TEMA 2

Problemas de Optimización

Ejercicios de Selectividad
sobre
Problemas de Optimización

31 modelos
totalmente resueltos

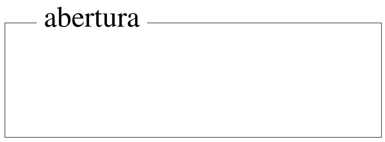
Cursos
1996 – 2022

José Álvarez Fajardo

Enunciados

EJERCICIO 1 [S/96] [R]

En un terreno llano se desea acotar una parcela rectangular usando 120 m. de valla metálica para vallarla, dejando en uno de sus lados una abertura de 20 m. sin vallar tal y como se muestra:



Halla las dimensiones de la parcela rectangular de área máxima que puede acotarse de esa manera y el valor de dicha área.

EJERCICIO 2 [S/96] [R=36]

Se toma una cuerda de 5 metros de longitud y se unen los extremos. Entonces podemos construir con ella triángulos isósceles de diferentes medidas. Calcula, de manera razonada, las dimensiones del que tiene mayor área.

EJERCICIO 3 [S/96] [R=43]

Considera la curva de ecuación $y = x\sqrt{x} \quad (x \geq 0)$ y el punto $P = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

a) ¿Cuál es el punto de la curva más cercano a P ?

b) Deduce de forma razonada si existe o no un punto en la curva que sea el que está más lejos de P .

EJERCICIO 4 [S/96] [R]

En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta a 500 metros río arriba se ha construido una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta 1.200 ptas. el metro y que el tendido sobre el agua cuesta 2.000 ptas. el metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?

EJERCICIO 5 [S/97] [R=41]

El alcalde de un pueblo quiere cercar un recinto rectangular cerrado para celebrar las fiestas. Para ello aprovecha una tapia existente como uno de los lados y dispone de 300 m. de tela metálica para hacer los otros tres.

a) ¿Podrías indicar las dimensiones del recinto acotado de esa forma cuya área es la mayor posible?

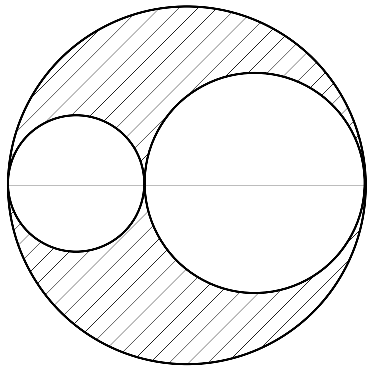
b) La comisión de fiestas del pueblo ha calculado que para montar las atracciones, pista de baile, etc., necesitan 8000 m^2. Teniendo en cuenta los cálculos realizados en el apartado anterior, ¿será suficientemente grande el recinto que quiere preparar el alcalde?

EJERCICIO 6 [S/97] [R=43]

Desde la Tierra, que suponemos situada en el origen de coordenadas del plano, se observa un objeto que sigue una trayectoria de ecuación $xy = 16$ (donde las distancias se miden en años-luz).¿Cuáles son las coordenadas del punto de la trayectoria cuya distancia a la Tierra es mínima y cuánto vale dicha distancia?

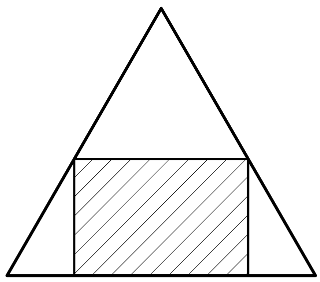
EJERCICIO 7 [S/97] [R]

Dada una circunferencia de radio *r*, se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a la circunferencia dada. ¿Qué longitud debe tener cada uno de estos diámetros para que sea máxima el área de la región comprendida entre las circunferencias interiores y la exterior (la región rayada en la figura)?



EJERCICIO 8 [S/97] [R]

Dado un triángulo isósceles de base 8 cm. Y altura 5 cm., calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse dentro de dicho triángulo como se indica en la figura



EJERCICIO 9 [S/97]

a) Si el precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso, demuestra que siempre se pierde valor al partirlo en dos trozos.

b) Como puedes suponer, puede partirse en dos trozos con diferentes pesos de múltiples formas. Determina la partición que origina la máxima pérdida de valor. Razona tu respuesta.

EJERCICIO 10 [S/97+] [R=43]

Halla el punto P de la gráfica de la función $f : (-3\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{2x+6}$ que está más próximo al origen de coordenadas.

EJERCICIO 11 [S/97+] [R=38]

En las páginas de un libro ha de imprimirse un texto que ocupa 200 cm^2. Los márgenes laterales han de ser de 4 cm y los márgenes superior e inferior de 6 cm cada uno. Calcula las dimensiones de cada página para que la cantidad de papel necesario sea mínima.

EJERCICIO 12 [S/97+] [R=19]

Se desea construir un depósito cilíndrico sin tapa que tenga 2 m^3 de volumen. Determina la altura del depósito y el radio de su base para que la cantidad de material empleado en su fabricación sea mínimo.

EJERCICIO 13 [S/98] [R=39]

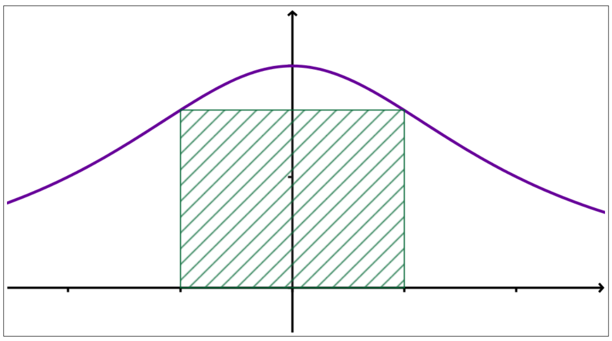
Se quiere construir un envase cerrado con forma de cilindro cuya área total (incluyendo las tapas) sea 900 cm^2. ¿Cuáles deben el radio de la base y la altura para que el volumen del envase sea lo más grande posible? ¿Cuánto vale ese volumen máximo?

EJERCICIO 14 [S/98]

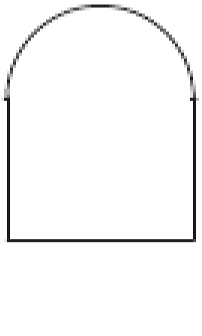
Una compañía aérea ofrece vuelos para grupos de estudiantes con las siguientes condiciones: para organizar un vuelo, el número mínimo de pasajeros debe ser 80, los cuales pagarían 210 euros cada uno. Sin embargo, esta tarifa se reduce en 1 euro por cada pasajero que exceda el número de 80. Suponiendo que la capacidad de cada avión es de 105 pasajeros y que el coste para la compañía es de 100 euros por plaza ocupada, ¿qué números de pasajeros ofrece el máximo y, respectivamente, el mínimo beneficio para la compañía?

EJERCICIO 15 [S/99] [R]

De entre todos los rectángulos inscritos, como indica la figura, entre la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y el eje OX, halla el de mayor área.



EJERCICIO 16 [S/99+] [R=42]



Se desea construir una ventana como la de la figura (la parte curva es una semicircunferencia) que tenga un perímetro de 6 m

¿Qué dimensiones debe tener para que su superficie sea máxima?

EJERCICIO 17 [S/99+] [R=38]

Una imprenta debe diseñar carteles en los que la zona impresa debe ocupar $100\ \text{cm}^2$ y hay que dejar 4 cm de margen derecho, 4 cm de margen izquierdo, 3 cm de margen superior y 2 cm de margen inferior. Calcula las dimensiones que debe tener el cartel para que se utilice la menor cantidad de papel que sea posible.

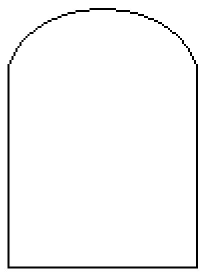
EJERCICIO 18 [S/00] [R=41]

Se dispone de 288.000 pts. para vallar un terreno rectangular colindante con un camino recto. Si el precio de la valla que ha de ponerse en el lado del camino es de 800 pts/m y el de la valla de los restantes lados es de 100 pts/m, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno rectangular de área máxima que puede vallarse?

EJERCICIO 19 [S/00] [R]

Una empresa quiere fabricar vasos de cristal de forma cilíndrica con una capacidad de 250 centímetros cúbicos. Para utilizar la mínima cantidad posible de cristal, se estudian las medidas apropiadas para que la superficie total del vaso sea mínima. ¿Cuáles deben ser esas medidas? Justifica la respuesta.

EJERCICIO 20 [S/01] [R]



Determina las dimensiones de una puerta formada por un rectángulo y un semicírculo (como en la figura), sabiendo que es la que tiene un perímetro mínimo entre las que tienen área igual a 2 m^2.

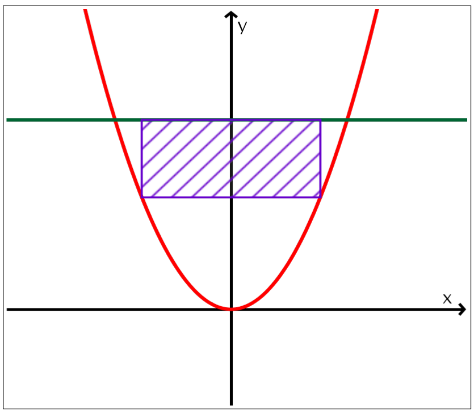
EJERCICIO 21 [S/01] [R=28]

Un hilo de alambre de 1 m. De longitud se corta en dos trozos formando con uno una circunferencia y con el otro un cuadrado. Prueba que la suma de las áreas es mínima cuando el lado del cuadrado es el doble que el radio de la circunferencia.

EJERCICIO 22 [S/02] [R]

Considera el recinto limitado por la curva $y = \frac{1}{3}x^2$ y la recta $y = 9$.

De entre todos los rectángulos situados como el de la figura, determina el que tiene área máxima.



EJERCICIO 23 [S/03] [R=40]

Consideremos todos los rectángulos que tienen uno de sus vértices en el origen de coordenadas y el opuesto de este vértice en la curva

$$y = \frac{2x^2}{x^2 - 1} \quad (x > 1)$$

Y que, además, uno de sus lados está situado sobre el semieje positivo de abscisas y otro lado sobre el semieje positivo de ordenadas. Halla el que tiene área mínima.

EJERCICIO 24 [S/04] [R]

Se desea construir una caja de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1 € / cm^2 y para la base se emplea un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

EJERCICIO 25 [S/04] [R=24]

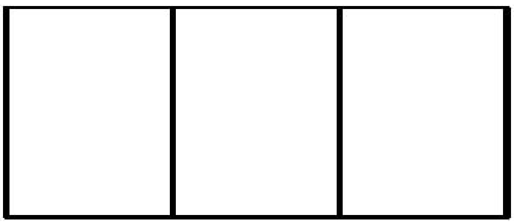
Se quiere fabricar una caja abierta de chapa con base cuadrada y con 32 litros de capacidad. Halla las dimensiones de la caja que precisa la menor cantidad de chapa.

EJERCICIO 26 [S/05] [R=43]

Determina los puntos de la parábola de ecuación $y = 5 - x^2$ que están mas próximos al origen de coordenadas. Calcula la distancia entre los puntos obtenidos y el origen de coordenadas.

EJERCICIO 27 [S/05] [R]

De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12.800 m^2 dividido en tres parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo. Si se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas), determina las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



EJERCICIO 28 [S/06] [R]

Dividimos en dos trozos un alambre de 1 metro: con uno formamos una circunferencia y con el otro un cuadrado. Halla las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de los recintos sea mínima.

EJERCICIO 29 [S/07] [R~34]

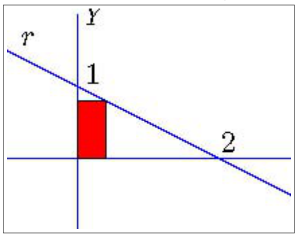
Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es 2 y 3 euros por centímetro cuadrado, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 metro. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?

EJERCICIO 30 [S/07]

Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

EJERCICIO 31 [S/07]

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación (ver figura), determina el que tiene mayor área.



EJERCICIO 32 [S/08] [R]

De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto $(1\,,2)$, encuentra aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Halla el área de dicho triángulo.

EJERCICIO 33 [S/08] [R]

De entre todos los rectángulos de perímetro 8 *cm*, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

EJERCICIO 34 [S/09] [R]

Se divide un segmento de longitud L = 20 cm. en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

EJERCICIO 35 [S/09] [R]

De entre todos los rectángulos cuya área mide 16 cm^2, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud .

EJERCICIO 36 [S/09] [R]

De todos los triángulos cuya base y altura suman 20 cm., ¿qué base tiene el de área máxima?

EJERCICIO 37 [S/10] [R]

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $90\ \mathrm{cm}$. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo?

(Recuerda que el volumen del cono es: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$)

EJERCICIO 38 [S/10] [R]

Una hoja de papel tiene que contener 18 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm .

Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

EJERCICIO 39 [S/11] [R]

Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m^2 . Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

EJERCICIO 40 [S/11] [R]

En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y = -x^2 + 3$.

Determina las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

EJERCICIO 41 [S/11] [R]

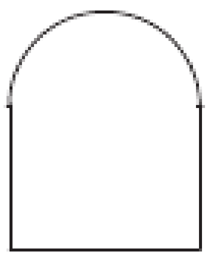
Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro.

¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?

EJERCICIO 42 [S/11] [R]

Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo.

De entre todas las ventanas normandas de perímetro 10 m , halla las dimensiones del marco de la de área máxima.



EJERCICIO 43 [S/11] [R]

Sea $f : [1 , +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2 , 0)$. ¿Cuál es esa distancia?

EJERCICIO 44 [S/12] [R=34]

Un alambre de 2 m de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.

EJERCICIO 45 [S/12] [R]

De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 5 unidades, determina las dimensiones del de área máxima.

EJERCICIO 46 [S/13] [R=8]

Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.

EJERCICIO 47 [S/13] [R~34]

Un alambre de 10 m. de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triangulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

EJERCICIO 48 [S/13] [R]

Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}$ cm de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.

EJERCICIO 49 [S/14] [R=19]

Construimos un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapa, con una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

EJERCICIO 50 [S/14]

De entre todos los número reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

EJERCICIO 51 [S/14]

De entre todos los triángulos rectángulos de área $8\ \mathrm{cm}^2$, determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.

EJERCICIO 52 [S/15] [R=24]

Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el mínimo posible.

EJERCICIO 53 [S/15] [R=41]

Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80 euros/metro y la de los otros lados 10 euros/metro, halla las dimensiones del campo de área máxima que puede vallarse con 28 800 euros.

EJERCICIO 54 [S/15] [R]

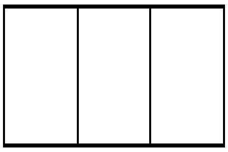
Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un rio. El terreno debe tener 180000 m^2 para producir suficiente pasto para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita vallado?

EJERCICIO 55 [S/15] [R~66]

Queremos fabricar una caja con base cuadrada, de tal manera que la altura de la caja más el perímetro de la base sumen 60 cm. Determina sus dimensiones para que contenga el mayor volumen posible.

EJERCICIO 56 [S/16] [R=27]

De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12 800 m² dividido en 3 parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo:



Se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas). Determina las dimensiones del solar y de cada una de las tres parcelas para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.

EJERCICIO 57 [S/16] [R]

Se dispone de un cartón cuadrado de 50 cm de lado para construir una caja sin tapadera a partir del cartón. Para ello, se corta un cuadrado de x cm de lado en cada una de las esquinas.

Halla el valor de x para que el volumen de la caja sea máximo y calcula dicho volumen.

EJERCICIO 58 [S/16] [R=19]

Se quiere construir un bote de conservas cilíndrico, con tapa, de un litro de capacidad. Calcula las dimensiones del bote para que en su construcción se utilice la menor cantidad posible de hojalata.

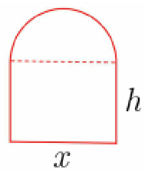
EJERCICIO 59 [S/17] [R=28]

Una cuerda de un metro de longitud se divide en dos trozos con los que se construyen un cuadrado y una circunferencia respectivamente.

Determina, si es posible, las longitudes de los trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

EJERCICIO 60 [S/17] [R=20]

Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta ha de tener dieciséis metros cuadrados.



Si es posible, determina la base x para que el perímetro sea mínimo.

EJERCICIO 61 [S/17] [R~19]

Se necesita construir un depósito cilíndrico, con tapas inferior y superior, con capacidad de 20 π m³ . El material para las tapas cuesta 10 euros cada m² y el material para el resto del cilindro 8 euros cada m².

Calcula, si existe, el radio de las tapas y la altura del cilindro que hace que el coste total sea mínimo.

EJERCICIO 62 [S/17] [R=38]

Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm2 , el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno.

Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.

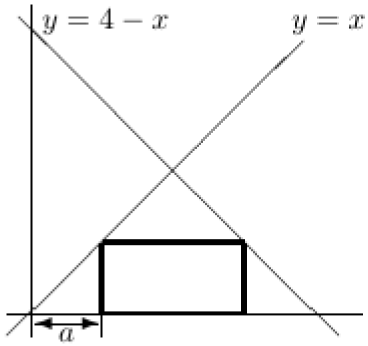
EJERCICIO 63 [S/18] [R]

Se desea construir un rectángulo, como el de la figura, de área máxima. La base está situada sobre el eje OX, un vértice está en la recta $y = x$ y el otro, en la recta $y = 4 - x$.

a) Halla la altura del rectángulo en función de a (ver la figura).

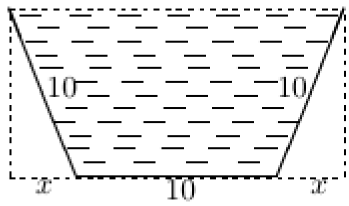
b) Halla la base del rectángulo en función de a.

c) ¿Para qué valor de a es máximo el área del rectángulo?



EJERCICIO 64 [S/18] [R]

Se desea construir una canaleta, para la recogida de agua, cuya sección es como la de la figura. La base y los costados deben medir 10 cm y se trata de darle la inclinación adecuada a los costados para obtener una sección de área máxima.



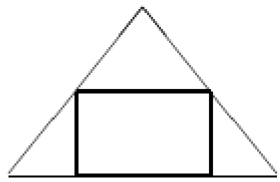
a) Halla la altura de la canaleta en función de x (ver la figura).

b) Halla el área de la sección de la canaleta en función de x.

c) Encuentra el valor de x que hace máximo dicho área.

EJERCICIO 65 [S/18] [R=8]

Considera un triángulo isósceles en el que el lado desigual mide 8 cm y la altura correspondiente mide 5 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en dicho triángulo (ver figura).



EJERCICIO 66 [S/18] [R]

Se desea construir una caja sin tapadera de base cuadrada. El precio del material es de 18 euros / m² para los laterales y de 24 euros / m² para la base. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir si disponemos de 50 euros.

EJERCICIO 67 [S/19] [R=15, R~40]

Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \dfrac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de f y la recta $y = 0$.

EJERCICIO 68 [S/20] [R=1]

Una familia desea acotar una zona rectangular en el jardín de su casa para dedicarla al cultivo ecológico. Para ello dispone de 96 metros de valla, pero necesita una abertura de 4 metros en uno de los laterales para instalar una puerta. Determina las dimensiones de la zona rectangular de área máxima que puede acotarse de esta manera y el valor del área.

EJERCICIO 69 [S/22]

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f\left(x\right) = 4 - \frac{x^2}{3} \quad , \quad g\left(x\right) = \frac{x^2}{6} - 2$$

EJERCICIO 70 [S/22] [R~15 R~40]

Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f\left(x\right) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, teniendo su base sobre dicho eje.

EJERCICIO 71 [S/22] [R]

Considera la función $f : [0\,,3] \to \mathbb{R}$ definida por

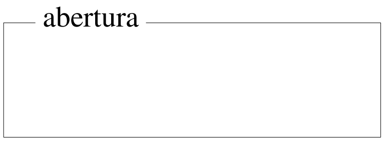
$$f(x) = 3x - 2$$

Calcula el punto de la gráfica de f más cercano al punto $(2\,,6)$. ¿Hay alguno que sea el más alejado?

Soluciones

EJERCICIO 01 [S/96]

[Variables y magnitud que debemos optimizar]



Comencemos señalando las variables: llamemos x al largo (base) de ese rectángulo e y al ancho (altura), medidos en metros.

Queremos que sea máxima su superficie:

$$S = x \cdot y$$

[Ligadura]

$$\text{longitud valla} = 120 \;\rightarrow\; 2y + x + x - 20 = 120 \;\rightarrow\; 2x + 2y = 140 \;\rightarrow\; x + y = 70 \;\rightarrow\; y = 70 - x$$

[Expresión de la función]

Tenemos que <u>maximizar</u>

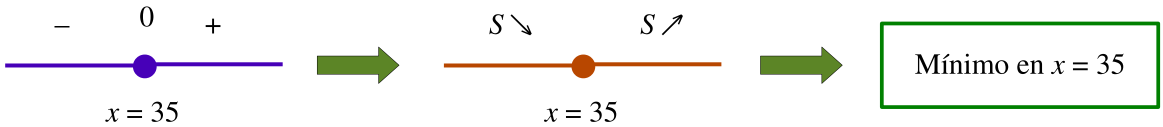
$$S = x \cdot (70 - x) = 70x - x^2$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S' = 70 - 2x \;\rightarrow\; 70 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 35$$

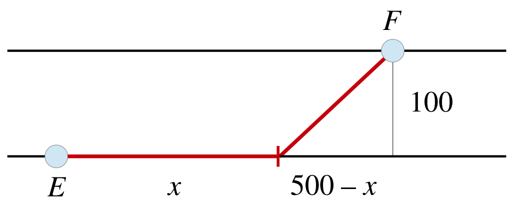
Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de S:



[Conclusión]

Concluimos que el área es máxima cuando la parcela es un cuadrado de 35 metros de lado, teniendo en ese caso una superficie de 1225 metros cuadrados

EJERCICIO 04* [S/96]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Vamos a colocar x metros paralelos al río. Luego y metros restantes en línea recta hasta el punto del margen opuesto, como se muestra en la figura.

El coste es:

$$c = 12x + 20y$$

[Ligadura]

Usando el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que se aprecia:

$$y = \sqrt{100^2 + (500 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 1000x + 260000}$$

[Expresión de la función]

Tenemos que <u>minimizar</u>

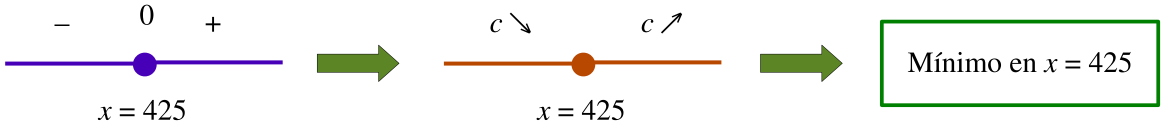
$$c\,(x) = 12x + 20\sqrt{x^2 - 1000x + 260000}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$c'\,(x) = 12 + \frac{20x - 10000}{\sqrt{x^2 - 1000x + 260000}} = 0 \to \frac{20x - 10000}{\sqrt{x^2 - 1000x + 260000}} = -12 \to x = 425$$

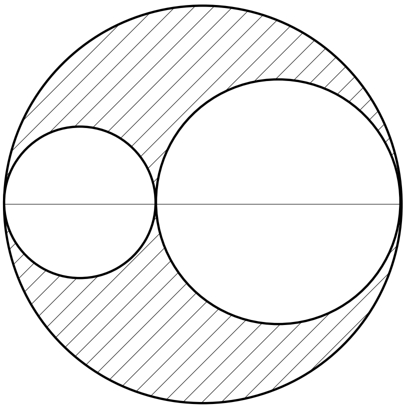
Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de c:



[Conclusión]

Concluimos que, situados en la planta eléctrica, tiramos 425 metros paralelos al río y desde ahí el resto en línea recta, sobre el río, hasta la fábrica.

EJERCICIO 07: [S/97]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

El área rayada es igual al de la circunferencia exterior menos las áreas de las interiores.. Si llamamos x e y al radio de las circunferencias interiores, la superficie que debemos maximizar es:

$$S = \pi r^2 - \pi x^2 - \pi y^2$$

[Ligadura]

Observemos que la suma de los diámetros de las circunferencias interiores es igual al de la exterior, así:

$$2x + 2y = 2r \rightarrow x + y = r \rightarrow y = r - x$$

[Expresión de la función]

Debemos maximizar la función

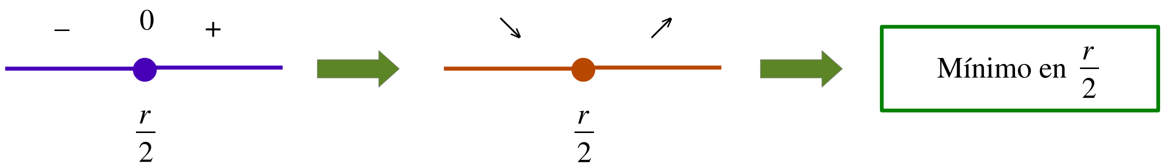
$$S(x) = \pi r^2 - \pi x^2 - \pi (r - x)^2$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x) = 2\pi (r - 2x) = 0 \rightarrow 2 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{r}{2}$$

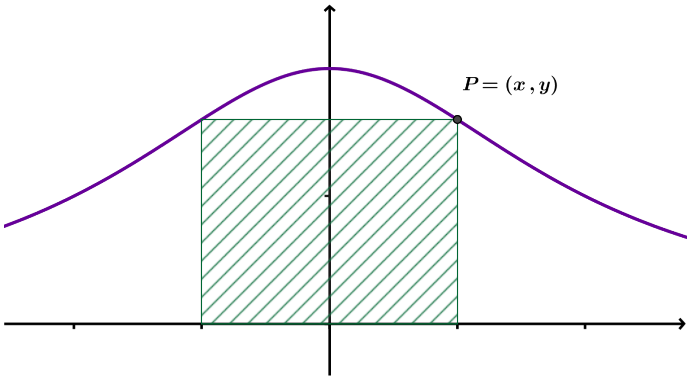
Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación:



[Conclusión]

Así, las dos circunferencias interiores deben tener radios iguales a la mitad del radio de la original, o lo que es igual, los dos diámetros iguales a la mitad del diámetro de la circunferencia exterior.

EJERCICIO 15 [S/99]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Sea $P = (x\,, y)$ el vértice del rectángulo situado en la curva, con $x > 0$.

Observemos que la base del rectángulo es $2x$ y que altura es y.

El área del rectángulo es lo que tenemos que maximizar:

$$S = 2x \cdot y \quad (x > 0)$$

[Ligadura]

Como el punto $P = (x\,, y)$ está en la curva, se tiene que cumplir la ecuación:

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

[Expresión de la función]

Queremos así maximizar la función

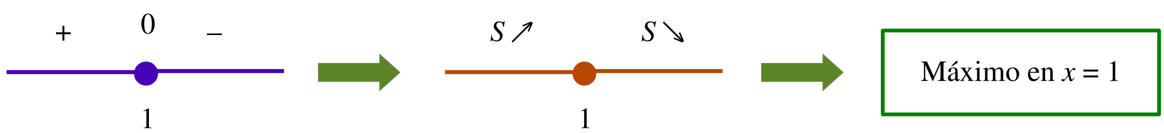
$$S = 2x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2} \quad (x > 0)$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S' = \frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 0 \;\rightarrow\; 2-2x^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \;\rightarrow\; x = 1$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación:

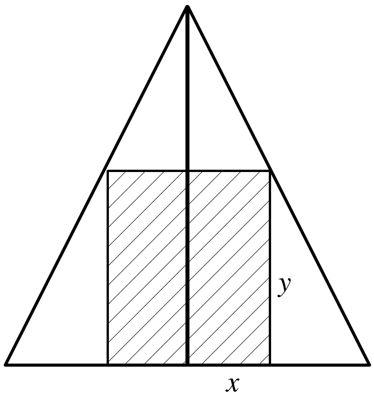


[Conclusión]

Concluimos que la base del rectángulo buscado es $2x = 2$ y la altura $y = \dfrac{1}{2}$ y por ello tiene de perímetro

$$p = 2 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ cm}$$

EJERCICIO 15 [S/97]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Sea x a la mitad de la base e y la altura del rectángulo. La superficie que debemos maximizar es:

$$S = 2x \cdot y = 2xy$$

[Ligadura]

A izquierda y derecha del rectángulo quedan dos triángulos con $4 - x$ de base e y de altura y encima de él otro triángulo de base 2x y altura 5-y. La suma de las áreas de esas cuatro figuras es igual a la del triángulo exterior:

$$2xy + 2 \cdot \frac{(4-x) \cdot y}{2} + \frac{2x \cdot (5-y)}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2}$$

Simplificando:

$$4y + 5x = 20 \ \rightarrow \ y = 5 - 1.25x$$

[Expresión de la función]

Queremos así <u>maximizar</u> la función

$$S(x) = 2x(5 - 1.25x) = 10x - 2.5x^2$$

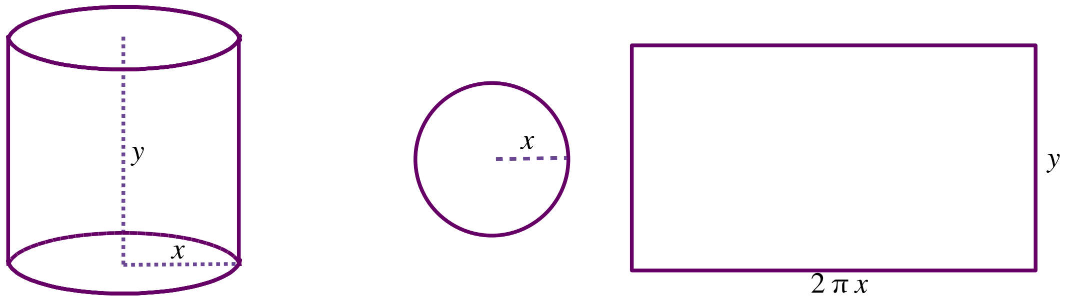
[Estudio de la derivada / Extremos]

Es fácil averiguar que alcanza su máximo para $x = 2$.

[Conclusión]

Concluimos que el rectángulo buscado tiene 4 cm de base y 2.5 cm de altura.

EJERCICIO 19: [S/00]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Si llamamos x al radio de la base e y a la altura del cilindro, la superficie para minimizar es:

$$S = S_{base} + S_{lateral} = \pi x^2 + 2\pi x \cdot y = \pi x^2 + 2\pi x\, y$$

[Ligadura]

El volumen del vaso es igual a la superficie de la base por su altura, luego:

$$V = 250 \to \pi x^2 \cdot y = 250 \to y = \frac{250}{\pi x^2} \quad (x > 0)$$

[Expresión de la función]

Así que debemos minimizar la función

$$S\left(x\right) = \pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{250}{\pi x^2} = \pi x^2 + \frac{500}{x}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Calculamos la derivada e igualamos a cero:

$$S' = 2\pi x - \frac{500}{\pi x^2} = 0 \to 2\pi x = \frac{500}{x^2} \to x^3 = \frac{250}{2\pi} \to x = \sqrt[3]{\frac{250}{2\pi}}$$

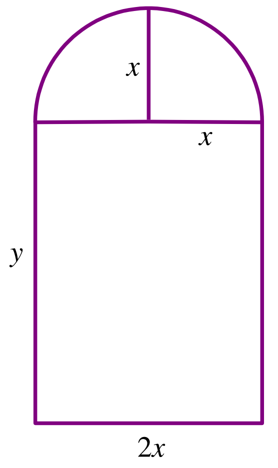
Puede comprobarse que se trata de un mínimo.

[Conclusión]

Así, el radio de la base del vaso debe medir $\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4.3 \text{ cm}$ y la altura debe medir

$$y = \frac{250}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{250}{\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4.3 \text{ cm}$$

EJERCICIO 20: [S/01]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Partiendo de la situación dibujada aquí al lado, el perímetro total es igual a la suma de la mitad de la longitud de la circunferencia ($2\pi x$) más los tres lados del rectángulo. Queremos minimizar

$$L = 2y + 2x + \pi x$$

[Ligadura]

El área total (igual a 2) es igual a la suma de la superficie del rectángulo (base por altura) más la mitad de la superficie del círculo (pi por el cuadrado del radio):

$$2x \cdot y + \frac{1}{2}\pi\, x^2 = 2 \to y = \frac{2 - \frac{\pi}{2}x^2}{2x} \to y = \frac{1}{x} - \frac{\pi}{4}x$$

[Expresión de la función]

Nos queda que la función que debemos <u>maximizar</u>:

$$L = \frac{2}{x} - \frac{\pi}{2}x + 2x + \pi\, x = \frac{2}{x} + \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) x$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

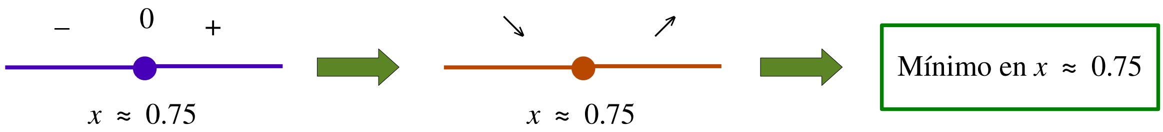
Derivamos:

$$L' = -\frac{2}{x^2} + \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Igualando a cero:

$$\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{x^2} \to x^2 = \frac{2}{2 + \frac{\pi}{2}} = \frac{4}{4 + \pi} \to x = \frac{2}{\sqrt{4 + \pi}} \approx 0.75$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de la longitud:



[Conclusión]

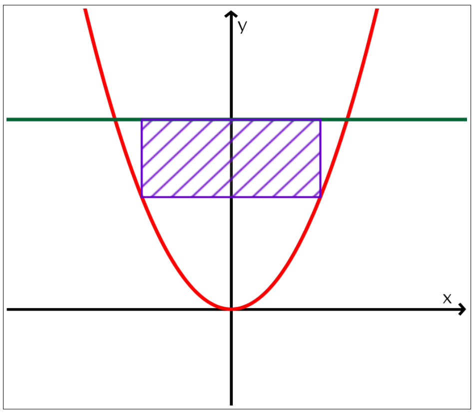
Así, la anchura es igual al doble del radio del círculo superior:

$$2 \cdot x = \frac{4}{\sqrt{\pi + 4}} \text{ cm}$$

Y la altura de la zona rectangular es

$$y = \frac{\sqrt{\pi + 4}}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{\pi + 4}} = \frac{2}{\sqrt{\pi + 4}} \text{ cm}$$

EJERCICIO 22 [S/02]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Llamemos x a la mitad de la base del rectángulo y h a su altura. Así debemos maximizar:

$$S = 2x \cdot h = 2xh$$

[Ligadura]

Observemos que la ordenada del vértice superior derecho es $y = 9$ y que la del vértice inferior izquierdo es $y = \frac{1}{3}x^2$, al estar sobre la parábola; por ello:

$$h = 9 - \frac{1}{3}x^2$$

[Expresión de la función]

Así, la función que debemos maximizar es

$$S(x) = 2x \cdot (9 - \frac{1}{3}x^2) = 18x - \frac{2}{3}x^3$$

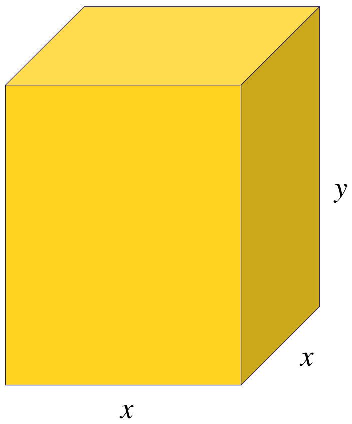
[Estudio de la derivada / Extremos]

Es fácil averiguar que alcanza su máximo para $x = 3$.

[Conclusión]

Concluimos que el rectángulo buscado tiene 6 de base y $9 - \frac{1}{3} \cdot 3^2 = 6$ de altura (es un cuadrado, pues).

EJERCICIO 24 [S/04]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Llamemos x al lado de la base (cuadrada) e y a la altura. La tapa cuadrada y los cuatro laterales rectangulares cuestan 1 euro el cm² y la base cuadrada 1.5 euros el cm² . Así que el coste es

$$C = 1 \cdot x^2 + 1 \cdot 4 \cdot xy + 1.5 \cdot x^2 = 2.5x^2 + 4xy$$

[Ligadura]

Como el volumen de la caja (superficie de la base por la altura) es 80:

$$V = S_{base} \cdot h \to x^2 \cdot y = 80 \to y = \frac{80}{x^2}$$

[Expresión de la función]

Luego tenemos que <u>minimizar</u> la función coste:

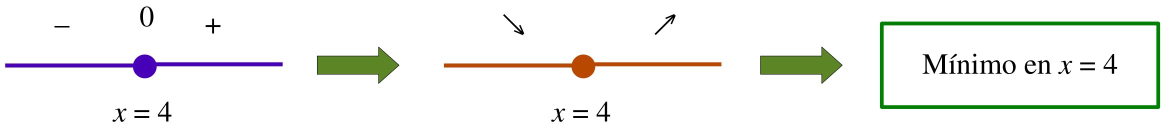
$$C\left(x\right) = 2.5x^2 + 4x \cdot \frac{80}{x} = 2,5x^2 + \frac{320}{x}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$C'\left(x\right) = 5x - \frac{320}{x^2} = 0 \to 5x = \frac{320}{x^2} \to x = \sqrt[3]{\frac{320}{5}} = 4$$

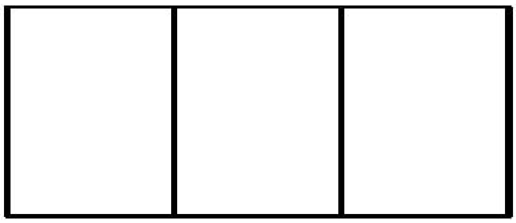
Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación:



[Conclusión]

Concluimos que la caja tiene 4 cm de lado y una altura de 5 cm.

EJERCICIO 27: [S/05]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Llamamos x a la base e y a la altura de ese solar rectangular. Tenemos que minimizar la longitud de la valla:

$$L = 2x + 4y$$

[Ligadura]

Como su superficie es de 12800 m^{2}:

$$S = 12800 \rightarrow x \cdot y = 12800 \rightarrow y = \frac{12800}{x}$$

[Función]

Queremos minimizar

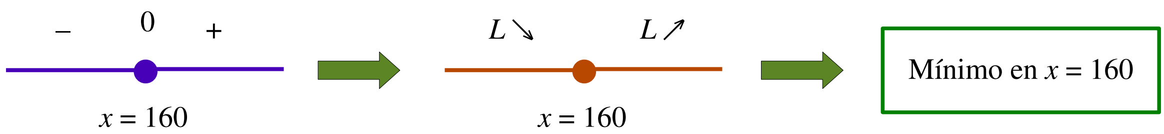
$$L = 2x + 4 \cdot \frac{12800}{x} = 2x + \frac{51200}{x}$$

[Derivada / Extremo]

Derivamos e igualamos a cero:

$$L' = 2 - \frac{51200}{x^2} = 0 \rightarrow 2 = \frac{51200}{x^2} \rightarrow 2x^2 = 51200 \rightarrow x = 160$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación:

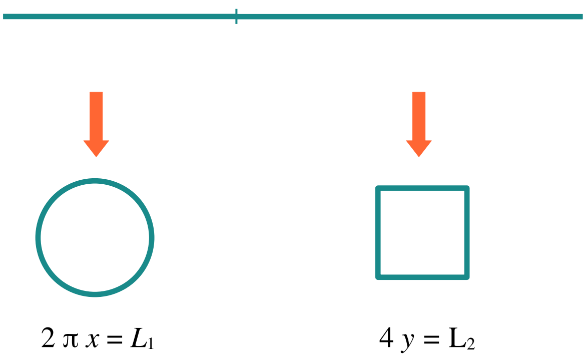


[Conclusión]

Luego el solar tiene 160 m de largo y 12800 : 160 = 80 m de ancho, siendo la longitud de la valla en total

$$L = 2 \cdot 160 + 4 \cdot 80 = 640 \text{ m}.$$

EJERCICIO 28: [S/06]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Si llamamos x al radio de la circunferencia e y al lado del cuadrado, la suma de las áreas del cuadrado y del círculo es:

$$S = \pi\, x^2 + y^2$$

A la izquierda hemos señalado la construcción.

[Ligadura]

La suma del perímetro de la circunferencia y del cuadrado es igual a la longitud del alambre:

$$L_{circ} + L_{cuad} = L \;\rightarrow\; 2\pi x + 4y = 1 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{4}(1 - 2\pi x)$$

[Expresión de la función]

La función que tenemos que maximizar es:

$$S(x) = \pi x^2 + \frac{1}{16}(1 - 2\pi x)^2 = \pi x^2 + \frac{1}{16} + \frac{\pi^2}{4}x^2 - \frac{\pi}{4}x$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x) = 2\pi x + \frac{\pi^2}{2}x - \frac{\pi}{4} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi/4}{2\pi + \pi^2/2} = \frac{1}{2\pi + 8}$$

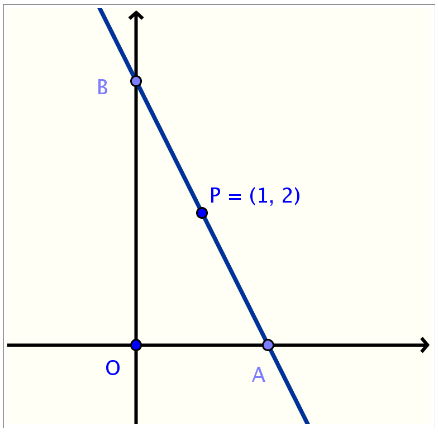
Puede comprobarse fácilmente que se trata de un máximo.

[Conclusión]

Así concluimos que la longitud, en centímetros, de cada uno de los trozos es, respectivamente:

$$L_1 = 2\pi x = \frac{\pi}{\pi + 4} \text{ y } L_2 = 1 - \frac{\pi}{\pi + 4} = \frac{4}{\pi + 4}$$

EJERCICIO 32* [S/08]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Llamemos x a la base del triángulo e y a la altura. Queremos maximizar la superficie del triángulo:

$$S = \frac{1}{2}xy$$

[Ligadura]

Una recta que pasa por el punto $P(2\,,1)$ es de la forma

$$y - 2 = m(x - 1).$$

OJO: para que se forme con los semiejes positivos debe ser $m < 0$.

Observemos cuánto valen la base y la altura del triángulo OAB:

$A : y = 0 \to 0 - 2 = m(x - 1) \to -\dfrac{2}{m} = x - 1 \to x = 1 - \dfrac{2}{m}$

$B : x = 0 \to y - 2 = m(0 - 1) \to y = 2 - m$

[Expresión de la función]

Recordando que el área del triángulo es la mitad del producto de la base por la altura, tenemos que minimizar

$$S = \frac{1}{2}(2 - m)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \quad , \quad m < 0$$

Desarrollamos:

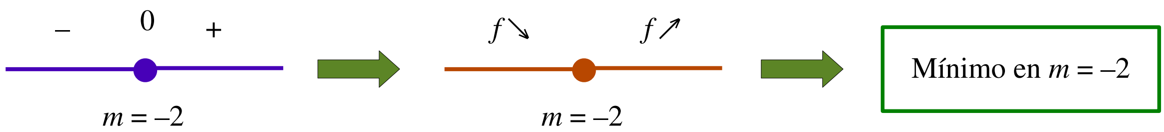
$$S = 1 - \frac{2}{m} - \frac{1}{2}m + 1 = 2 - \frac{1}{2}m - \frac{2}{m}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S' = -\frac{1}{2} + \frac{2}{m^2} = 0 \to \frac{2}{m^2} = \frac{1}{2} \to m^2 = 4 \to m = -2$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación:



[Conclusión]

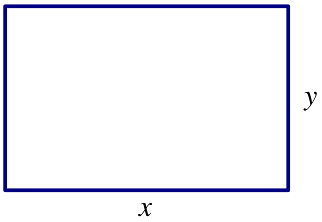
Concluimos que la recta solución es

$$y - 2 = -2(x - 1) \to y = -2x + 4$$

Y el área del triángulo es

$$S\,(-2) = \frac{1}{2}(4) \cdot (1 + 1) = 4 \quad u.a.$$

EJERCICIO 33 [S/08]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Si llamamos x a la base e y a la altura, por el Teorema de Pitágoras obtenemos que la diagonal es:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

[Ligadura]

Como el perímetro del rectángulo es 8:

$$2x + 2y = 8 \to x + y = 4 \to y = 4 - x$$

[Expresión de la función]

La función que tenemos que <u>minimizar</u> es, pues:

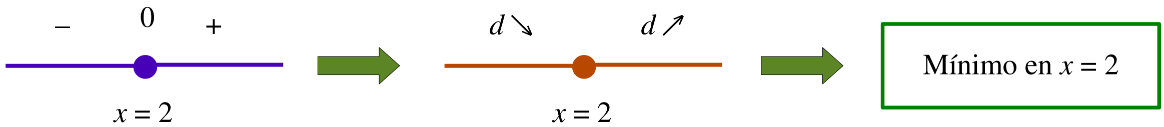
$$d(x) = \sqrt{x^2 + (4-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$d'(x) = \frac{4x - 8}{\sqrt{2x^2 - 8x + 16}} = 0 \to 4x - 8 = 0 \to x = 2$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación:

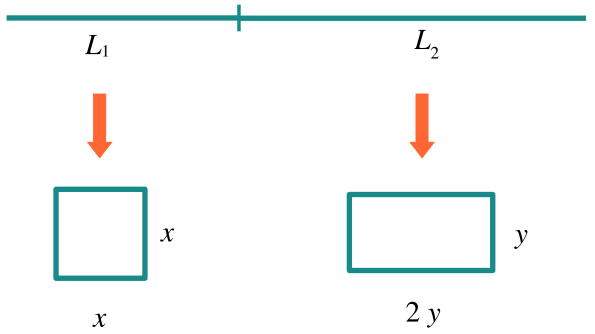


[Conclusión]

Concluimos que el rectángulo tiene 2 cm de base y 2 cm de altura (es un cuadrado) y su diagonal mide

$$d(2) = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \text{ cm}$$

EJERCICIO 34: [S/09]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Si llamamos x al lado del cuadrado e y a la altura del rectángulo, la suma de las superficies del cuadrado y del rectángulo es:

$$S = x^2 + 2y^2$$

OJO: Observemos que es $0 < x < 20$.

[Ligadura]

El perímetro del cuadrado ($L_1 = 4x$)más el perímetro del rectángulo ($L_2 = 6y$)es la longitud del segmento:

$$4x + 6y = 20 \to y = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x$$

[Expresión de la función]

La función que tenemos que minimizar es:

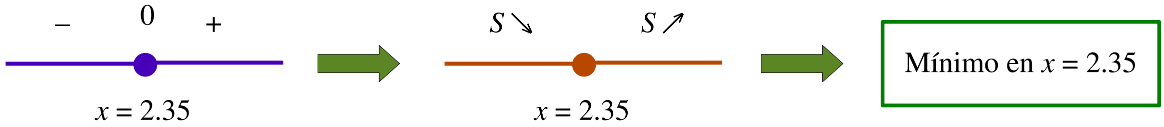
$$S(x) = x^2 + 2 \cdot \left(\frac{10}{3} - \frac{2}{3}x\right)^2 = \frac{17}{9}x^2 - \frac{80}{9}x + \frac{200}{9}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x) = \frac{34}{9}x - \frac{80}{9} = 0 \to x = \frac{80}{34} = \frac{40}{17} \approx 2.35$$

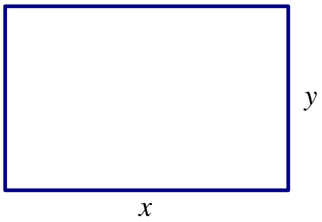
Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de S:



[Conclusión]

Concluimos que las longitudes de cada uno de los trozos son $\frac{160}{17}$ cm y $20 - \frac{160}{17} = \frac{180}{17}$ cm.

EJERCICIO 35: [S/09]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Si llamamos x a la base e y a la altura, por el Teorema de Pitágoras obtenemos que la diagonal es:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}$$

[Ligadura]

Como el área del rectángulo es 16:

$$x\cdot y=16\rightarrow y=\frac{16}{x}$$

[Expresión de la función]

La función que tenemos que <u>minimizar</u> es, pues:

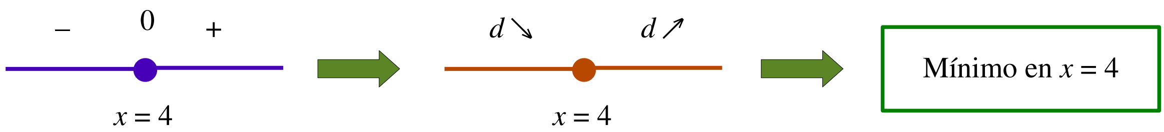
$$d\left(x\right)=\sqrt{x^2+\left(\frac{16}{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{256}{x^2}}\quad(x>0)$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$d'\left(x\right)=\frac{2x-\dfrac{512}{x^3}}{2\sqrt{x^2+\dfrac{256}{x^2}}}=0\rightarrow 2x-\frac{512}{x^3}=0\rightarrow 2x=\frac{512}{x^3}\rightarrow x^4=256\rightarrow x=4$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación:

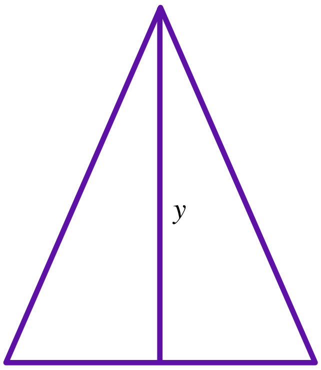


[Conclusión]

Concluimos que el rectángulo tiene 4 cm de base y 4 cm de altura (es un cuadrado) y su diagonal mide

$$d(4)=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}\text{ cm}$$

EJERCICIO 36:[S/09]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Si llamamos $2x$ a la base del triángulo e y a su altura, la superficie es:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot y = xy$$

[Ligadura]

En el triángulo isósceles se tiene que la suma de la base y de altura es 20:

$$2x + y = 20 \to y = 20 - 2x.$$

[Expresión de la función]

Tenemos que <u>maximizar</u> la función

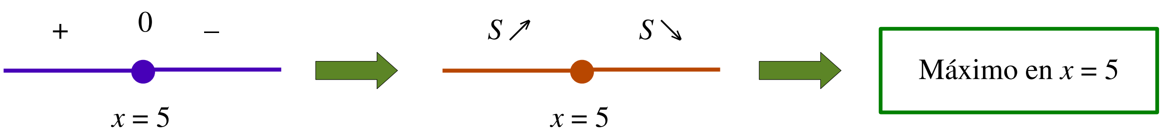
$$S(x) = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2 \quad (0 < x < 20)$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x) = 20 - 4x = 0 \to x = 5$$

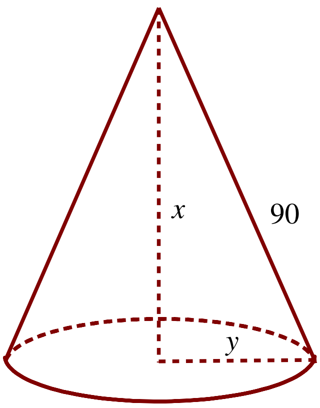
Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de S:



[Conclusión]

Concluimos que el triángulo tiene de base 10 cm y de altura 10 cm, siendo su área igual a 50 cm².

EJERCICIO 37:[S/10]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

En el triángulo rectángulo si x e y son los catetos, al girar el triángulo sobre el cateto altura, observemos que entonces la altura del cono es x y el radio de la base es y. Como nos recuerdan la fórmula del volumen:

$$V = \frac{1}{3} S_{base} \cdot h = \frac{\pi}{3} y^2 x$$

[Ligadura]

La relación entre x e y la deducimos del Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 90^2 \rightarrow y = \sqrt{1800 - x^2}$$

[Expresión de la función]

La función que tenemos que <u>maximizar</u> es:

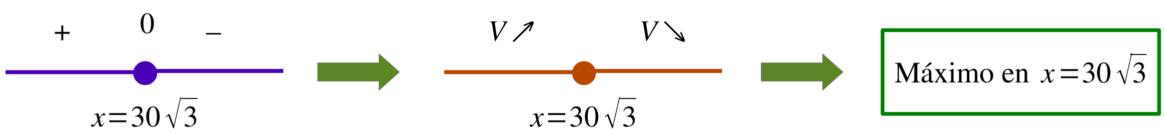
$$V(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\sqrt{8100 - x^2}\right)^2 \cdot x = \frac{\pi}{3}\left(8100x - x^3\right) \quad , \quad 0 < x < 90$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$V'(x) = \frac{1}{3}\left(8100 - 3x^2\right) = 0 \rightarrow 3x^2 = 8100 \rightarrow x = \sqrt{2700} = 30\sqrt{3} \approx 52$$

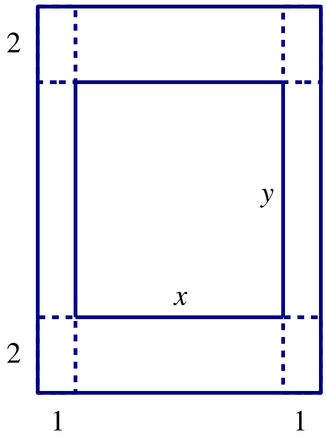
Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de V:



[Conclusión]

Concluimos que los catetos miden $30\sqrt{3}$ y $\sqrt{8100 - 2700} = 30\sqrt{6}$ cm respectivamente.

EJERCICIO 38: [S/10]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Llamemos x al ancho e y al alto del texto. Así la superficie de cada hoja de papel es igual a su ancho $(x+2)$ multiplicado por su alto $(y+4)$:

$$S = (x+2)\cdot(y+4)$$

[Ligadura]

Como el texto tiene una superficie de 18 cm²:

$$x \cdot y = 18 \rightarrow y = \frac{18}{x}$$

[Expresión de la función]

La función que debemos <u>minimizar</u> es, pues:

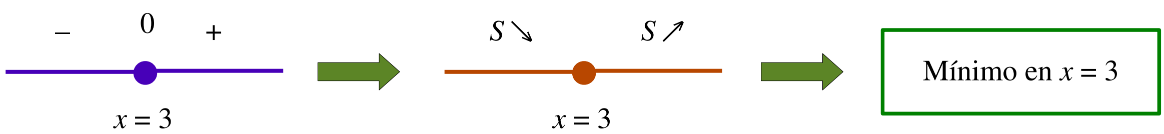
$$S(x) = (x+2)\cdot\left(\frac{18}{x}+4\right) = 26 + 4x + \frac{36}{x}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x) = 4 - \frac{36}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{36}{x^2} = 4 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de S:

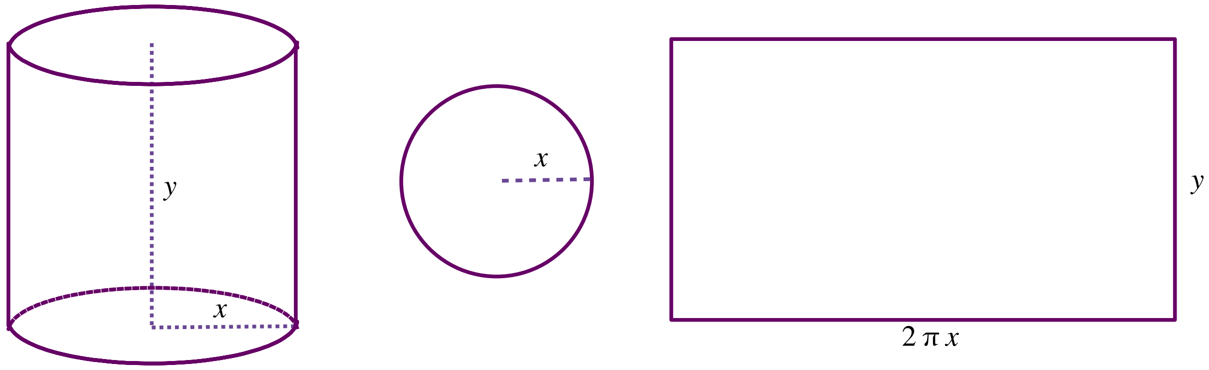


[Conclusión]

Concluimos que la hoja tiene 3+2=5 cm de ancho y 6+4=10 cm de alto. Así, la superficie mínima es

$$S(3) = 5 \cdot 10 = 50 \text{ cm}^2$$

EJERCICIO 39: [S/11]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Si llamamos x al radio de la base e y a la altura, volumen del cilindro es:

$$V = S_{base} \cdot h = \pi x^2 \cdot y$$

[Ligadura]

Sabemos que el área total (suma del área de los dos círculos y del lateral) es 54. Así:

$$2 \cdot \pi x^2 + 2\pi xy = 54 \;\rightarrow\; \pi x^2 + \pi xy = 27 \;\rightarrow\; y = \frac{27 - \pi x^2}{\pi x}$$

[Expresión de la función]

La función que debemos <u>maximizar</u> es:

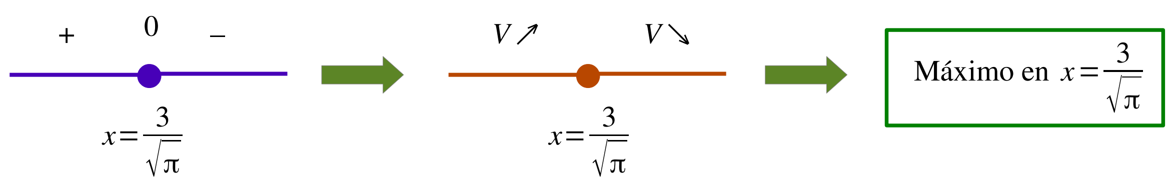
$$V(x) = \pi x^2 \cdot \frac{27 - \pi x^2}{\pi x} = x(27 - \pi x^2) = 27x - \pi x^3$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$V'(x) = 27 - 3\pi x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt{\frac{27}{3\pi}} = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

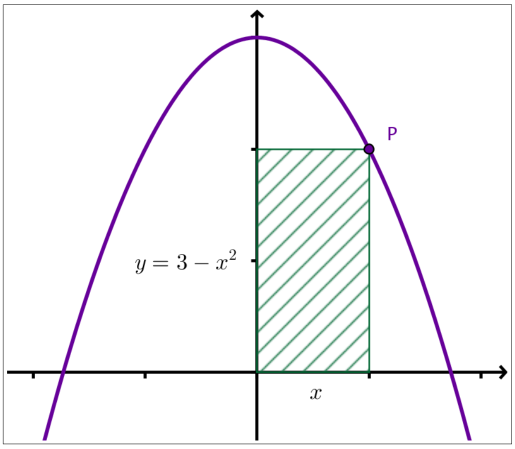
Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de V:



Así, el radio de la base debe medir $\frac{3}{\sqrt{\pi}} \approx 1.7$ cm y la altura debe medir

$$y = \frac{27 - \pi \cdot \frac{9}{\pi}}{\pi \cdot \frac{3}{\sqrt{\pi}}} = \frac{18\sqrt{\pi}}{3\pi} = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \text{ cm}$$

EJERCICIO 40:[S/11]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Si llamamos x a la base del rectángulo e y a la altura, la superficie es:

$$S = x \cdot y$$

[Ligadura]

Observemos que el vértice superior derecho es un punto de la parábola, por ello su ordenada es

$$y = 3 - x^2$$

[Expresión de la función]

Luego tenemos que <u>maximizar</u> la función

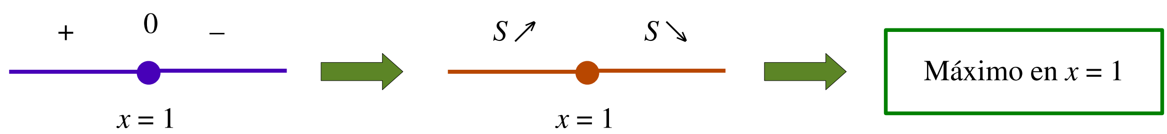
$$S(x) = x \cdot (3 - x^2) = 3x - x^3 \quad , \quad 0 < x < \sqrt{3}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x) = 3 - 3x^2 = 0 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x = 1$$

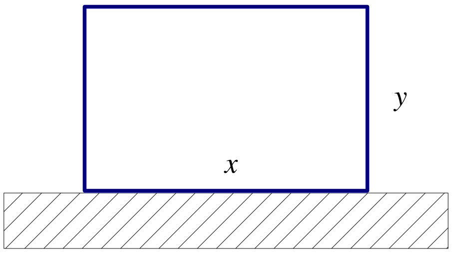
Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de S:



[Conclusión]

Concluimos que el rectángulo tiene de base 1 y de altura 2, siendo su área igual a 2.

EJERCICIO 41:[S/11]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Si el lado contiguo a la carretera mide x y el perpendicular y, la superficie del rectángulo es

$$S = xy$$

[Ligadura]

El coste es de 3000 euros, por ello tenemos que:

$$100x + 10x + 20y = 3000 \rightarrow y = 150 - 5.5x$$

[Expresión de la función]

La función que queremos <u>maximizar</u> es:

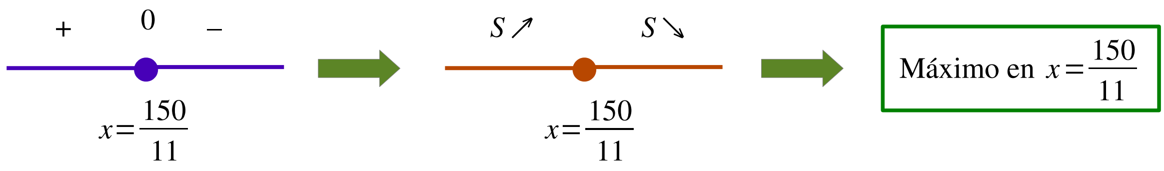
$$S(x) = x \cdot (150 - 5.5x) = 150x - 5.5x^2 \quad (x > 0)$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x) = 150 - 11x = 0 \rightarrow x = \frac{150}{11}$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de S:

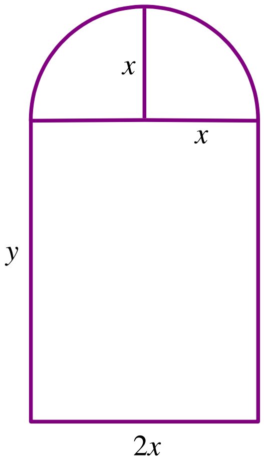


[Conclusión]

Concluimos que el cercado debe tener $\frac{150}{11} \approx 13.64$ metros junto a la carretera y de profundo $150 - 11 \cdot \frac{150}{11} = 75$ metros. Su superficie (máxima) es

$$S\left(\frac{150}{11}\right) = \frac{150}{11} \cdot 75 = \frac{11250}{11} \approx 1022.72 \text{ m}^2$$

EJERCICIO 42:[S/11]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Partiendo de la situación dibujada aquí al lado, el área de la ventana es igual a la suma de la superficie del rectángulo (base por altura) más la mitad de la superficie del círculo (pi por el cuadrado del radio):

$$S = 2x \cdot y + \frac{1}{2}\pi x^2$$

[Ligadura]

Observemos que la longitud de una circunferencia de radio x es $2\pi x$, luego la de una semicircunferencia πx. Así, el perímetro de toda la ventana es:

$$2y + 2x + \pi x = 10 \to 2y = 10 - \pi x - 2x \to y = \frac{1}{2}(10 - \pi x - 2x)$$

[Expresión de la función]

Nos queda que la función que debemos <u>maximizar</u>:

$$S(x) = 2x \cdot \frac{1}{2}(10 - \pi x - 2x) + \frac{1}{2}\pi x^2 = 10x - \pi x^2 - 2x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

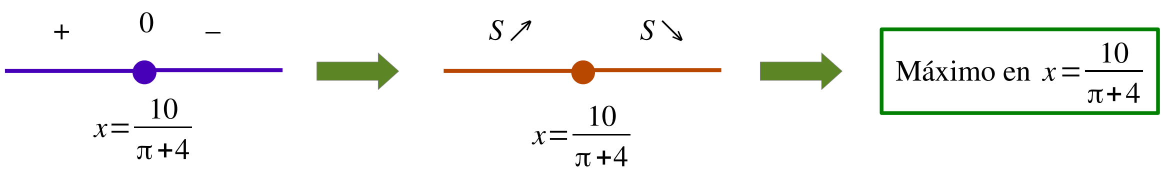
Derivamos:

$$S'(x) = 10 - 2\pi x - 4x + 2\pi x = 10 - \pi x - 4x$$

Igualando a cero:

$$\pi x + 4 = 10 \to (\pi + 4)x = 10 \to x = \frac{10}{\pi + 4} \approx 1{,}4$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de S:



[Conclusión]

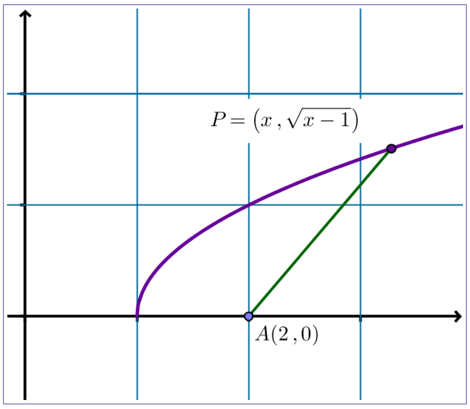
Así, la anchura de la ventana es igual al diámetro del semicírculo superior:

$$2 \cdot x = \frac{20}{\pi + 4}\ \text{cm}$$

Y la altura de la zona rectangular es

$$y = \frac{1}{2}\left(10 - \pi \cdot \frac{10}{\pi + 4} - 2 \cdot \frac{10}{\pi + 4}\right) = 5 - \frac{5\pi + 10}{\pi + 4} = \frac{18}{\pi + 4}\ \text{cm}$$

EJERCICIO 43:[S/11]



Recordemos que la distancia de $A=(x_1\,,y_1)$ a $B=(x_2\,,y_2)$ es:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

[Variable y magnitud que debemos optimizar]

Llamemos $P=(x\,,y)$ a las coordenadas del punto que buscamos. Queremos que sea mínima la distancia de P al punto $A=(2\,,0)$:

$$d=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

OJO: Observemos que es $x\geq 1$.

[Ligadura]

Como el punto buscado P está en la gráfica se tiene que cumplir la ecuación de la función:

$$y=\sqrt{x-1}$$

[Expresión de la función]

Así debemos <u>minimizar</u>:

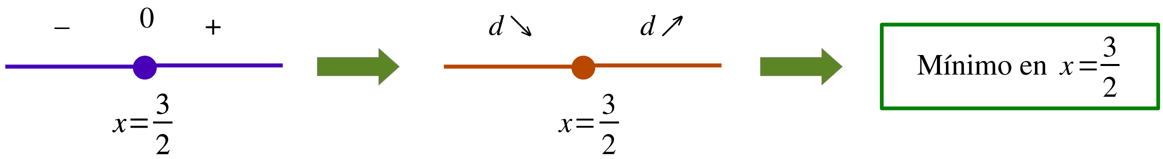
$$d(x)=\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{x-1})^2}=\sqrt{x^2-3x+3}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$d'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}}=0\rightarrow x=\frac{3}{2}=1.5$$

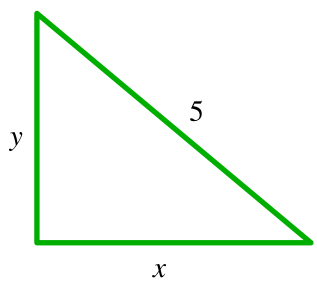
Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de d:



[Conclusión]

El punto que nos da la distancia mínima es $P=\left(\frac{3}{2}\,,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y la distancia mínima es $d\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

EJERCICIO 45: [S/12]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Si llamamos x a la base e y a la altura del triángulo, su superficie es:

$$S = \frac{1}{2}xy$$

[Ligadura]

En el triángulo rectángulo, por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 5^2 \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$$

[Expresión de la función]

Luego tenemos que <u>maximizar</u>

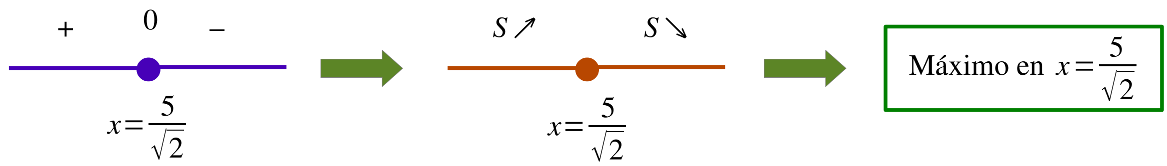
$$S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{25 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{25x^2 - x^4}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{50x - 4x^3}{2\sqrt{25x^2 - x^4}} = 0 \rightarrow 2x(25 - 2x^2) = 0 \rightarrow x^2 = \frac{25}{2} \rightarrow x = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de S:



Observemos que

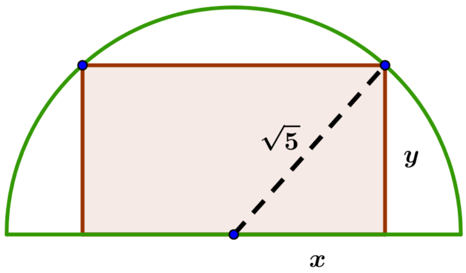
$$x = \frac{5}{\sqrt{2}} \rightarrow y = \sqrt{25 - \frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

[Conclusión]

Concluimos que los dos catetos miden $\frac{5}{\sqrt{2}}$ cm siendo su área

$$S\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{25}{4}\ \text{cm}^2$$

EJERCICIO 48: [S/13]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Si llamamos $2x$ a la base e y a la altura del rectángulo, su perímetro es:

$$P = 4x + 2y$$

[Ligadura]

Observemos que al trazar el radio desde el centro de la circunferencia hasta un vértice superior del rectángulo, tenemos un triángulo rectángulo en el que el Teorema de Pitágoras afirma que:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{5^2} \to y = \sqrt{5 - x^2}$$

[Expresión de la función]

Luego tenemos que maximizar

$$P(x) = 4x + 2\sqrt{5 - x^2}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

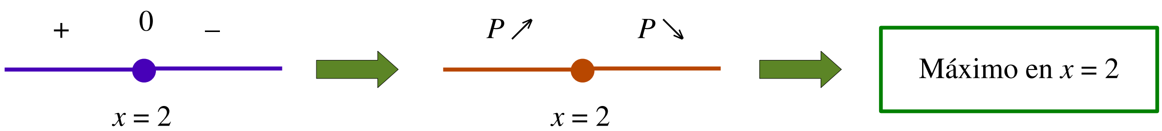
Derivamos e igualamos a cero:

$$P' = 4 + 2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = 4 - \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}} = 0$$

Pasando la fracción al otro miembro y resolviendo:

$$4 = \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}} \xrightarrow{\text{al cuadrado}} 16 = \frac{4x^2}{5 - x^2} \to 4x^2 = 80 - 16x^2 \to x = 2$$

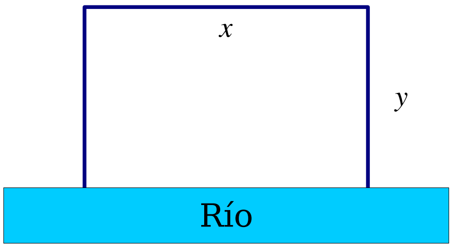
Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de P:



[Conclusión]

Concluimos que la base del rectángulo mide 4 cm y la altura 1 cm.

EJERCICIO 54: [S/15]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Si el lado paralelo al río mide x y el perpendicular y, la longitud de la valla es

$$L = x + 2y$$

[Ligadura]

El terreno debe tener una superficie de 180000 metros cuadrados, por ello tenemos que:

$$S = 1800000 \to x \cdot y = 1800000 \to y = \frac{1800000}{x}$$

[Expresión de la función]

La función que queremos <u>minimizar</u> es:

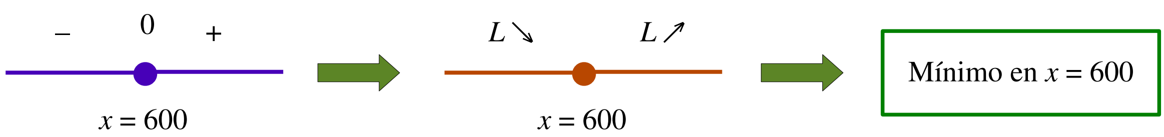
$$L = x + 2 \cdot \frac{180000}{x} = \frac{x^2 + 360000}{x} \quad (x > 0)$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$L' = \frac{x^2 - 360000}{x^2} = 0 \to x^2 - 360000 = 0 \to x = \sqrt{360000} = 600$$

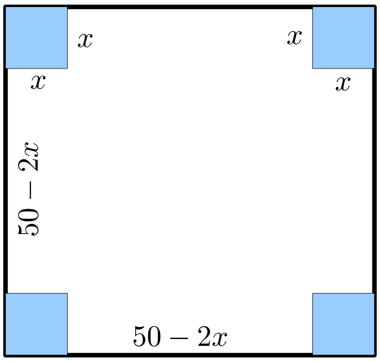
Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de L:



[Conclusión]

Concluimos que el cercado debe tener 600 metros paralelo al río y $\frac{180000}{600} = 300$ metros de lado perpendicular al río.

EJERCICIO 57 [S/16]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Se nos dice que llamemos x al lado del cuadrado recortado en cada una de las esquinas. Es la única variable necesaria. El volumen de la caja construida es:

$$V=(50-2x)\cdot(50-2x)\cdot x$$

[Ligadura]

No ha lugar.

[Expresión de la función]

Luego tenemos que maximizar

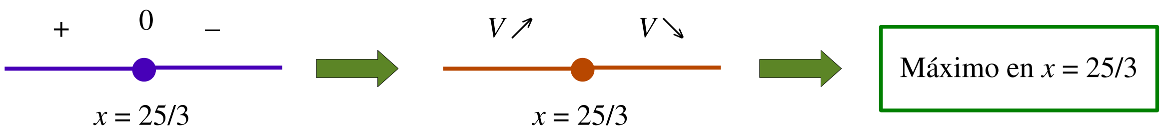
$$V=2500x-200x^2+4x^3$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$V'=2500-400x+12x^2=0\rightarrow x=\frac{25}{3}\,,\;x=\cancel{25}\rightarrow x=\frac{25}{3}$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de V:



[Conclusión]

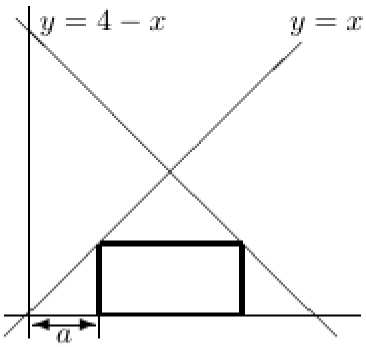
Ahí tenemos el valor del lado del cuadrado que debemos recortar y el volumen máximo es:

$$V=\left(50-\frac{50}{3}\right)\cdot\left(50-\frac{50}{3}\right)\cdot\frac{25}{3}=\frac{2500}{27}\approx 92,6\ \text{cm}^3$$

EJERCICIO 63 [S/18]

[Variables y magnitud que debemos optimizar]

El vértice inferior izquierdo A_1 tiene $x_1 = a$ y como está en el eje X tiene $y_1 = 0$, luego es $A_1 = (a\,,0)$.



El vértice superior izquierdo A_2 está en la vertical de A_1, luego tiene $x_2 = a$. Al estar en la recta $y = x$ tiene $y_2 = a$, luego es $A_2 = (a\,, a)$.

Tenemos ya que la altura del rectángulo es $h = a$

El vértice superior derecho A_3 está en la misma horizontal que A_2 y por ello es $y_3 = a$. Y como está en la recta $y = 4 - x$ se tiene $x_3 = 4 - a$, luego es $A_3 = (4 - a\,, a)$.

Por último, el vértice inferior derecho A_4, al estar en la misma vertical que A_3 tiene $x_4 = 4 - a$ y como está en el eje X queda $A_4 = (4 - a\,, 0)$.

Observamos así que la base del rectángulo es la longitud del segmento $\overline{A_1A_4}$:

$$base = x_4 - x_1 = 4 - a - a = 4 - 2a$$

La magnitud que se pide optimizar es el área del rectángulo.

[Ligadura]

No ha lugar.

[Expresión de la función]

Luego tenemos que maximizar

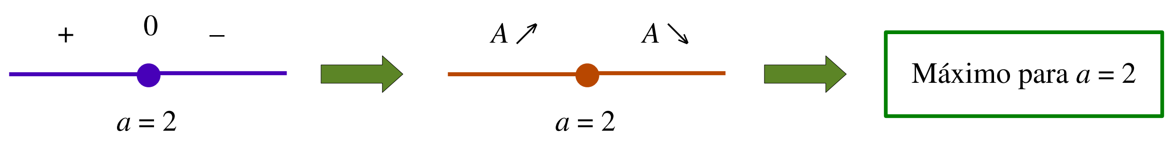
$$A = b \times h = a\,(4 - a) = 4a - a^2$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$A' = 4 - 2a = 0 \rightarrow a = 2$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de A:

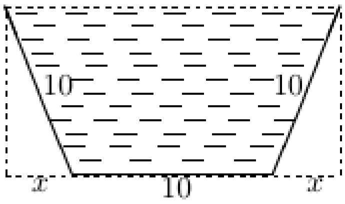


[Conclusión]

El área es máxima cuando es $a = 2$.

EJERCICIO 64 [S/18]

[Variables y magnitud que debemos optimizar]



La altura, que llamaremos h, la podemos calcular con el Teorema de Pitágoras:

$$h^2+x^2=10^2 \rightarrow h^2=100-x^2 \rightarrow h=\sqrt{100-x^2}$$

El área de la canaleta es el área del trapecio con base menor $b=10$, base mayor $B=10+2x$ y altura $h=\sqrt{100-x}$:

$$A=\frac{B+b}{2}\cdot h=\frac{20+2x}{2}\cdot\sqrt{100-x^2}=(10+x)\cdot\sqrt{100-x^2}$$

<u>Nota</u>: si no recordamos la fórmula, es el área del rectángulo punteado ($B=10+2x$ y $h=\sqrt{10-x^2}$) menos las dos áreas de los triángulos rectángulos que vemos a izquierda y derecha.

[Ligadura]

No ha lugar.

[Expresión de la función]

Luego tenemos que <u>maximizar</u>

$$A=(10+x)\cdot\sqrt{100-x^2}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

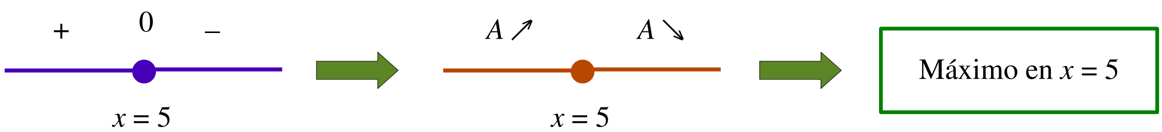
Derivamos e igualamos a cero:

$$A'=1\cdot\sqrt{100-x^2}+(10+x)\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}=\sqrt{100-x^2}-\frac{10x+x^2}{\sqrt{100-x^2}}=0$$

Pasamos al segundo miembro la fracción y resolvemos:

$$\sqrt{100-x^2}=\frac{10x+x^2}{\sqrt{100-x^2}} \rightarrow \left(\sqrt{100-x^2}\right)^2=10x+x^2 \rightarrow 2x^2+10x-100=0 \rightarrow \{x=5\,,\cancel{x=-10}\}$$

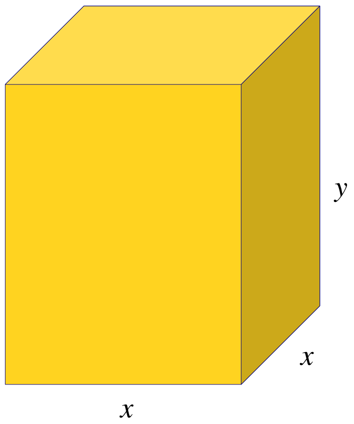
Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de A:



[Conclusión]

El área de la sección es máxima cuando $x=5$.

EJERCICIO 66 [S/18]



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Llamemos x al lado de la base (cuadrada) e y a la altura de la caja.

Queremos maximizar el volumen de la caja:

$$V = x \cdot x \cdot y = x^2 y$$

[Ligadura]

Observemos que la caja (sin tapa) está compuesta de un cuadrado (de área x^2) y de cuatro rectángulos iguales (de área $x \cdot y$). Así:

$$\text{Coste} = 50 \to 24x^2 + 18 \cdot 4xy = 50 \to y = \frac{50 - 24x^2}{72x}$$

[Expresión de la función]

Luego tenemos que <u>maximizar</u> la función volumen:

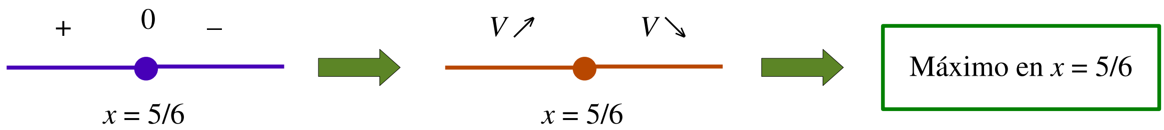
$$V = x^2 \cdot \frac{50 - 24x^2}{72x} = \frac{50x - 24x^3}{72}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$V' = \frac{50 - 27x^2}{72} = 0 \to x = \pm\sqrt{\frac{50}{72}} = \pm\frac{5}{6} \to x = \frac{5}{6}$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de V:



[Conclusión]

Concluimos que la caja tiene $\frac{5}{6}$ cm de lado de la base y una altura de $\frac{5}{9}$ cm.

EJERCICIO 71 [S/22]

[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Un punto cualquiera de esa gráfica será:

$$P = (x\,,y)$$

Queremos que sea mínima la distancia entre $A = (2\,,6)$ y el punto $P = (x\,,y)$, que aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos es:

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2}$$

[Ligadura]

Como el punto $P = (x\,,y)$ está en la gráfica de la función $f\,(x) = 3x - 2$, debe ser

$$y = 3x - 2$$

[Expresión de la función]

Así que tenemos que <u>minimizar</u> la función distancia:

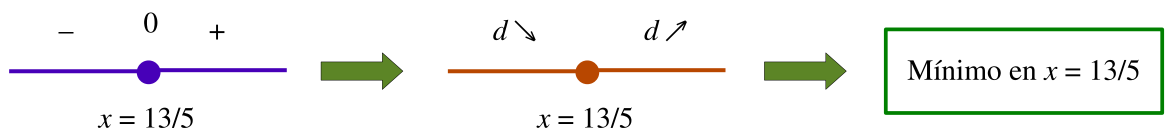
$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (3x-8)^2} = \sqrt{10x^2 - 52x + 68}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$d' = \frac{20x - 52}{2\sqrt{10x^2 - 52x + 68}} = 0 \to 2x - 52 = 0 \to x = \frac{13}{5} = 2{,}6$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la monotonía de d:



Importante: observemos que $x = 13/5$ está en el dominio de la función.

[Conclusión]

El punto que nos da la distancia mínima viene dado por $x = \dfrac{13}{5} \to y = \dfrac{2}{5}$. Esto es:

$$P = (13/5\,,2/5)$$

[Adicional: punto más alejado]

Para obtener dónde alcanza la distancia el máximo (que lo alcanza porque es una función continua en un intervalo compacto) necesitamos una tabla de variación de la función distancia en el dominio:

x	0		$13/5$		3
d	$2\sqrt{17}$	$\searrow$	$\sqrt{10}/5$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

Observamos que el punto de la gráfica más alejado de A es el correspondiente a $x = 0$, esto es, $Q = (0\,,-2)$.