Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Matrices y Determinantes – 15/03/2024	

EJERCICIO 1: [2,75]

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & b & -21 \\ b & a & 23 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Halle los valores de a y b para que se verifique $B \cdot C^t = 11A$.

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - 3X = A$.

c) [0,5] Halla una matriz Y tal que $A + 3Y = B \cdot B^t$.

EJERCICIO 2: [2,5]

Sea la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determine para qué valores del parámetro m la matriz tiene inversa.

b) [0,75] Discuta el rango de D.

c) [1] Calcule D^{-1} para $m = 0$.

EJERCICIO 3: [2,75]

Sea E una matriz cuadrada de orden 3 con determinante -2 y cuyas respectivas columnas son c_1 , c_2 , c_3.

Calcula razonadamente el determinante de ...

a) [0,5] $5E$.

b) [0,5] E^{-1}.

c) [0,75] la matriz cuyas columnas son

$$7c_2 - 3c_3 \ , \ 4c_1 \ , \ c_3$$

d) [1] una matriz Z tal que $Z \cdot E^t = 2\mathrm{I}$, investigando previamente cuáles han de ser las dimensiones de todas las matrices de esta igualdad.

EJERCICIO 4: [2]

Discute el rango de la siguiente matriz, según los valores de x:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & x & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 1:

a) Efectuamos el producto e igualamos el resultado a la matriz A :

$$B \cdot C^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \\ -21 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b-63 & -2a+b+69 \\ -2a-2b-21 & -2a-2b+23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -11 \\ -11 & 33 \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} a-2b-63 & = & 22 \\ -2a+b+69 & = & -11 \\ -2a-2b-21 & = & -11 \\ -2a-2b+23 & = & 33 \end{array} \right| \xrightarrow{resu} a = 25 \,,\, b = -30$$

b) Intentemos despejar despejar la matriz X (todas las matrices son cuadradas de orden 2):

$$X \cdot A - 3X = A^2 \;\rightarrow\; X\,(A - 3\mathrm{I}) = A^2 \;\rightarrow\; X = A^2\,(A-3\mathrm{I})^{-1}$$

Vamos a ver que esto está bien comprobando que existe esa inversa (y calculándola):

$$A - 3\mathrm{I} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = -1 \rightarrow (A-3\mathrm{I})^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Queda ahora:

$$X = A^2\,(A-3\mathrm{I})^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{efectuando} X = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 15 \end{pmatrix}$$

c) Es fácil despejar la incógnita:

$$A + 3Y = B \cdot B^t \;\rightarrow\; 3Y = B \cdot B^t - A \;\rightarrow\; Y = \frac{1}{3} \cdot \left(B \cdot B^t - A\right) \xrightarrow{operando} Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(D) = -m^2 + m + 6 \;\rightarrow\; -m^2 + m + 6 = 0 \;\rightarrow\; m = \frac{-1 \pm 5}{-2} \begin{array}{l} \nearrow \; m = -2 \\ \searrow \; m = 3 \end{array}$$

De ahí deducimos:

$$\begin{array}{lcccl} \text{Si } \; m = -2 \text{ ó } m = 3 & \rightarrow & \det(D) = 0 & \rightarrow & \text{No existe } D^{-1} \\ \text{Si } \; m \neq -2 \text{ y } m \neq 3 & \rightarrow & \det(D) \neq 0 & \rightarrow & \text{Sí existe } D^{-1} \end{array}$$

b) Caso 1: $m \neq -2$ y $m \neq 3$.

Tenemos que $\det(D) \neq 0$ siendo D cuadrada de orden 3. Luego $\mathrm{rg}(D) = 3$.

Caso 2: $m = -2$ ó $m = 3$.

Es fácil observar que hay un menor de orden 2 distinto de cero y que no depende de m:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ahora es $\det(D) = 0$ pero $\Delta_2 \neq 0$ así que es $\mathrm{rg}(D) = 2$.

c) Según lo anterior, para $m = 0$ es D invertible con $\det(D) = -0^2 + 0 + 6 = 6$. Calculamos:

$$D^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -6 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3:

a) Aplicamos que "si en un determinante se multiplica una línea por un número todo el determinante queda multiplicado por ese número":

$$\det(5E) = \det[5c_1\,,5c_2\,,5c_3] = 5\cdot 5\cdot 5\cdot(-2) = -250$$

b) El producto de la matriz por su inversa es la matriz unidad, y como el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes de los factores". Así

$$E\cdot E^{-1} = \mathrm{I} \xrightarrow{*} \det(E)\cdot\det\left(E^{-1}\right) = 1 \to \det\left(E^{-1}\right) = -\frac{1}{2}$$

(*) "El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes de los factores".

c) Sacamos factor común primeramente de la segunda columna:

$$\Delta = 4\cdot\det[7c_2 - 3c_3\,,4c_1\,,c_3] \stackrel{k_1+3k_3}{=} 4\cdot\det[7c_2\,,c_1\,,c_3] = 7\cdot 4\cdot(-1)\cdot(-2) = 56$$

Luego usamos que "el valor no cambia si a una línea añadimos una combinación de otras paralelas" y que "si permutamos dos columnas el determinante cambia de signo".

e) Si Z es $m\times n$ y la identidad es $p\times p$ (sabemos que es cuadrada), simbólicamente las dimensiones cumplen:

$$(m\times n)\cdot(3\times 3) = p\times p$$

De ahí sale que $n=3$ para que se pueda hacer el producto. Éste es entonces $m\times 3$ y coincide con $p\times p$. Así que $m=p=3$. Tenemos entonces que todas las matrices son 3×3.

Tomando determinantes en ambos miembros y aplicando la propiedad del producto y de la traspuesta:

$$\det Z\cdot\det E^t = \det(2\mathrm{I}) \to \det Z\cdot(-2) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1 \to \det Z = -4$$

EJERCICIO 4:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & x & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

Vemos primero que hay un menor de orden dos distinto de cero (esquina superior derecha):

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden tres de ese menor con la tercera fila:

$$\Delta_3^1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ x & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -x \end{vmatrix} = 3x-3 \;\to 3x-3=0 \;\to\; x=1$$

$$\Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x+1 \;\to -x+1=0 \;\to\; x=1$$

Casos:

$$\begin{array}{llll} x\neq 1 & \to & \Delta_3^1 \neq 0 & \to\; \mathrm{rg}(G) = 3 \\ x=1 & \to & \Delta_3^1 = \Delta_3^2 = 0\,,\Delta_2\neq 0 & \to\; \mathrm{rg}(G) = 2 \end{array}$$