscisa sale la ordenada: $x=1 \longmapsto y=2 \Longrightarrow f\,(1)=2$

Integrando la derivada segunda obtenemos la derivada primera. Lo haremos por partes:

$$f'\,(x) = \int \underbrace{1}_{i}\,\underbrace{\ln x}_{d}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C = x\,(\ln x - 1)+C$$

De [1]:

$$f'\,(1)=0 \;\rightarrow\; -1+C=0 \rightarrow\; C=1$$

Integramos ahora la derivada primera y sale ya la función. Volvemos por partes:

$$f\,(x) = \int \underbrace{x}_{i}\cdot\underbrace{(\ln x-1)}_{d}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\,(\ln x-1)-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\,(\ln x-1)-\frac{1}{4}x^2+D$$

De [2]:

$$f\,(1)=2 \;\rightarrow\; -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+D=2 \;\rightarrow\; D=\frac{11}{4}$$

Queda

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\,x^{2}\ln x-\frac{3}{4}\,x^{2}+\frac{11}{4}$$

EJERCICIO 65 [S/15]

Calcula

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-2\right)\sqrt{x+2}}$$

Sugerencia: $\sqrt{x+2}=t$.

Con el cambio sugerido:

$$t^{2}=x+2\;\rightarrow\;x=t^{2}-2\;\rightarrow\;\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$$

Y así:

$$I=\int\frac{1}{\left(x-2\right)\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x\overset{[x=t^{2}-2]}{=}\int\frac{2t}{\left(t^{2}-4\right)\cdot t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{2}{t^{2}-4}\,\mathrm{d}t$$

Ahí, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{\left(t+2\right)\left(t-2\right)}=\frac{a}{t+2}+\frac{b}{t-2}\;[*]$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$2=a\left(t-2\right)+b\left(t+2\right)\;\longrightarrow\;\begin{cases}\text{si } t=-2\rightarrow 2=-4a\rightarrow a=-\frac{1}{2}\\[2mm]\text{si } t=+2\rightarrow 2=4b\rightarrow b=+\frac{1}{2}\end{cases}$$

De [*] resulta:

$$I=\int\frac{-1/2}{t+2}\,\mathrm{d}t+\int\frac{1/2}{t-2}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\ln|t+2|+\frac{1}{2}\ln|t-2|+C$$

Deshacemos el cambio recordando que $t=\sqrt{x+2}$:

$$I=-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{x+2}+2|+\frac{1}{2}\ln|\sqrt{x+2}-2|+C$$

EJERCICIO 66 [S/15]

Como en el ejercicio 62, obteniendo:

$$\int\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{2}{5}\operatorname{sen}x-\frac{1}{5}\cos x\right)+C$$

EJERCICIO 67 [S/15]

a) Como F es una primitiva de f:

$$F'\left(\mathrm{e}\right)=f\left(\mathrm{e}\right)=\frac{\ln\mathrm{e}}{2\,\mathrm{e}}=\frac{1}{2\,\mathrm{e}}$$

b) Necesitamos obtener la expresión de la primitiva de f, así que integramos. Observamos que es una integral compuesta de tipo potencial:Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = \mathrm{e}$.

$$F(x) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C = \frac{1}{4}\ln^2 x + C$$

Como $F(1) = 2$:

$$\frac{1}{4}\ln^2 1 + C = 2 \rightarrow C = 2.$$

Por fin podemos obtener la ecuación de la recta tangente pedida:

$$y - F(\mathrm{e}) = F(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) \rightarrow y - \frac{9}{4} = \frac{1}{2\,\mathrm{e}}(x - \mathrm{e})$$

Limpiando:

$$y = \frac{1}{2\,\mathrm{e}}x + \frac{7}{4}$$

EJERCICIO 68 [S/15]

Bueno, un delicioso ejercicio algebraico.

Primero hay que efectuar la división, después expresar como suma de fracciones simples (encima con raíces múltiples en el denominador) y finalmente integrar. Un bonito ejercicio para una prueba de selectividad:

$$\frac{x^4+1}{x^2(x-1)} = x + 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}$$

Luego:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{x} - \ln x + 2\ln|x-1| + C$$

Como $F(1) = 2$:

$$2 + 2 + \frac{1}{2} + \ln 2 + 0 + C = \ln 2 \rightarrow C = -\frac{9}{2}$$

Por fin acabamos:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{x} - \ln x + 2\ln|x-1| - \frac{9}{2}$$