| *Nombre*:______________________________ *Curso*:_____ | |
|---|---|
| *Matemáticas II – Examen Final – 21/05/2024* | |

EJERCICIO 1:

Sea la función $f$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} - 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) [1,25] Analice su continuidad y derivabilidad, obteniendo $f'(x)$.

b) [0,75] Obtenga sus asíntotas.

c) [0,5] Halle la ecuación de su recta tangente para $x = 1$.

EJERCICIO 2:

Calcule el límite siguiente según los valores de $a$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x} + ax}{x - \operatorname{sen} x}$$

EJERCICIO 3:

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

a) [1] Obtén los valores de $a$, $b$ y $c$ sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión para $x = 0$ y que presenta un extremo relativo en el punto $(-1, 3)$.

b) [1,5] Para $a = 0$ , $b = -3$ , $c = 1$ estudia su monotonía y obtén los valores extremos en el intervalo $[0, 5]$.

EJERCICIO 4:

En un pueblo se quiere cercar un recinto rectangular cerrado para celebrar las fiestas, aprovechando una tapia existente como uno de los lados y dispone de 400 metros de tela metálica para hacer los otros tres.

a) [2] ¿Podría indicar las dimensiones del recinto acotado de esa forma cuya área es la mayor posible?

b) [0,5] Se estima que para montar las atracciones, pista de bailes, ... necesitan 18000 $m^2$. Teniendo en cuenta los cálculos anteriores, ¿será suficientemente grande el recinto anterior?

EJERCICIO 5:

Obtén la siguiente integral de una función racional:

$$\int \frac{6x + 4}{x^2 - 4}\, dx$$

EJERCICIO 6:

a) [1,5] Dibuja y halla el área del recinto delimitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y la recta $2x + y = 5$.

b) [1] Calcula

$$\int_0^4 |2x - 6|\, dx$$

TODO → 2-3 + 5-6 + 7-8 + 10-11 /// I + IV → 1-2 + 3-4 + 9-10 + 11-12 /// I+III+IV → 1-2 + 7-8 + 9-10 + 11-12

EJERCICIO 7: Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Halle los valores de $a$ y $b$ para que se verifique $C \cdot B^t = A$.

b) [1,25] Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + 2A^2 = 3\,\mathrm{I}$.

c) [0,5] Halla una matriz $Y$ tal que $A - 2Y = B \cdot B^t$.

EJERCICIO 8: Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & a-1 \\ ax & + & y & + & 2z & = & a \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discútelo según los valores del parámetro $a$.

b) [1] Resuelve el sistema para $a = 2$ y obtenga una solución con $x + y = 2$, si es que existe alguna.

EJERCICIO 9: Consideremos los vectores

$$\vec{u} = (-1\,,0\,,2) \;,\; \vec{v} = (1\,,1\,,0) \;,\; \vec{w} = (a\,,b\,,2)$$

a) [1,5] Halle $a$ y $b$ sabiendo que los tres son linealmente dependientes y que $\vec{u} \perp \vec{w}$.

b) [1] Para $b = 0$, ¿cuándo el volumen del paralelepípedo formado por dichos vectores será de 16 unidades cúbicas?

EJERCICIO 10: Consideremos el punto y el plano definidos por

$$P\,(1\,,1\,,-1) \quad , \quad \pi : 2x + 2y - z + 4 = 0$$

a) [1,25] Halla el simétrico del punto $P$ respecto del plano $\pi$.

b) [1,25] Calcula el área del triángulo que determina el plano con los ejes de coordenadas.

EJERCICIO 11: Consideremos el punto y la recta

$$A\,(3\,,2\,,1) \quad , \quad r : \frac{x+2}{-1} = y - 6 = z - 1$$

a) [1,5] Calcula las coordenadas de la proyección de $A$ sobre $r$.

b) [1] Halla la ecuación del plano que contiene al punto $A$ y a la recta $r$.

EJERCICIO 12: Consideremos las rectas

$$r : \left\{\begin{array}{l} x = -1 - 2\lambda \\ y = \;\;\, 2 + \;\lambda \\ z = \;\;\, 0 \end{array}\right. \quad , \quad s : \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 - \mu \\ z = 1 + \mu \end{array}\right.$$

a) [0,5] Estudiemos su posición relativa.

b) [1,5] Calculemos los respectivos puntos en sendas rectas que están a la menor distancia posible. ¿Cuál es esa distancia?

c) [0,5] ¿Cuál es la ecuación de la recta secante y perpendicular común a ambas?

TODO → 2-3 + 5-6 + 7-8 + 10-11 /// I + IV → 1-2 + 3-4 + 9-10 + 11-12 /// I+III+IV → 1-2 + 7-8 + 9-10 + 11-12

EJERCICIO 1:

a) CONTINUIDAD:

Sólo puede ser discontinua para $x = 2$ (cero del denominador) y para $x = 0$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo. Veamos detenidamente en estos puntos:

$\boxed{x=2}$

Valor: $f(2) = \text{No existe}$

Límites: $$\lim_{x\to 2} f(x) \begin{cases} f(2_-) = \left[\dfrac{2}{-0}\right] = -\infty \\ f(2_+) = \left[\dfrac{2}{+0}\right] = +\infty \end{cases}$$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x = 2$.

$\boxed{x=0}$

Valor: $f(0) = \mathrm{e}^0 - 2 = -1$

Límites: $$\lim_{x\to 0} f(x) \begin{cases} f(0-) = \mathrm{e}^0 - 2 = -1 \\ f(0-) = \dfrac{2}{-2} = -1 \end{cases}$$

Concluimos que es continua para $x = 0$.

DERIVABILIDAD:

Podemos derivar cada trozo directamente: $$f'(x) = \begin{cases} 3\mathrm{e}^{3x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{-2}{(x-2)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Para $x = 2$ es claro que no hay derivada, pues no es continua.

Para $x = 0$, como $f$ es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

D.L. $$\begin{cases} f'(0-) = 3\mathrm{e}^0 = 3 \\ f'(0+) = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Concluimos que $f$ no es derivable para $x = 0$, habiendo un punto anguloso.

b) <u>Asíntotas verticales</u>: como $\lim_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$ es

$$x = 2$$

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{-3x} - 2) = \mathrm{e}^{-\infty} - 2 = 0 - 2 = -2 \quad \to \quad y = -2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-2} = \left[\frac{2}{+\infty}\right] = 0 \quad \to \quad y = 0$$

Tenemos así dos asíntotas horizontales.

<u>Asíntotas oblicuas</u>: no existen pues hay horizontal $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$

c) La ecuación de la tangente para $x = 1$ es:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \;\to\; y - (-2) = \frac{-2}{1}(x-1) \;\to\; y = -2x$$

EJERCICIO 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}+ax}{x-\operatorname{sen}x}\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}+a\,x}{x-\operatorname{sen}x}=\frac{1-1+0}{0-0}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{-2x}+a}{1-\cos x}=\left[\frac{4+a}{0}\right][*]$$

Caso $a\neq -4$: es [*] un límite infinito (numerador tiende a número no nulo y denominador a cero):

$$L=\left[\frac{4+a}{0}\right]=\pm\infty$$

Caso $a=-4$: es [*] una indeterminación, que resolvemos aplicando otra vez L'Hôpital (reiteradamente):

$$L=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{4\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^{-2x}}{\operatorname{sen}x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{8\mathrm{e}^{2x}+8\mathrm{e}^{-2x}}{\cos x}=16$$

EJERCICIO 3:

a) Primero, derivemos dos veces la función:

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\ \rightarrow\ f'(x)=3x^2+2ax+b\ \rightarrow\ f''(x)=6x+2a$$

Para $x=0$ hay inflexión así:

$$f''(0)=0\ \rightarrow\ 2a=0\ \rightarrow\ a=0$$

Como el punto $(-1\,,3)$ es un extremo, deducimos dos cosas:

| | | |
|---|---|---|
| $f(-1)=3$: | $(-1)^3+b(-1)+c=3\ \rightarrow\ -b+c=4$ | [*] |
| $f'(-1)=0$: | $3(-1)^2+b=0\ \rightarrow\ b=-3$ | [**] |

Sustituyendo [**] en [*] concluimos así que

$$a=0\,,\ b=-3\,,\ c=1$$

b) Los extremos absolutos (máximo y mínimo) de una función derivable, en un intervalo cerrado, se alcanzan o en los bordes del intervalo o en los ceros de la derivada.

Así, primero derivaremos y hallaremos los ceros de la derivada:

$$f(x)=x^3-3x+1\ \rightarrow\ f'(x)=3x^2-3=0\ \rightarrow\ x=\pm 1$$

Vamos a construir una tabla de variación de la función en el intervalo compacto dado:

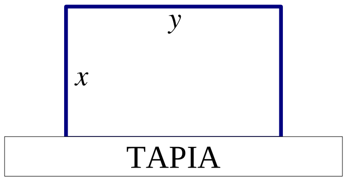
| *x* | 0 | | 1 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *y* | 1 | ↘ | –1 | ↗ | 111 |

Mínimo absoluto: $(1\,,-1)$

Máximo absoluto: $(5\,,111)$

EJERCICIO 4:

[Variables y magnitud que debemos optimizar]




Llamamos $x$ al lado perpendicular a latapia e $y$ al lado paralelo a la tapia. Tenemos que maximizar la superficie de ese rectángulo:

$$S = x \cdot y$$

[Ligadura]

Como hay 400 metros de tala metálica:

$$2x + y = 400 \to y = 400 - 2x$$

[Función]

Queremos maximizar

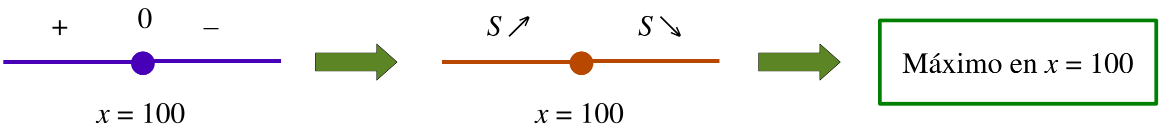
$$S = x \cdot (400 - 2x) = 400x - 2x^2$$

[Derivada / Extremo]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S' = 400 - 4x = 0 \to x = 100$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de $S$:




Luego la parcela rectangular tiene 100 m de ancho (perpendicular a la tapia) y tiene 400 – 2 · 100 = 200 m de largo (paralelo a la tapia).

La superficie máxima es

$$S = 200 \cdot 100 = 20000\,m^2 > 18000\,m^2$$

Luego sí es suficientemente grande.

EJERCICIO 5:

$$\int \frac{6x+3}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$$

Observemos que el grado del numerador es menor que el del denominador y que

$$x^2 - 4 = 0 \longrightarrow x = \pm 2$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{6x+4}{(x-2)\,(x+2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$

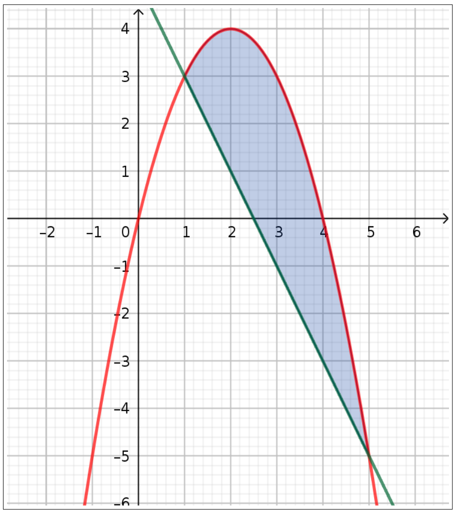
Efectuando e igualando los numeradores:

$$6x + 4 = a\,(x+2) + b\,(x-2) \longrightarrow \begin{cases} \text{si } x = -2 \to -8 = -4b \to b = 2 \\ \text{si } x = +2 \to 16 = 4a \to a = 4 \end{cases}$$

Resultando:

$$\int \frac{6x+4}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = I = \int \frac{4}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x+2}\,\mathrm{d}x = 4\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C$$

EJERCICIO 6:



a) Para hallar los puntos de corte de dos gráficas resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones:

$$y = 4x - x^2 \text{ y la recta } 2x + y = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 5 - 2x \\ y = 4x - x^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{igualando} x^2 - 6x + 5 = 0$$

Resolviendo y sustituyendo obtenemos que se cortan en los puntos $(1\,,3)$ y $(5\,,-5)$.

La gráfica (parábola y recta) es sencilla obtenerla con dos tablas de valores, teniendo en cuenta los dos puntos de corte.

El área viene dada por:

$$a(\mathfrak{R}) = \int_1^5 \left[\left(4x - x^2\right) - (5 - 2x)\right] \mathrm{d}x$$

Ahora, simplificamos y aplicamos la Regla de Barrow:

$$a(\mathfrak{R}) = \int_1^5 \left(-x^2 + 6x - 5\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right]_{x=1}^{x=5} = \frac{25}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

b) Expresaremos el integrando como una función a trozos. Es fácil observar que el interior del valor absoluto es cero para $x = 3$, que es negativo para $x < 3$ y positivo para $x > 3$, por ello:

$$|2x - 6| = \begin{cases} -2x + 6 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ 2x - 6 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Así que separamos la integral en dos y aplicamos Barrow:

$$I = \int_0^3 (-2x + 6)\ \mathrm{d}x + \int_3^4 (2x - 6)\ \mathrm{d}x = \left[-x^2 + 6x\right]_{x=0}^{x=3} + \left[x^2 - 6x\right]_{x=3}^{x=4} = 9 + 1 = 10$$

EJERCICIO 7:

a) Efectuamos el producto e igualamos el resultado a la matriz $A$ :

$$B \cdot C^t = \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ b & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b - 3 & -2a - b - 1 \\ -2a + b & -a - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left\{\begin{array}{rcr} a - 2b - 3 & = & 2 \\ -2a - b - 1 & = & -1 \\ -2a + b & = & -4 \\ -a - 2b & = & 3 \end{array}\right| \rightarrow a = 1\,,\, b = -2$$

b) Si $A$ tiene inversa, podemos despejar la matriz $X$ :

$$X \cdot A - 2\mathrm{I} = A^2 = \rightarrow X \cdot A = 2\mathrm{I} + A^2 \rightarrow X = \left(2\mathrm{I} + A^2\right) \cdot A^{-1}$$

$A$ es cuadrada y tiene inversa:

$$\det(A) = 6 - 4 = 2 \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuamos ahora el paréntesis:

$$2\mathrm{I} - A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -20 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -20 & 15 \end{pmatrix}$$

Por fin hallamos $X$ :

$$X = \left(2\mathrm{I} + A^2\right) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -20 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

c) Es fácil despejar:

$$A + 3Y = B \cdot B^t \;\rightarrow\; 2Y = B \cdot B^t - A \;\rightarrow\; Y = \frac{1}{2} \cdot \left(B \cdot B^t - A\right)$$

Efectuando las operaciones:

$$Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 8:

a) Para discutir, calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = a^2 - 3a + 2 \xrightarrow{|C|=0} \rightarrow a = 1\,, a = 2$$

<u>Caso 1</u>: $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 3$$

$S$ es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $a = 1$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{menor} \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlo} \Delta_3^1 = |C| = 0\;,\; \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Deducimos de aquí que $S$ es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 2 \neq \mathrm{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $a = 2$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{menor} \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlo} \Delta_3^1 = |C| = 0\;,\; \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

$S$ es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce además que $S$ equivale al sistema determinado por el menor $\Delta_2$ ($x$ e $y$ incógnitas principales y $z$ como incógnita libre o parámetro):

$$S \equiv \begin{cases} x + 2y = 1 - z \\ x + \;\; y = 1 - z \end{cases}$$

Poniendo $z = t$ y reduciendo obtenemos la solución:

$$(x\,, y\,, z) = (1 - t\,, 0\,, t) \quad , \quad t \in R$$

Observemos:

$$x + y = 2 \to 1 - t = 2 \to t = -1 \to (x\,,y\,,z) = (2\,,0\,,-1)$$

EJERCICIO 9:

a) Sólo son dependientes cuando

$$\det\left[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\right] = 0 \to \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & b & 2 \end{vmatrix} = 0 \to -2 + 2b - 2a = 0 \quad [*]$$

Por otra parte:

$$\vec{u} \perp \vec{w} \to \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \to -a + 0 + 4 = 0 \quad [**]$$

De [*] y [**] obtenemos fácilmente que es $a = 4$ y $b = 5$.

b) El volumen señalado es el valor absoluto del producto mixto, así:

$$\det\left[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\right] = -2 - 2a \to |-2 - 2a| = 16 \begin{array}{l} \nearrow \quad -2 - 2a = +16 \to a = -9 \\ \searrow \quad -2 - 2a = -16 \to a = +7 \end{array}$$

EJERCICIO 10:

a) Obtenemos la ecuación de la recta $r$ perpendicular al plano $\pi$ (lleva la dirección del vector normal) que pasa por $P$ y calculamos el punto $Q$ intersección de $r$ con $\pi$ (proyección):

$$\left.\begin{array}{rl} x = & 1 + 2\lambda \\ y = & 1 + 2\lambda \\ z = & -1 - \lambda \end{array}\right\} \mapsto \pi : 2\,(1 + 2\lambda) + 2\,(1 + 2\lambda) - (-1 - \lambda) + 4 = 0 \;\to\; 9\lambda + 9 = 0 \;\to\; \lambda = -1$$

Es:

$$Q = r \cap \pi = (-1\,,-1\,,0)$$

Como el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ es $Q$:

$$\frac{P + P'}{2} = Q \;\to\; P' = 2Q - P \;\to\; P' = (-3\,,-3\,,1)$$

a) Puntos de corte del plano con los ejes coordenados:

Corte con eje X: $y = z = 0 \;\mapsto\; \pi : 2x + 4 = 0 \;\to\; x = -2 \;\to\; A = (-2\,,0\,,0)$

Corte con eje Y $x = z = 0 \;\mapsto\; \pi : 2y + 4 = 0 \;\to\; y = -2 \;\to\; B = (0\,,-2\,,0)$

Corte con eje Z: $x = y = 0 \;\mapsto\; \pi : -z + 4 = 0 \;\to\; z = 4 \;\to\; C = (0\,,0\,,4)$

El área del $\triangle ABC$ es la mitad de la del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Calculamos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} + 4\vec{k} = (-8\,,-8\,,4)$$

Así:

$$A\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{64 + 64 + 16} = \frac{\sqrt{144}}{2} = 6 \quad (\mathrm{u}^2)$$

EJERCICIO 11:

a) Para calcular la proyección $Q$ de $A\,(3\,,2\,,1)$ sobre $r$ usaremos el método del punto genérico:

$$r:\begin{cases} x = -2-\lambda \\ y = \quad 6+\lambda \\ z = \quad 1+\lambda \end{cases} \to Q=(-2-\lambda\,,6+\lambda\,,1+\lambda)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{AQ}\perp\vec{v}_r$:

$$\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{v}_r=0\ \to\ (-5-\lambda\,,4+\lambda\,,\lambda)\cdot(-1\,,1\,,1)=0\ \to\ 5+\lambda+4+\lambda+\lambda=0\ \to\ \lambda=-3$$

Tenemos así que

$$Q=(1\,,3\,,-2)$$

b) Ante todo, observemos que si la recta está contenida en el plano, su punto $P_r=(-2\,,6\,,1)$ está en el plano y su vector director $\vec{v}_r=(-1\,,1\,,1)$ está en la dirección del plano. Así tenemos para el plano:

Punto: $A\,(3\,,2\,,1)$.

Vectores directores: $\overrightarrow{P_rA}=(-5\,,4\,,0)$, $\vec{v}_r=(-1\,,1\,,1)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} -3x & y-2 & z-1 \\ -5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Desarrollando y simplificando:

$$-4x-5y+z+21=0$$

EJERCICIO 12:

a) Consideremos sus vectores directores $\vec{v}_r=(-2\,,1\,,0)$ y $\vec{v}_s=(0\,,-1\,,1)$. Es

$$\frac{-2}{-0}\neq\frac{1}{-1}\neq\frac{0}{1}\ \to\ \vec{v}_r\nparallel\vec{v}_s$$

Tenemos por lo anterior que las rectas o son secantes o se cruzan. Tomamos un punto de cada recta $P_r=(-1\,,2\,,0)$ y $P_s=(2\,,4\,,1)$ y calculamos

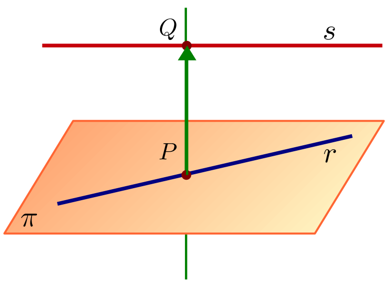
$$\Delta=\det[\overrightarrow{P_sP_r}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s]=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0\longrightarrow \text{se cruzan}$$

b) [Método del doble punto genérico] Expresemos cada punto en función de un parámetro y obtengamos el vector que determinan:

$$\left.\begin{array}{l} P=(-1-2\lambda\,,2+\lambda\,,0) \\ Q=(2\,,4-\mu\,,1+\mu) \end{array}\right\}\to\overrightarrow{PQ}=(3+2\lambda\,,2-\lambda-\mu\,,1+\mu)$$

La distancia mínima se obtiene cuando $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{v}_s$, así:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r=-5\lambda-\mu-4=0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_s=\lambda+2\mu-1=0 \end{array}\right\}\xrightarrow{resu}\lambda=-1\,,\ \mu=1$$




Tenemos así que

$$P=(1\,,1\,,0)\ ,\ Q=(2\,,3\,,2)\ ,\ \overrightarrow{PQ}=(1\,,2\,,2)$$

La distancia entre las dos rectas es :

$$\mathrm{d}\,(r\,,s) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \quad [u]$$

c) La *copersecante* (común perpendicular secante) es la recta que pasa por $P$ y $Q$:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$$