Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Recuperación Geometría – 21/05/2024	

EJERCICIO 1:

Consideremos los vectores

$$\vec{u} = (-1\,,0\,,2)\ \ ,\ \vec{v} = (1\,,1\,,0)\ ,\ \vec{w} = (a\,,b\,,2)$$

a) [1,5] Halle a y b sabiendo que los tres son linealmente dependientes y que $\vec{u} \perp \vec{w}$.

b) [1] Para $b = 0$, ¿cuándo el volumen del paralelepípedo formado por dichos vectores será de 16 unidades cúbicas?

EJERCICIO 2:

Consideremos el punto y el plano definidos por

$$P\,(1\,,1\,,-1) \quad , \quad \pi : 2x + 2y - z + 4 = 0$$

a) [1,25] Halla el simétrico del punto P respecto del plano π.

b) [1,25] Calcula el área del triángulo que determina el plano con los ejes de coordenadas.

EJERCICIO 3:

Consideremos el punto y la recta

$$A\,(3\,,2\,,1) \quad , \quad r : \frac{x+2}{-1} = y - 6 = z - 1$$

a) [1,5] Calcula las coordenadas de la proyección de A sobre r.

b) [1] Halla la ecuación del plano que contiene al punto A y a la recta r.

EJERCICIO 4:

Consideremos las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - 2\lambda \\ y = \ \ \ 2 + \ \lambda \\ z = \ \ \ 0 \end{array} \right. \quad , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 - \mu \\ z = 1 + \mu \end{array} \right.$$

a) [0,5] Estudiemos su posición relativa.

b) [1,5] Calculemos los respectivos puntos en sendas rectas que están a la menor distancia posible. ¿Cuál es esa distancia?

c) [0,5] ¿Cuál es la ecuación de la recta secante y perpendicular común a ambas?

EJERCICIO 1:

a) Sólo son dependientes cuando

$$\det[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}] = 0 \to \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & b & 2 \end{vmatrix} = 0 \to -2+2b-2a=0 \quad [*]$$

Por otra parte:

$$\vec{u} \perp \vec{w} \to \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \to -a+0+4=0 \quad [**]$$

De [*] y [**] obtenemos fácilmente que es $a=4$ y $b=5$.

b) El volumen señalado es el valor absoluto del producto mixto, así:

$$\det[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}] = -2-2a \to |-2-2a| = 16 \begin{array}{l} \nearrow \quad -2-2a=+16 \to a=-9 \\ \searrow \quad -2-2a=-16 \to a=+7 \end{array}$$

EJERCICIO 2:

a) Obtenemos la ecuación de la recta r perpendicular al plano π (lleva la dirección del vector normal) que pasa por P y calculamos el punto Q intersección de r con π (proyección):

$$\left.\begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = -1-\lambda \end{array}\right\} \mapsto \pi : 2\,(1+2\lambda)+2\,(1+2\lambda)-(-1-\lambda)+4=0 \;\to\; 9\lambda+9=0 \;\to\; \lambda=-1$$

Es:

$$Q = r\cap\pi = (-1\,,-1\,,0)$$

Como el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ es Q:

$$\frac{P+P'}{2} = Q \;\to\; P' = 2Q-P \;\to\; P' = (-3\,,-3\,,1)$$

a) Puntos de corte del plano con los ejes coordenados:

Corte con eje X: $y=z=0 \;\mapsto\; \pi : 2x+4=0 \;\to\; x=-2 \;\to\; A=(-2\,,0\,,0)$

Corte con eje Y $x=z=0 \;\mapsto\; \pi : 2y+4=0 \;\to\; y=-2 \;\to\; B=(0\,,-2\,,0)$

Corte con eje Z: $x=y=0 \;\mapsto\; \pi : -z+4=0 \;\to\; z=4 \;\to\; C=(0\,,0\,,4)$

El área del $\triangle ABC$ es la mitad de la del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Calculamos

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8\vec{\imath}-8\vec{\jmath}+4\vec{k} = (-8\,,-8\,,4)$$

Así:

$$A\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{64+64+16} = \frac{\sqrt{144}}{2} = 6 \quad (\mathrm{u}^2)$$

EJERCICIO 3:

a) Para calcular la proyección Q de $A\,(3\,,2\,,1)$ sobre r usaremos el método del punto genérico:

$$r : \left\{\begin{array}{l} x = -2-\lambda \\ y = 6+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{array}\right. \to Q = (-2-\lambda\,,6+\lambda\,,1+\lambda)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{AQ} \perp \vec{v}_r$:

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \to (-5-\lambda\,,4+\lambda\,,\lambda)\cdot(-1\,,1\,,1) = 0 \to 5+\lambda+4+\lambda+\lambda = 0 \to \lambda = -3$$

Tenemos así que

$$Q = (1\,,3\,,-2)$$

b) Ante todo, observemos que si la recta está contenida en el plano, su punto $P_r = (-2\,,6\,,1)$ está en el plano y su vector director $\vec{v}_r = (-1\,,1\,,1)$ está en la dirección del plano. Así tenemos para el plano:

Punto: $A\,(3\,,2\,,1)$.

Vectores directores: $\overrightarrow{P_rA} = (-5\,,4\,,0)$, $\vec{v}_r = (-1\,,1\,,1)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} -3x & y-2 & z-1 \\ -5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando:

$$-4x - 5y + z + 21 = 0$$

EJERCICIO 4:

a) Consideremos sus vectores directores $\vec{v}_r = (-2\,,1\,,0)$ y $\vec{v}_s = (0\,,-1\,,1)$. Es

$$\frac{-2}{-0} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1} \to \vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s$$

Tenemos por lo anterior que las rectas o son secantes o se cruzan. Tomamos un punto de cada recta $P_r = (-1\,,2\,,0)$ y $P_s = (2\,,4\,,1)$ y calculamos

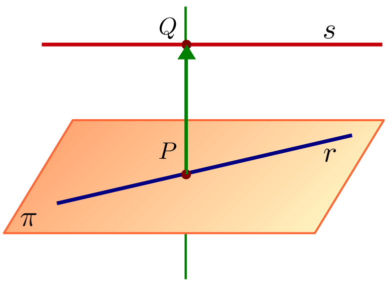
$$\Delta = \det[\overrightarrow{P_sP_r}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow \text{se cruzan}$$

b) [Método del doble punto genérico] Expresemos cada punto en función de un parámetro y obtengamos el vector que determinan:

$$\left.\begin{array}{l} P = (-1-2\lambda\,,2+\lambda\,,0) \\ Q = (2\,,4-\mu\,,1+\mu) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{PQ} = (3+2\lambda\,,2-\lambda-\mu\,,1+\mu)$$

La distancia mínima se obtiene cuando $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_r$ y $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_s$, así:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r = -5\lambda-\mu-4 = 0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_s = \lambda+2\mu-1 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{resu} \lambda = -1\,,\ \mu = 1$$



Tenemos así que

$$P = (1\,,1\,,0)\ ,\ Q = (2\,,3\,,2)\ ,\ \overrightarrow{PQ} = (1\,,2\,,2)$$

La distancia entre las dos rectas es :

$$\mathrm{d}\,(r\,,s) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3 \quad [u]$$

c) La *copersecante* (común perpendicular secante) es la recta que pasa por P y Q:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$$