Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Integral definida – 09/02/2023

EJERCICIO 1: [2,5]

a) [1,25] Obtén la integral indefinida

$$\int (x-1)\,\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$$

b) [1,25] Calcula el área del recinto delimitado entre la curva $y=(x-1)\,\mathrm{e}^{x}$ y el eje de abscisas entre $x=0$ y $x=2$.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos la función $f:[1\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f\,(x)=4\sqrt{x-1}$$

a) [0,5] Demuestra que la recta $y=x+3$ es tangente a la gráfica de f para $x=5$.

b) [2] Dibuja y halla el área del recinto limitado por el eje de abscisas, la gráfica de f y la recta tangente anterior.

EJERCICIO 3:

a) [1] Estudia la monotonía y determina los extremos de la función F definida por

$$F\,(x)=\int_0^x \frac{t-1}{\mathrm{e}^{t}+2}\,\mathrm{d}t \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

b) [1,5] Calcula

$$\int_{-1}^{2} x\,|x-1|\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2,5]

Consideremos para $a>0$ constante las funciones $f\,,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f\,(x)=x^2-ax \quad , \quad g\,(x)=ax$$

a) [0,5] Realiza un esbozo del recinto determinado por las gráficas de ambas.

b) [2] Determina para qué valor de $a>0$ dicho recinto tiene un área igual a $36\,\mathrm{u}^2$.

EJERCICIO 1:

a) Hallemos la primitiva siguiente por partes:

$$\int (x-1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x-1)\,\mathrm{e}^x - \int 1\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x-1)\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = (x-2)\,\mathrm{e}^x + C$$

b) Para obtener ese área es necesario averiguar el corte de la curva con el eje de abscisas:

$$(x-1)\,\mathrm{e}^x = 0 \;\rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ \mathrm{e}^x = 0 \rightarrow \text{no} \end{array}\right.$$

Como vemos, se cortan en el interior del intervalo de integración, así que calcularemos separadamente la integral de la función en $[0\,,1]$ y su integral en $[1\,,2]$.

Aplicando ahora la Regla de Barrow a las dos integrales definidas mencionadas:

$$\int_0^1 (x-1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[(x-2)\,\mathrm{e}^x\Big]_{x=0}^{x=1} = -\,\mathrm{e}+2$$

$$\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[(x-2)\,\mathrm{e}^x\Big]_{x=1}^{x=2} = \mathrm{e}$$

La primera es negativa (curva bajo el eje X) y la segunda es positiva (curva sobre eje X), así:

$$a(\mathscr{R}) = \mathrm{e} - (-\,\mathrm{e}+2) = 2\,\mathrm{e} - 2 \quad \text{u.a.}$$

EJERCICIO 2:

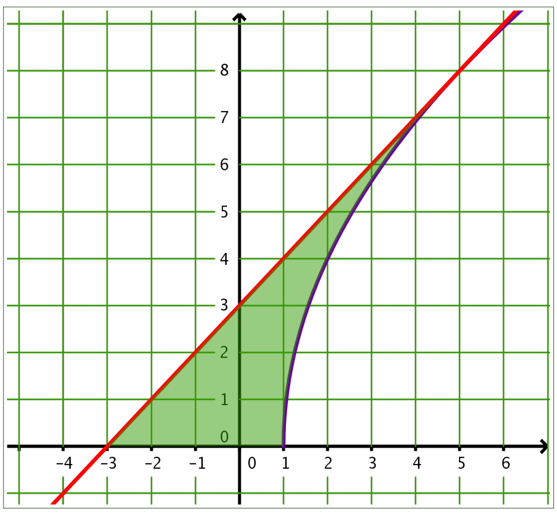
a) Ante todo derivamos:

$$f(x) = 4\sqrt{x-1} \;\rightarrow\; f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

Veamos que la recta tangente para dicho valor es la recta dada:

$$y - f\,(5) = f'\,(5)\cdot(x-5) \;\rightarrow\; y-8 = 1\cdot(x-5) \;\rightarrow\; y = x+3$$

b) La gráfica de f es parabólica. El recinto lo tenemos aquí:



Su área podemos calcularla como la resta de las áreas de:

$\triangle\,(ABC)$ con $A\,(5\,,0)$, $B\,(5\,,8)$, $C\,(-3\,,0)$

$\triangle\,(ABD)$ con $A\,(5\,,0)$, $B\,(5\,,8)$, $D\,(1\,,0)$ - curvilíneo-

Ésta es la que forma la gráfica de f con el eje de abscisas entre $x=1$ y $x=5$:

$$a(\mathscr{R}) = 8\times 8 : 2 - \int_1^5 4\,(x-1)^{1/2}\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_1^5 4\,(x-1)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \left[4\cdot\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\right]_{x=1}^{x=5} = \frac{64}{3}$$

Luego el área es:

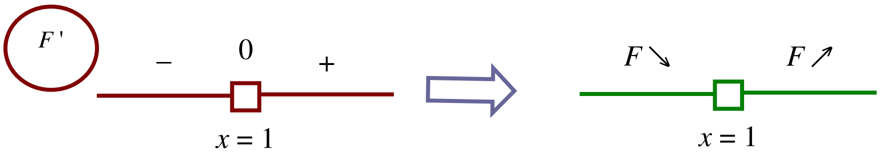
$$a(\mathscr{R}) = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}\ \mathrm{u}^2$$

EJERCICIO 3:

a) Como el integrando es continuo (el denominador nunca se anula), el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la derivada de la función integral es el integrando:

$$F'(x) = \frac{x-1}{\mathrm{e}^x + 2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

El estudio de signo de la derivada es simple:



Deducimos que para $x = 1$ hay un mínimo absoluto.

b) Expresamos el integrando como una función a trozos. Los ceros del interior del valor absoluto:

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

Resulta así:

$x \geq 1 \;\rightarrow\; |x-1| = x - 1 \;\rightarrow\; x\,|x+1| = x\,(x-1) = x^2 - x$

$x < 1 \;\rightarrow\; |x-1| = -x + 1 \;\rightarrow\; x\,|x+1| = x\,(-x+1) = -x^2 + x$

Así que separamos la integral en dos:

$$\int_{-1}^{2} x\,|x-1|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (-x^2 + x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (x^2 - x)\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_{-1}^{2} x\,|x-1|\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=1} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} = -\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

EJERCICIO 4:

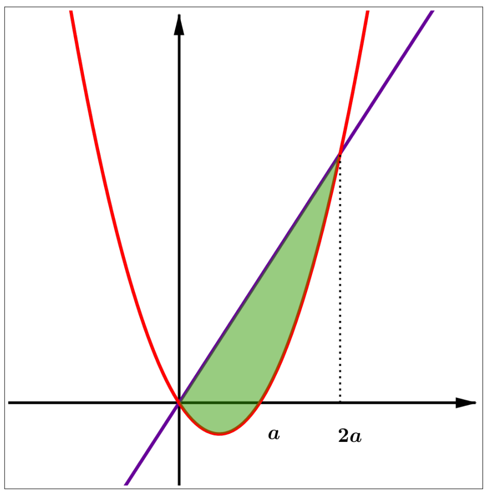
Las gráficas son una parábola convexa y una recta creciente. La parábola corta al eje de abscisas para $x = 0$ y para $x = a$.

Para averiguar dónde se cortan la curva y la recta igualamos sus fórmulas:

$$x^2 - ax = ax \;\rightarrow\; x^2 - 2ax = 0 \;\rightarrow\; x\,(x - 2a) = 0 \;\rightarrow\; x = 0\,, x = 2a$$

Calculamos la integral:

$$\int_{0}^{2a} (x^2 - ax - ax)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - ax^2\right]_{x=0}^{x=2a} = \frac{8a^3}{3} - 4a^3 = -\frac{4a^3}{3}$$



Luego:

$$a\,(\mathscr{R}) = \frac{4a^3}{3}\ \mathrm{u}^2$$

Igualando obtendremos el valor de la constante:

$$\frac{4a^3}{3} = 36 \;\rightarrow\; a^3 = 27 \;\rightarrow\; a = 3$$