TEMA 3

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Ejercicios de Selectividad
sobre
Aplicaciones de las Derivadas

Cursos
1996 – 2005

Enunciados

EJERCICIO 1 [S/96]

La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f:[0\,,3]\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(t)=300t(3-t)$ donde t mide el tiempo en horas.

a) [1] Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en os cuales disminuye.

b) [0,75] ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?

c) [0,75] Representa gráficamente la función de capacidad de concentración.

EJERCICIO 2 [S/96]

El número de bacterias en un cultivo experimental en un instante t es

$$N(t)=1000\left(25+t\,\mathrm{e}^{-t/20}\right)\quad ,\,,\quad 0\le t\le 100$$

¿Cuánto valen el máximo y el mínimo número de bacterias y en qué instantes se alcanzan, respectivamente, dichos valores extremos?

EJERCICIO 3 [S/96]

Sea $f:[-4\,,2]\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=x^2\,\mathrm{e}^x$$

a) [1] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

[1,5] Halla los máximos y mínimos relativos y absolutos de f.

EJERCICIO 4 [S/97]

Una locomotora sale de una estación y viaja durante una hora a lo largo de una trayectoria rectilínea. La velocidad de la locomotora al cabo de t horas viene dada en km/h, por la fórmula

$$v(t)=400t^3-1200t^2+800t\quad(0\le t\le 1)$$

Determina la velocidad máxima que alcanza la locomotora y el instante en el que lo hace.

EJERCICIO 5 [S/97]

Dada la función $f:\mathbb{R}\ \to\ \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x^3-6x^2+2x$$

halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica en su punto de inflexión

EJERCICIO 6 [S/97]

Considera la función f definida para $x \neq 0$ por la relación

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 4}{x}$$

a) Halla sus asíntotas.

b) Determina sus extremos locales.

c) Dibuja la gráfica de f indicando su posición respecto de las asíntotas.

EJERCICIO 7 [S/97+]

Supongamos que el rendimiento r de una alumna en un examen que dura una hora viene dado por la relación

$$r(t) = 300t(1-t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

donde t es el tiempo medido en horas.

a) ¿En qué intervalos aumenta el rendimiento y en qué intervalos disminuye?

b) ¿En qué momentos se obtiene mayor rendimiento y cuánto vale?

c) ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?

EJERCICIO 8 [S/97+]

Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 9}{x + 2} \quad , \quad x \neq -2$$

EJERCICIO 9 [S/98]

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (3x - 2x^2)\,\mathrm{e}^x$$

a) Estudia el crecimiento y el decrecimiento de f.

b) Calcula los máximos y los mínimos relativos de f.

EJERCICIO 10 [S/98]

La temperatura media en una ciudad andaluza, desde las 12 horas del mediodía hasta la medianoche de un cierto día de agosto, viene dada por la expresión

$$T(x) = ax^2 + bx + c$$

en la que x representa el número de horas transcurridas desde el mediodía.

a) Calcula a, b, y c sabiendo que a las 5 de la tarde se alcanzó una temperatura máxima de 35ºC y que a las 12 del mediodía se midieron 30ºC.

b) Determina de forma razonada los puntos en los que la función anterior alcanza sus extremos absolutos y relativos.

EJERCICIO 11 [S/98]

Se sabe que la temperatura, en grados centígrados, de una cámara frigorífica viene dada por la expresión

$$f(t) = at^2 + bt + c$$

donde t representa las horas transcurridas desde su conexión a la red. Al conectarla, la temperatura interior asciende, por efecto del calor del motor, y alcanza su máximo a los tres cuartos de hora. A partir de ese momento comienza a descender la temperatura y transcurrida una hora desde su conexión alcanza los cero grados centígrados. A las dos horas de haberla conectado la temperatura es de tres grados bajo cero. Usando estos datos, determina los valores de las constantes a, b, y c.

EJERCICIO 12 [S/99]

Sea k un número real y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \cos(x) + kx$$

a) [1,25] Determina todos los valores de k para los que la función anterior es creciente en todo su dominio.

b) [1,25] Para $k = 1$ halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 13 [S/99]

Dos partículas A y B se mueven en el plano XY. En cada instante de tiempo t las posiciones de las partículas son, respectivamente:

$$A = \left(\frac{t-1}{2} , \frac{\sqrt{3}(1-t)}{2} \right) \quad , \quad B = (2-t\,, 0)$$

Obtén el instante en el que las partículas están más próximas entre sí y a qué distancia mínima se hallan.

EJERCICIO 14 [S/99]

La población de una colonia de aves evoluciona con el tiempo t, medido en años, según la función $P : [2\,, 12] \to \mathbb{R}$ dada por

$$P(t) = \begin{cases} 10 + (t-6)^2 & \text{si} \quad 2 \leq t \leq 10 \\ 28 - 2^{t-9} & \text{si} \quad 10 < t \leq 12 \end{cases}$$

a) [1,5] Representa gráfica la función P e indica en qué períodos de tiempo crece o decrece la población.

b) [0,5] Indica los instantes en los que la población alcanza los valores máximo y mínimo.

c) [0,5] Si la población evolucionara a partir de $t = 12$ con la misma función que para $10 < t \leq 12$, ¿llegaría a extinguirse? Justifica la respuesta dando, en caso afirmativo, el instante de la extinción.

EJERCICIO 15 [S/99]

Sea $f : (0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln x$.

a) [1] Prueba que la función derivada es decreciente en todo su dominio.

b) [1,5] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g : (0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

EJERCICIO 16 [S/99]

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

Calcula a , b , c y d sabiendo que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $Q=(-1\,,3)$ y que la tangente a dicha gráfica en el punto $M=(0\,,1)$ es horizontal.

EJERCICIO 17 [S/99]

Una partícula se desplaza a lo largo de la curva de ecuación $y=f(x)$ siendo f la función dada por

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ x\,\mathrm{e}^x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

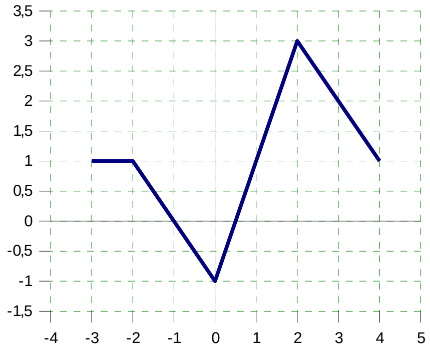
a) [1] ¿Hay algún punto en la trayectoria de la partícula en el que dicha curva no admite recta tangente?

b) [1] Determina las coordenadas del punto de la trayectoria en el que se alcanza la máxima altura.

c) [0,5] ¿A qué recta se aproxima la trayectoria cuando $x\to+\infty$? Justifica la respuesta.

EJERCICIO 18 [S/99+]

La gráfica de la derivada de una cierta función $f:[-3\,,4]\to\mathbb{R}$ es la siguiente



a) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

b) ¿Hay algún intervalo de su dominio en el que f sea constante?

c) ¿Cuáles son los puntos críticos de f ? Clasifícalos.

EJERCICIO 19 [S/99+]

a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función $f:(0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{1+x^2}{x}$$

b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales si los hay.

c) Esboza la gráfica de f .

EJERCICIO 20 [S/99+]

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=1+x\cdot|x|$$

a) Halla la derivada de f.

b) Determina los intervalos de monotonía de f.

EJERCICIO 21 [S/99+]

Dada la función $f:[1\,,\mathrm{e}]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$$

determina cuál de las rectas tangentes a la gráfica de f tiene la máxima pendiente.

EJERCICIO 22 [S/99+]

Considera la función $f:(0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

a) Determina los intervalos de monotonía así como los extremos relativos de f.

b) Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de corte de dicha gráfica con el eje OX.

EJERCICIO 23 [S/99+]

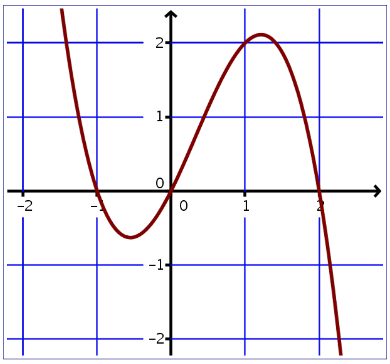
Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida en la forma

$$f(x)=x\,\mathrm{e}^{2x}$$

Determina los extremos relativos de f (dónde se alcanzan y cuál es su valor).

EJERCICIO 24 [S/99+]

De una función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se sabe que pasa por el punto $(3\,,0)$ y que la gráfica de su función derivada es la que se muestra en la figura:



Determina sus extremos locales así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y, con estos elementos, esboza razonadamente la gráfica de f.

EJERCICIO 25 [S/99+]

Esboza la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x\le -1 \\ x^3-x & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$$

EJERCICIO 26 [S/99+]

Dibuja la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

determinando previamente sus asíntotas, extremos locales, intervalos de monotonía y la existencia de simetrías.

EJERCICIO 27 [S/00]

Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos viene dada por

$$h(t)=5-5t-5\,\mathrm{e}^{-2t}$$

a) [1,5] Calcula el tiempo transcurrido hasta alcanzar la altura máxima y el valor de ésta.

b) [1] Teniendo en cuenta que la velocidad es $v(t)=h'(t)$, halla la velocidad al cabo de 2 segundos.

EJERCICIO 28 [S/00]

Determina a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x(ax^2+bx+c)$$

tiene un punto de inflexión en $(-1\,,12)$ y que en él la recta tangente tiene por ecuación $10x+y+8=0$.

EJERCICIO 29 [S/00]

Determina una función polinómica de grado tres sabiendo que verifica lo siguiente: alcanza un máximo en $x=1$, su gráfica pasa por el punto $(1\,,1)$ y la recta de ecuación $y=x$ es tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=0$.

EJERCICIO 30 [S/00]

Se ha observado que en una carretera de salida de una gran ciudad la velocidad de los coches entre las 2 h. y las 6 h. de la tarde viene dada por

$$v(t)=t^3-15t^2+72t+8 \quad , \quad t\in[2\,,6]$$

a) [1,25] ¿A qué hora circulan los coches con mayor velocidad? Justifica la respuesta.

b) [1,25] ¿A qué hora circulan los coches con menor velocidad? Justifica la respuesta.

EJERCICIO 31 [S/00] [R]

Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2} \quad (x \neq -2)$$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f .

b) Determina los intervalos de monotonía y los extremos locales de f .

c) Teniendo en cuenta los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de f .

EJERCICIO 32 [S/01]

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = |8 - x^2|$$

a) Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de f (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores).

b) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta tangente a la misma en el punto de abscisa $x = -2$.

EJERCICIO 33 [S/01]

Sea f la función definida para $x \neq 1$ por

$$f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$$

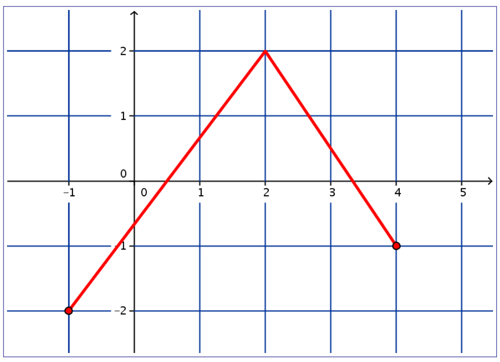
(a) [1] Calcula las asíntotas de la gráfica de f.

(b) [1] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f.

(c) [0,5] Esboza la gráfica de f.

EJERCICIO 34 [S/02]

Sea $f : [-1 , 4] \to \mathbb{R}$ una función cuya derivada tiene por gráfica la de la figura:



a) [1,5] Estudia la monotonía de f y determina los valores en los que alcanza sus extremos relativos.

b) [1] Estudia la concavidad y la convexidad de f . ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de f ?

EJERCICIO 35 [S/02]

Determina el valor de las constantes c y d sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x^3+3x^2+cx+d$$

tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta $y=3x+4$.

EJERCICIO 36 [S/02]

a) [1,5] Obtén la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f'(x)=2x^3-6x^2$ y que su valor mínimo es -12.

b) [1] Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de inflexión de su gráfica.

EJERCICIO 37 [S/02]

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x^2\,\mathrm{e}^{x/2}$$

a) [1] Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) [1,5] Calcula los intervalos de monotonía y los extremos locales de f (puntos y valores que alcanzan).

EJERCICIO 38 [S/02]

Sea f la función definida por

$$f(x)=\frac{9x-3}{x^2-2x}\qquad (x\neq 0\,,\ x\neq 2)$$

a) [1] Calcula las asíntotas de la gráfica de f .

b) [1,5] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

c) [0,5] Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de f .

EJERCICIO 39 [S/02]

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2x}{x^2+1}}$$

a) [1] Calcula las asíntotas de la gráfica de f .

b) [1'5] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de f.

EJERCICIO 40 [S/03]

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=(x+3)\,\mathrm{e}^{-x}$$

a) [0'5] Halla las asíntotas de la gráfica de f .

b) [1'5] Determina los extremos relativos de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

c) [0'5] Esboza la gráfica de f .

EJERCICIO 41 [S/03]

Sea la función $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 2-x^2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) [1'25] Calcula, si es posible, las derivadas laterales de f en $x=1$.

b) [1'25] Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

EJERCICIO 42 [S/03]

Calcula a, b y c sabiendo que la función $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

tiene un punto de derivada nula en $x=1$ que no es extremo relativo y que $f(1)=1$.

EJERCICIO 43 [S/03]

Se sabe que la función $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ es tal que $f(0)=4$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,2)$. Conociendo que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es horizontal, calcula a, b, c y d.

EJERCICIO 44 [S/04]

Considera la función $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$$

a) [1] Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

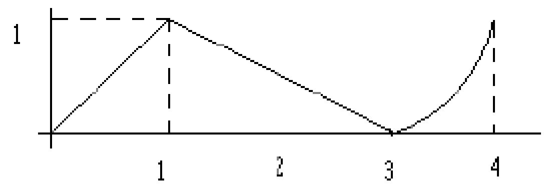
b) [1,5] Determina los intervalos de curvatura de f. ¿Tiene puntos de inflexión su gráfica?

EJERCICIO 45 [S/04]

Halla una función $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que su gráfica pase por el punto $M(0,1)$, que la tangente en el punto M sea paralela a la recta $2x-y+3=0$ y que $f''(x)=3x^2$.

EJERCICIO 46 [S/04]

De una función $f:[0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f(1)=3$ y que la gráfica de su función derivada es



a) [0,5] Halla la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

b) [1] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. ¿En qué punto alcanza la función su máximo absoluto?

c) [1] Estudia la concavidad y la convexidad de f.

EJERCICIO 47 [S/04]

Sea la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^2}$$

a) [0,75] Halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1,25] Determina los intervalos de monotonía de f y calcula sus extremos relativos o locales.

c) [0,5] Esboza la gráfica de f .

EJERCICIO 48 [S/04]

Se sabe que es continua la función $f:(-1\,,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) [1,25] Halla el valor de a. ¿Es f derivable en $x=0$?

b) [1,25] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

EJERCICIO 49 [S/04]

Sea $f:[0\,,2\pi]\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=e^x(\cos x+\operatorname{sen}x)$$

a) [1,25] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) [1,25] Halla los extremos relativos (locales) y absolutos (globales) de f.

EJERCICIO 50 [S/05]

De la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

se sabe que tiene un máximo en $x=-1$, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x=-2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=0$.

Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$ tiene pendiente 9.

EJERCICIO 51 [S/05]

Sea f la función definida para $x\neq 0$ por

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}$$

a) [1] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

c) [0,5] Esboza la gráfica de f.

EJERCICIO 52 [S/05] [R]

Sea f la función definida para $x \neq 1$ por

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

a) [0,5] Halla las asíntotas de su gráfica

b) [0,75] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

c) [0,75] Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de la función.

d) [0,5] Esboza la gráfica de f.

EJERCICIO 53 [S/05]

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{5x+8}{x^2+x+1}$$

a) [0,5] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados.

b) [0,5] Halla las asíntotas de la gráfica de f .

c) [1] Determina los intervalos de monotonía de f y calcula sus extremos relativos o locales.

d) [0,5] Esboza la gráfica de f .

EJERCICIO 54 [S/05]

Sea f la función definida para $x \neq 2$ por

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-2}$$

a) [1] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

b) [0,75] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

c) [0,75] Calcula, si existen, el máximo y el mínimo absolutos de f en el intervalo $[0\,,2)$ (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

EJERCICIO 55 [S/05]

De la función definida por

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$$

se sabe que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ viene dada por $y = 2$.

a) [1,5] Calcula a y b.

b) [1] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

EJERCICIO 56 [S/05]

Sea $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = (x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x}$$

a) [0,5] Halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1,5] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si existen, sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

c) [0,5] Esboza la gráfica de f.

EJERCICIO 57 [S/05]

De una función $f:[0\,,5] \to \mathbb{R}$ se sabe que $f(3)=6$ y que su función derivada está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 5x-2 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ x^2-6x+8 & \text{si} \quad 1 \le x \le 5 \end{cases}$$

a) [1] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.

b) [1,5] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos.

Distribución temática

Recta tangente

Monotonía, extremos, curvatura e inflexiones

1, 83,

Obtención de parámetros con pistas

Gráfica

Asíntotas

Soluciones

EJERCICIO 31 [S/00]

a) Asíntotas verticales: sólo puede haber discontinuidad de tipo infinito para $x = -2$ (cero del denominador)

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2}{x+2} = \left[\frac{4}{0}\right] = \pm\infty$$

Concluimos que $x = -2$ es una asíntota vertical.

Asíntota horizontal: calculemos el límite en el infinito.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x+2} \overset{*}{=} \pm\infty$$

Donde en (*) hemos usado la regla de los grados (grado numerador > grado denominador).

Concluimos que no hay asíntota horizontal:

Asíntota oblicua: podría haber una asíntota $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x} \overset{*}{=} 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x}{x+2} \overset{*}{=} -2$$

Donde en (*) hemos usado la regla de los grados (grado numerador = grado denominador)

Concluimos que $y = x - 2$ es una asíntota oblicua.

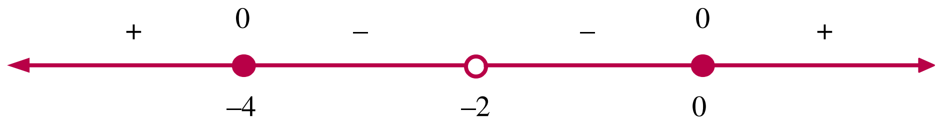
b) Para analizar la variación de la función estudiemos el signo de la derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

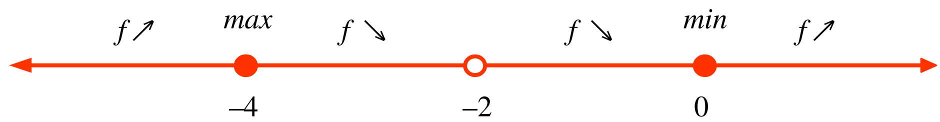
Ceros del numerador: $x^2 + 4x = 0 \rightarrow x\,(x+4) = 0 \rightarrow x = 0\,,\, x = -4$

Cerros del denominador: $(x+2)^2 = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = 2$

Intervalos de signos de la derivada:

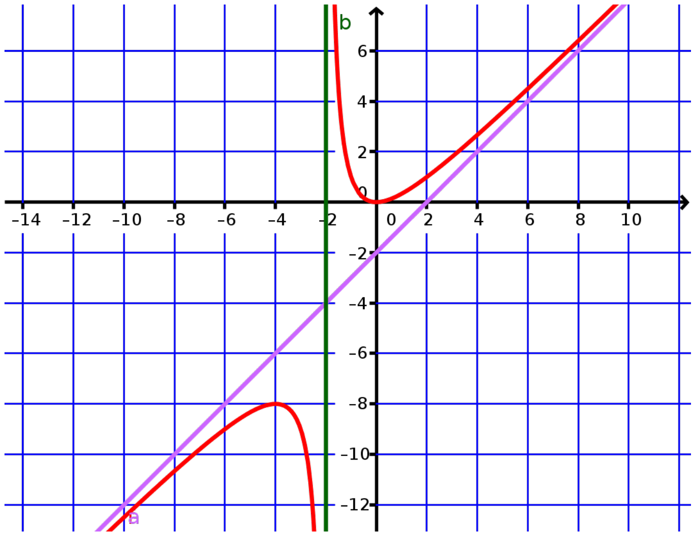


De ahí deducimos el esquema de monotonía de la función:



Es baja+sube=mínimo relativo en $x = 0 \rightarrow y = 0$ y sube+baja=máximo relativo en $x = -4 \rightarrow y = -8$.

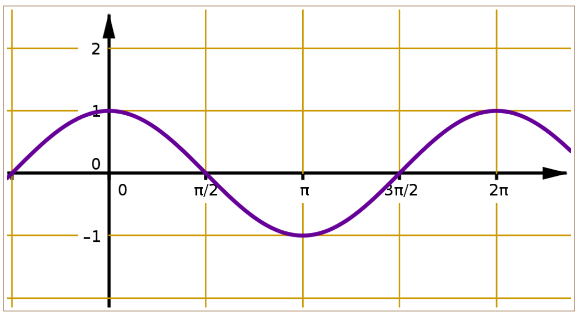
c) La gráfica:



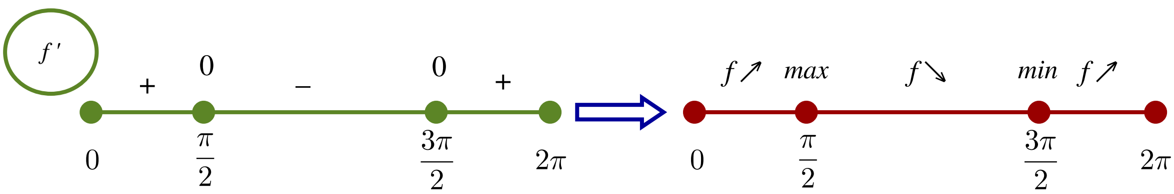
EJERCICIO 49 [S/04]

$$f(x) = \mathrm{e}^x\,(x + \cos x) \;\rightarrow\; f'(x) = 2\,\mathrm{e}^x \cos x$$

a) Observemos que la derivada primera tiene el mismo signo que la función coseno, pues la exponencial siempre es positiva. Recordemos::



Así tenemos:



b) En el esquema anterior se han deducido ya los extremos relativos interiores. Como la función es continua en un compacto, se alcanzan los extremos absolutos. Aquí el esquema de variación:

x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		2π
y	1	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{\pi/2}$	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-3\pi/2}$	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{2\pi}$

El valor máximo es $y = \mathrm{e}^{2\pi}$ y se alcanza para $x = 2\pi$.

El valor mínimo es $y = \mathrm{e}^{-3\pi/2}$ y se alcanza en $x = 3\pi/2$

EJERCICIO 52 [S/05]

a) <u>Asíntotas verticales</u>: sólo puede haber discontinuidad de tipo infinito para $x = 1$ (cero del denomindador)

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^x}{x-1} = \left[\frac{\mathrm{e}}{0}\right] = \pm\infty$$

Concluimos que $x = 1$ es una asíntota vertical.

<u>Asíntota horizontal</u>: calculamos el límite en el infinito, recordando que $\mathrm{e}^{-\infty} = 0$ y $\mathrm{e}^{+\infty} = +\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x-1} = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x-1} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1} = \left[\frac{+\infty}{1}\right] = +\infty$$

Concluimos $y = 0$ es asíntota horizontal (aunque sólo para $x \to -\infty$)

<u>Asíntota oblicua</u>: podría haber una asíntota $y = mx + n$ para $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2 - x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2} = +\infty$$

Concluimos que no hay asíntota oblicua.

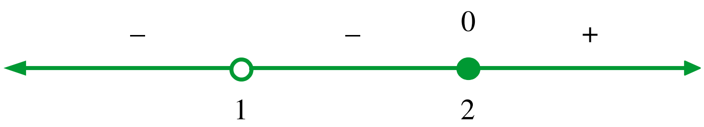
b) Para analizar la variación de la función estudiemos el signo de la derivada:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x (x-2)}{(x-1)^2}$$

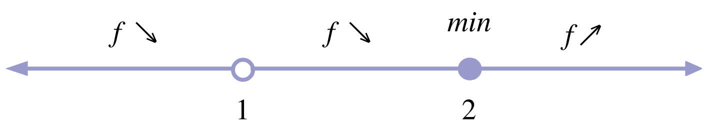
Ceros del numerador: $\mathrm{e}^x (x-2) = 0 \to x - 2 = 0 \to x = 2$

Cerros del denominador: $(x-1)^2 = 0 \to x - 1 = 0 \to x = 1$

Intervalos de signos de la derivada:



De ahí deducimos el esquema de monotonía de la función:



Hay baja+sube=mínimo relativo en $x = 2 \to y = \mathrm{e}^2 \approx 7.39$.

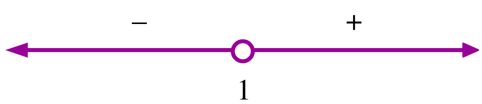
c) Para analizar la curvatura de la gráfica estudiemos el signo de la derivada segunda:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \left(x^2 - 4x + 5\right)}{(x-1)^3}$$

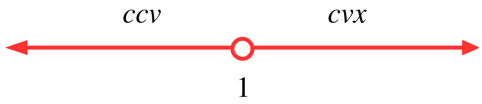
Ceros del numerador: $\mathrm{e}^x \left(x^2 - 4x + 5\right) = 0 \to x^2 - 4x + 5 = 0 \to$ no

Cerros del denominador: $(x-1)^3 = 0 \to x - 1 = 0 \to x = 1$

Intervalos de signos de la derivada segunda:



De ahí deducimos el esquema de curvatura de la función:



d) La gráfica: