Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Sistemas de Ecuaciones – 03/04/2024

EJERCICIO 1: [2]

Halla λ y resuelve matricialmente el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+1)\,x+5y&=1\\ \lambda\,x+3y&=2 \end{aligned}\right\}$$

sabiendo que la inversa de la matriz de coeficientes es

$$M=\begin{pmatrix} 3 & -5\\ -\lambda & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2: [3,5]

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 4y & + & 6z & = & 6\\ & & my & + & 2z & = & m+1\\ -3x & + & 6y & - & 3mz & = & -9 \end{array}\right\}$$

a) [2] Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) [1] Resuélvelo para $m=3$.

c) [0,5] Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que $y=0$.

EJERCICIO 3: [3]

Consideremos el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\left.\begin{aligned} kx+4y-kz&=6\\ x+ky-\ \ z&=3 \end{aligned}\right\}$$

a) [2] Discuta el sistema, según los valores del parámetro k, estudiando los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada.

b) [0,5] ¿Qué interpretación geométrica tiene el sistema y, si la hubiera, su solución?

c) [0,5] Razone si para cierto valor de k es $(1\,,1\,,0\,)$ una solución.

EJERCICIO 4: [1,5]

Plantee razonadamente (identificando <u>claramente</u> las incógnitas y <u>mostrando</u> el origen de cada ecuación) un sistema de ecuaciones lineales que permita dar respuesta al siguiente problema:

“Un vendedor dispone de tres tipos de piensos: A, B y C.

A cierto ganadero le cobra 70 céntimos por cada kilo de una mezcla formada por tres partes de pienso A con una parte de C. A otro ganadero le cobra 60 céntimos el kilo de una mezcla formada a partes iguales con los tres tipos de pienso.

Determine el precio del kilo de cada tipo de pienso sabiendo que la mezcla de un kilo de pienso B y un kilo de pienso C cuesta un 25% más que un kilo de pienso A.”

EJERCICIO 1:

Designemos por C, X y B a la matriz de coeficientes, de incógnitas y de términos independientes, respectivamente. Expresamos el sistema matricialmente y despejamos la matriz de incógnitas:

$$CX = B \to X = C^{-1}B \to X = MB$$

Necesitamos hallar λ antes de resolver. Para ello teniendo en cuenta que C y M son inversas:

$$C \cdot M = \mathrm{I} \longrightarrow (\lambda+1)\cdot 3 + 5\cdot(-\lambda) = 1 \to \lambda = 1$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

a) Para discutir, calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -6m^2 + 18m \xrightarrow{|C|=0} m\cdot(-6m+18) = 0 \to m = 0\,, m = 3$$

<u>Caso 1</u>: $m \neq 0$ y $m \neq 3$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\mathrm{rg}\,(C) = \mathrm{rg}\,(A) = 3 = \mathrm{n^o}\ \text{incóg}$$

S es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $m = 0$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -9 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & -9 \end{vmatrix} \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 2 \neq \mathrm{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $m = 3$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 6 & -9 & -9 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce además que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas de Δ_2), con x e y como incógnitas principales (columnas de Δ_2) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \begin{cases} 2x - 4y = 6 - 6z \\ \qquad 3y = 4 - 2z \end{cases}$$

Poniendo $z = \lambda$ y resolviendo:

$$(x\,,y\,,z) = \left(\frac{17 - 13\lambda}{3}\,,\frac{4 - 2\lambda}{3}\,,\lambda\right)$$

c) Haciendo $y = 0$:

$$\frac{4 - 2\lambda}{3} \;\rightarrow\; 4 - 2\lambda = 0 \rightarrow\; \lambda = 2$$

Sustituyendo:

$$(x\,,y\,,z) = (-3\,,0\,,2)$$

EJERCICIO 3:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 4 & -k & 6 \\ 1 & k & -1 & 3 \end{array}\right)$$

a) Vemos primero que hay un menor de orden uno (el 1 de la segunda fila, por ejemplo) no nulo, así los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son 1 ó 2:

$$\Delta_1 = \det(1) \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden dos de ese menor con la primera fila:

$$\Delta_2^1 = \begin{vmatrix} k & 4 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 4 \quad , \quad \Delta_2^2 = \begin{vmatrix} k & -k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \Delta_2^3 = \begin{vmatrix} k & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3k - 6$$

Caso 1: $k \neq \pm 2$.

$$\Delta_2^1 \neq 0 \longrightarrow \text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3$$

Es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

Caso 2: $k = 2$.

$$\Delta_1 \neq 0\,,\, \Delta_2^1 = \Delta_2^2 = \Delta_2^3 = 0 \rightarrow \text{rg}\,(C) = 1 = \text{rg}\,(A) < 3$$

Tenemos así que S es compatible indeterminado con $3 - 1 = 2$ parámetros.

Caso 3: $k = -2$.

$$\left.\begin{array}{rcl} \Delta_1 \neq 0\,,\, \Delta_2^1 = \Delta_2^2 = 0 & \rightarrow & \text{rg}\,(C) = 1 \\ \Delta_2^3 \neq 0 & \rightarrow & \text{rg}\,(A) = 2 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{rg}\,(C) \neq \text{rg}\,(A)$$

Tenemos que S es incompatible pues los rangos no son iguales:

b) Del estudio anterior se deduce:

Si $k \neq \pm 2$ se trata de dos planos secantes en una línea recta, que es la solución del sistema.

Si $k = +2$ se trata de planos coincidentes en el espacio: son dos ecuaciones del mismo plano.

Si $k = -2$ se trata de dos planos paralelos.

c) Sustituyendo $x = 1, y = 1, z = 0$ en el sistema obtenemos:

$$\{k + 4 = 6\,,\, 1 + k = 3\} \rightarrow k = 2$$

EJERCICIO 4:

Sean x , y, z los respectivos precios (en euros) de cada kilo de pienso A, B y C.

3 kilos de A con 1 kilo de C son 4 kilos de mezcla a 0.70 € el kilo: $3x + z = 4 \cdot 0.7$

1 kilo de A con 1 kilo de B y 1 kilo de C son 3 kilos de mezcla a 0.60 € el kilo: $x + y + z = 3 \cdot 0.60$

1 kilo de pienso B y 1 kilo de pienso C cuesta un 25% más que 1 kilo de A: $y + z = 1.25 \cdot x$

Obtenemos el siguiente sistema:

$$\{3x + z = 2.8\,, x + y + z = 1.8\,, y + z = 1.25x\}$$

Resolución (no solicitada con GGB):

$$(x\,, y\,, z) = (0.8\,, 0.6\,, 0.4)$$

Así, el kilo de pienso A cuesta 0.80€, el de B cuesta 0.60€ y el kilo de C vale 0.40€.