Nombre:____ *Curso*:_____	
Matemáticas II – Geometría del espacio – 06/05/2024	

EJERCICIO 1:

Sean r y s las rectas dadas por

$$r:\begin{cases} z=3 \\ x+y=4 \end{cases} \quad , \quad s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=a+\lambda \end{cases}$$

a) [1,25] Estudia la posición relativa de ambas rectas según el valor de a.

b) [0,5] Obtén su punto de intersección cuando sean secantes.

c) [0,75] Halla la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s cuando $a=0$.

EJERCICIO 2:

Consideremos el plano dado por

$$\pi: 2x+3y-6z+12=0$$

a) [1,25] Obtén el área del triángulo que determina el plano π con los ejes de coordenadas.

b) [1,25] ¿Qué punto del eje Y dista 3 unidades del plano?

EJERCICIO 3:

Consideremos los puntos y el plano

$$A(1,2,1) \quad , \quad B(0,3,-3) \quad , \quad \pi: 2x-y+z=13$$

a) [1,5] Averigua las coordenadas del simétrico del punto A respecto del plano.

b) [1] Obtén la medida del ángulo (en grados, minutos y segundos) que forman la recta AB y el plano.

EJERCICIO 4:

Consideremos el punto y la recta siguientes

$$P(-1,8,0) \quad , \quad r: \frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{2}=z-1$$

a) [1,25] Determina el punto de r más próximo a P.

b) [0,5] Halla la ecuación de la recta secante perpendicular a r trazada desde P.

c) [0,75] Escribe la ecuación de la recta s paralela a r por el punto P. ¿Qué distancia separa ambas rectas?

1 $r: \begin{cases} x = 4 - t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ $P_r(4,0,3)$, $\vec{v_r} = (-1,1,0)$ $s \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = a+\lambda \end{cases}$ $P_s(1,0,a)$, $\vec{v_s} = (1,2,1)$

ⓐ **1** ¿Son paralelas? Veamos si los vectores directores son proporcionales:

$$¿\ \frac{-1}{1} = \frac{1}{2} = \frac{0}{1}\ ?\ \text{NO} \Rightarrow \vec{v_r} \nparallel \vec{v_s} \Rightarrow r \nparallel s$$

2 O son secantes o se cruzan. Calculamos $\Delta = \det[\vec{P_rP_s}\ \vec{v_r}\ \vec{v_s}] = \begin{vmatrix} -3 & 0 & a-3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3a+6$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{CASO 1: } a=2 \to \Delta=0 \to \text{Secantes} \\ \text{CASO 2: } a\neq 2 \to \Delta\neq 0 \to \text{Se cruzan} \end{array}}$

ⓑ Sustituimos s en r (y salen λ y a): $s \mapsto r: \begin{cases} a+\lambda=3 \to a+1=3 \to a=2 \\ 1+\lambda+2\lambda=4 \to \lambda=1 \end{cases}$

$\boxed{r \cap s = P = (2,2,3)}$

ⓒ Punto: $P_r = (4,0,3)$
Vect: $\vec{v_r} = (-1,1,0)$
$\vec{v_s} = (1,2,1)$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y & z-3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to \boxed{x+y-3z+5=0}$$

2 ⓐ Corte eje X $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \to 2x+12=0 \to a=-6 : A(-6,0,0)$

Corte eje Y $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \to 3y+12=0 \to y=-4 : B(0,-4,0)$

Corte eje Z $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \to -6z+12=0 \to z=2 : C(0,0,2)$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - 12\vec{j} + 24\vec{k}$

$\boxed{A = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{784} = 14\ u^2}$

ⓑ $P(0,y,0) \Rightarrow d(P,\pi) = 3 \Rightarrow \dfrac{|3y+12|}{\sqrt{4+9+36}} = 3 \Rightarrow |3y+12| = 21 \begin{cases} 3y+12=21 \to y=3 \\ 3y+12=-21 \to y=-11 \end{cases}$

$\boxed{P_1(0,3,0) \text{ y } P_2(0,-11,0)}$

3 ⓐ [$r \perp \pi$ por A] $r \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \end{cases} \xmapsto{\pi} 2(1+2t)-(2-t)+(1+t)=13 \to 6t=12 \to t=2.$

El pie de la perp. es $Q=(5,0,3)$

[sim. A'] $\dfrac{A+A'}{2} = Q \to \boxed{A' = 2Q-A = (9,-2,5)}$

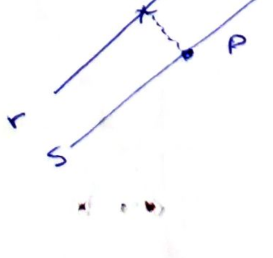
ⓑ $\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (2,-1,1) \\ \vec{BA} = (1,-1,4) \end{array}\right\} (\widehat{\vec{n},\vec{BA}}) = \dfrac{7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{18}} = \dfrac{7}{\sqrt{108}} \Rightarrow \boxed{(\widehat{r,\pi}) = 90^\circ - \arccos\frac{7}{\sqrt{108}} \approx 42^\circ 20' 37''}$

4 ⓐ Es el punto Q pie de perp. $\left\{\begin{array}{l} x = 2-\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{array}\right\} Q = (2-\lambda, 3+2\lambda, 1+\lambda) \Rightarrow \vec{PQ} = (3-\lambda, -5+2\lambda, +1+\lambda)$

Es $\vec{PQ}\cdot\vec{v_r} = 0 \Rightarrow -3+\lambda-10+4\lambda+1+\lambda=0 \Rightarrow 6\lambda=12 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow \boxed{Q=(0,7,3)}$

ⓑ Es la recta PQ: $\boxed{\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-8}{-1} = \dfrac{z}{3}}$

ⓒ



$d(r,s) = d(P,Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$ (u)

$\boxed{d(r,s) = \sqrt{11}\ (u)}$

$\boxed{s: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-8}{2} = \dfrac{z}{1}}$