TEMA 0

FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

Ejercicios para Selectividad
de
Funciones, Límites y Continuidad

Incluye algunos
Detalladamente resueltos

José Álvarez Fajardo

Enunciados

EJERCICIO 1 [S/87]

Se considera la función f definida por

$$f(x) = x^2 (2-x) \quad , \quad x \in [0\,,2)$$

y que cumple

$$f(x+2) = f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Interprete geométricamente esa condición.

b) Representa gráficamente la curva $y = f(x)$, analizando la continuidad en los puntos $x = 2n$.

EJERCICIO 2 [S/89]

Halla a para que sea continua la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} |3-x| & \text{si} \quad x > a \\ x+4 & \text{si} \quad x \leq a \end{cases}$$

EJERCICIO 3 [S/90] [R]

Determine a para que se cumpla

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+1} - x\right) = 2$$

EJERCICIO 4 [S/90]

Razone si $f(x)$ toma alguna el valor 5 cuando x varía en el intervalo $[3\,,4]$, siendo

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

EJERCICIO 5 [S/91]

Pruebe que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ siempre tiene alguna solución real.

Estudie si eso es también válido para $x^4 + ax^3 + ax^2 + cx + d = 0$

EJERCICIO 6 [S/91] [R]

Determine a para que se cumpla

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x(x+a)}{x+2} - \frac{x^2+1}{x-2}\right] = 2$$

EJERCICIO 7 [S/92]

Analice si puede aplicarse el Teorema de Bolzano a la función $y = \tan x$ en el intervalo $[\pi/3\,,3\pi/4]$.

EJERCICIO 8 [S/92]

Enuncie el Teorema de Bolzano-Weirstrass y calcule los valores extremos absolutos de la función definida por $f\,(x) = -x^2 + 9x$ en el intervalo $[0\,,5]$

EJERCICIO 9 [S/93]

Enuncie el Teorema de Bolzano para funciones continuas y compruebe que la ecuación $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ tiene tres raíces reales.

EJERCICIO 10 [S/94]

Consideremos la función f definida por

$$f\,(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{1/x}} \quad , \quad x \neq 0$$

¿Es posible definir $f\,(0) = k$, para algún valor de k, de modo que sea continua en todo punto?

EJERCICIO 11 [S/96]

Demuestra que tiene alguna solución real la ecuación

$$\frac{x}{x^4 + 3} = \frac{1}{5}$$

EJERCICIO 12 [S/96]

Halla a y b sabiendo que es continua la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

EJERCICIO 13 [S/96]

Dibuja la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f\,(x) = |\,2x - |3 - 2x|\,|$.

EJERCICIO 14 [S/96]

Determina el punto de corte de la curva $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$ con su asíntota.

EJERCICIO 15 [S/97] [R]

Determina el valor k sabiendo que pasa por el punto $(1\,,3)$ la asíntota de la curva de ecuación

$$y = \frac{x^3 + kx^2 + 1}{x^2 + 1}$$

EJERCICIO 16 [S/99]

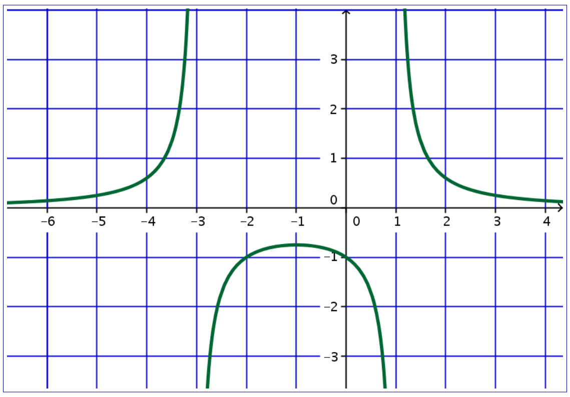
Calcula las asíntotas de la gráfica de la función f definida para $x \neq -1$ por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$$

y estudia la posición de dicha gráfica respecto a sus asíntotas.

EJERCICIO 17 [S/00] [R]

Determina a , b y c para que la curva $y = \dfrac{a}{x^2 + bx + c}$ sea la siguiente:



EJERCICIO 18 [S/01] [R]

Calcula

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$$

EJERCICIO 19 [S/02] [R]

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x|x - 4|$$

Esboza la gráfica de f . ¿Es continua en todo punto?

EJERCICIO 20 [S/02]

Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \quad , \quad x \neq 1.$$

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f .

b) Estudia la posición de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

EJERCICIO 21 [S/02]

Considera la curva de ecuación

$$y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3}$$

a) Determina sus asíntotas.

b) ¿Corta la curva a alguna de sus asíntotas en algún punto? Justifica la respuesta.

EJERCICIO 22 [S/03]

Considera la función f definida por

$$y = \frac{2x^2 + 2}{x + 2} \quad (x \neq -2)$$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) Estudia la posición relativa de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

EJERCICIO 23 [S/03]

Dada la función f definida por

$$y = \frac{x^3}{(1+x)^2} \quad (x \neq -1)$$

a) Determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) Obtén los puntos de corte, si existen, de dicha gráfica con sus asíntotas.

EJERCICIO 24 [S/07]

Sea f la función definida, para $x \neq 2$ y $x \neq -2$, por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$$

Determina las asíntotas de la gráfica de f.

EJERCICIO 25 [S/08]

Consideremos la función f definida, para $x \neq 0$ por

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}$$

determina las asíntotas de su gráfica.

EJERCICIO 26 [S/09] [R]

Determina la asíntota de la gráfica de la función $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$$

EJERCICIO 27 [S/10]

Sea f la función definida como

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{a - x} \text{ para } x \neq a$$

Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(2,3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4 .

EJERCICIO 28 [S/13]

Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{k}{(x-a)(2x-1)} \text{ para } x \neq a\,, x \neq \frac{1}{2}$$

Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(0\,,2)$ y que la recta $x = 2$ es una asíntota de ella.

EJERCICIO 29 [S/13]

Sea g la función definida por

$$g(x) = \frac{mx^3}{(x-n)^2} \quad \text{para} \quad x \neq n$$

Halla m y n sabiendo que la recta $y = 2x - 4$ es una asíntota de la gráfica de g.

EJERCICIO 30 [S/16]

Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f\,(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Calcula los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica de f .

<u>Distribución temática</u>

Continuidad	1 , 10 , 11 , 19
Continuidad con parámetros	2 , 12
Cálculo de límites	18
Cálculo de límites con parámetros	3 , 6
Asíntotas	14 , 16 , 20 , 21 , 22 , 23 , 24 , 25 , 26 , 30
Asíntotas con parámetros	15 , 17 , 27 , 29
Teoremas del valor medio	4 , 5 , 7 , 8 , 9 , 11

Soluciones

EJERCICIO 3 []

Vamos a calcular el límite en función del parámetro y luego igualaremos a 2. En primer lugar, si intentamos un cálculo directo, sin operar nada:

$$L = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x \right) = \infty - \infty = \{IND\}$$

Nos aparece una indeterminación (ese límite puede ser cualquier cosa y el camino elegido no lo muestra). Primer truco: multiplicaremos numerador y denominador por la expresión conjugada (igual que cuando se racionaliza):

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + ax + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax + 1}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x}$$

Ahora parece peor, pero no lo es: un intento de cálculo directo de nuevo nos lleva a una indeterminación. Usaremos un nuevo truco (el segundo) : dividiremos entre la potencia líder que, si nos fijamos bien, es x:

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{a + 1/x}{\sqrt{1 + a/x + 1/x^2} + 1} = \frac{a + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{a}{2}$$

¡Ahí está el límite al descubierto! Ahora lo igualamos al número deseado y sacamos el parámetro:

$$L = 2 \to \frac{a}{2} = 2 \to a = 4$$

EJERCICIO 6

Vamos a calcular el límite en función del parámetro y luego igualaremos a 2. En primer lugar, si intentáramos un cálculo directo, sin operar nada:

$$L = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x\,(x + a)}{x + 2} - \frac{x^2 + 1}{x - 2} \right] = \infty - \infty = \text{ind}$$

Nos aparece una indeterminación (ese límite puede ser cualquier cosa y el camino elegido no lo muestra). Vamos entonces a realizar todas las operaciones que hay ahí y luego intentaremos calcular el límite:

$$\frac{x^2 + ax}{x + 2} - \frac{x^2 + 1}{x - 2} = \frac{\left(x^2 + ax\right)(x - 2) - \left(x^2 + 1\right)(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{(4 - a)\,x^2 - (2a + 1)\,x - 2}{x^2 - 4}$$

Así que:

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{(4 - a)\,x^2 - (2a + 1)\,x - 2}{x^2 - 4} = \frac{4 - a}{1} = 4 - a$$

Al final lo hemos sacado por la regla de los grados. Pero igualemos ya al número deseado y obtengamos a:

$$L = 2 \to 4 - a = 2 \to a = 2$$

EJERCICIO 15

Observemos que $y = \dfrac{x^3 + kx^2 + 1}{x^2 + 1}$ no tiene ceros en el denominador, por lo que no tiene asíntotas verticales.

Y el numerador tiene mayor grado que el denominador, así que no tiene asíntotas horizontales.

Si hay asíntota debe ser oblicua: $y = mx + n$. Vamos a obtener su fórmula (con la letra k) y luego obtendremos el parámetro obligando a que pase por el punto $(1\,,3)$

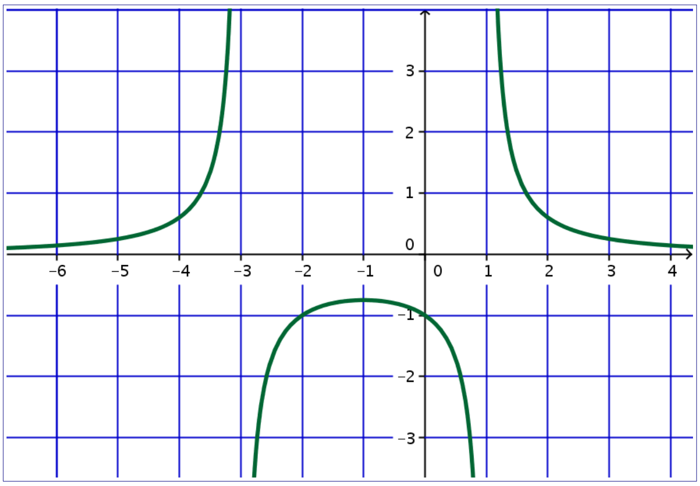
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+kx^2+1}{x^3+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3+kx^2+1}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{kx^2-x+1}{x^2+1} = k$$

Como la asíntota $y = x + k$ pasa por el punto $(1\,,3)$, sustituyendo:

$$3 = 1 + k \to k = 2$$

EJERCICIO 17



Como la función es racional, sólo puede ser discontinua en los ceros del denominador.

Y en la gráfica vemos que hay asíntotas verticales (discontinuidades de salto infinito) para $x = -3$ y $x = 1$.

Así que éstos son los ceros del denominador y por ello:

$$x^2 + bx + c = (x+3)(x-1)$$

Efectuando e igualando:

$$x^2 + bx + c = x^2 + 2x - 3 \to b = 2\,, c = -3$$

Por otro lado, observamos claramente que la gráfica pasa por el punto $(0\,,-1)$; así:

$$f(0) = -1 \to \frac{a}{0+0-3} = -1 \to a = 3$$

Resumiendo:

$$a = 3\,, b = 2\,, c = -3$$

EJERCICIO 18

Calculemos el limite usando técnicas elementales:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \left[\frac{0}{0} = IND\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

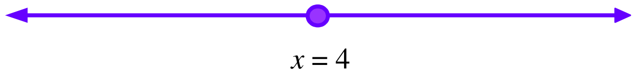
Se ha simplificado ese numerador usando la igualdad notable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

$$\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right) = 1^2 - \left(\sqrt[\cancel{2}]{1-x^2}\right)^{\cancel{2}} = 1 - 1 + x^2 = x^2$$

EJERCICIO 19

Primero, expresemos como una función a trozos. Observemos:

$$|x-4| = -x+4 \qquad 0 \qquad |x-4| = x-4$$



Luego

$$f(x) = x|x-4| = \begin{cases} -x^2+4x & \text{si} \quad x<4 \\ x^2-4x & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Podemos analizar algebraicamente la continuidad observando que, al ser polinómica a trozos, sólo podría ser discontinua para $x=4$ (separa-fórmulas). Veamos detenidamente en este punto:

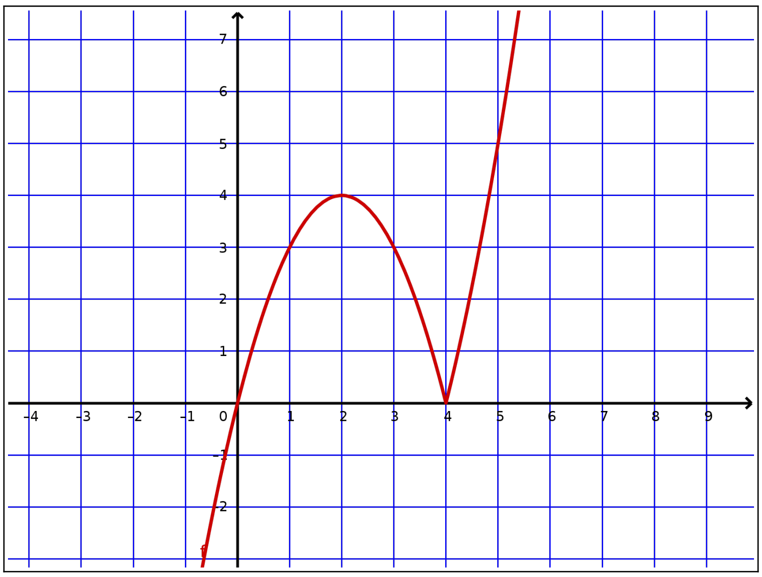
$\boxed{x=4}$

Valor: $f\,(4) = 0$

Límites: $\lim\limits_{x \to 4} f(x) \begin{cases} f(4-) = -16+16 = 0 \\ f(4+) = 16-16 = 0 \end{cases}$

Concluimos que es continua para $x=4$.

Para dibujar su gráfica, manualmente basta un par de tablas de valores para representar los dos trozos de parábola que la componen. Aquí la tenemos con Geogebra:



EJERCICIO 24

Asíntotas verticales:

Aparecen en las discontinuidades de salto infinito. Como es una función racional veamos los ceros del denominador:

$$x^2-4=0\to x=\pm 2$$

Calculamos los límites para estar seguros (y que no se trate de discontinuidades evitables):

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\left[\frac{7}{0}\right]=\pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\left[\frac{7}{0}\right]=\pm\infty$$

La gráfica tiene dos asíntotas verticales: $x=-2$ y $x=2$.

Asíntotas horizontales:

Calculemos los límites en el infinito (usaremos la regla de los grados).

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{1}{1}=1$$

Concluimos que hay una asíntota horizontal: $y=1$.

Asíntotas oblicuas:

Al tener asíntota horizontal tanto para $x\to-\infty$ como para $x\to+\infty$ no puede tener asíntotas oblicuas.

EJERCICIO 26

Debemos leer detenidamente el enunciado y ser cuidadoso. Primero observemos el dominio: $\mathbb{D}=[1\,,+\infty)$

Y en segundo lugar observemos que nos dice "la asíntota", dando a entender que sólo tiene una.

La función no tiene saltos infinitos, al ser continua en todo su dominio, así que no tiene asíntotas verticales.

Comprobemos si hay horizontales viendo si el es finito el límite para $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)=+\infty+\infty=+\infty$$

Concluimos que no las tiene. Por ello, si hay asíntota tendrá que ser una oblicua $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}+\frac{x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}+1\right)=1+1=2$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

Concluimos que hay una asíntota oblicua:

$$y=2x-\frac{1}{2}$$