EJERCICIO 1:

Calcula la siguiente integral de función racional:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-5x}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 2:

Obtén la integral indefinida

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $t = \sqrt[3]{x}$

EJERCICIO 3:

Determina la función $f : (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto $(1\,,1)$, que $f'(1) = 0$ y que

$$f''(x) = 2\ln(x)$$

EJERCICIO 4:

Halla la expresión de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sabiendo que su derivada está definida por

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x/2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \cos(2x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

y que su gráfica tiene como asíntota horizontal la recta $y = 5$.

EJERCICIO 5:

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas, indicando $u(x)$:

a) $\displaystyle\int \csc^2(3x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-25x^2}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \cot(3x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int x^2\left(x^3+1\right)^5\mathrm{d}x$

Observación: el ejercicio 5 es voluntario. Si no se resuelve, los cuatro problemas anteriores tendrán todos una valoración máxima de 2,5 puntos. En caso de resolverse, los cinco ejercicios se valorarán con un máximo de 2 puntos.

EJERCICIO 1:

El grado del numerador es el menor y no es una logarítmica directa. Veamos los ceros del denominador:

$$x\,(x-5)=0\;\rightarrow\;x=0\,,x=5$$

Tenemos así que podemos descomponer en fracciones simples:

$$\frac{2x-1}{x\,(x-5)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-5}\qquad [*]$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$\text{2x-1}=\text{a}(x-5)+bx\;\longrightarrow\;\begin{cases}\text{si } x=0\rightarrow -1=-5a\rightarrow a=\dfrac{1}{5}\\[2ex] \text{si } x=5\rightarrow +9=+5b\rightarrow b=\dfrac{9}{5}\end{cases}\qquad [**]$$

De [*] y [**] resulta:

$$\int\frac{2x-1}{x^2-5x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\,\ln|x|+\frac{9}{5}\,\ln|x-5|+C$$

EJERCICIO 2:

Cambiando la variable:

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x\underset{[x=t^3\rightarrow dx=3t^2dt]}{=}\int\frac{t}{t^3+t}\cdot 3t^2\mathrm{d}t$$

Simplificando y descomponiendo:

$$\frac{3t^3}{t^3+t}=\frac{3t^2}{t^2+1}=3-\frac{3}{t^2+1}$$

Ahora integramos:

$$I=3t-3\arctan(t)+C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t=\sqrt[3]{x}$:

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x=3\sqrt[3]{x}-3\arctan(\sqrt[3]{x})+C$$

EJERCICIO 3:

Integrando la derivada segunda obtenemos la derivada primera. Haremos por partes esa integral:

$$f'\,(x)=\int\underset{i}{1}\cdot\underset{d}{\ln x}\,\mathrm{d}x=x\cdot\ln x-\int\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$$

Hallemos esa constante con condición dada

$$f'\,(1)=0\;\rightarrow\;-1+C=1\;\rightarrow\;C=2$$

Integrando la derivada primera obtenemos la expresión de la función:

$$f\,(x)=2x-\frac{x^2}{2}+\int\underset{i}{x}\cdot\underset{d}{\ln x}\,\mathrm{d}x=2x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,\mathrm{d}x=2x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\,\ln x+\frac{x}{2}+D$$

Hallemos esa constante con condición dada

$$f\,(1)=1\;\rightarrow\;2+D=1\;\rightarrow\;D=-1$$

Queda:

$$f\,(x)=\frac{x^2}{2}\,\ln x-\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}-1$$

EJERCICIO 4:

Integramos cada trozo (formas compuestas exponencial y seno-coseno):

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{x/2} + a & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2}\,\operatorname{sen}(2x) + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Al existir derivada para $x = 0$, debe ser continua en $x = 0$:

$$f(0) = f(0-) = f(0+) \;\rightarrow\; 2 + a = b$$

La onda no tiene asíntota horizontal así que debe ser:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2\,\mathrm{e}^{x/2} + a\right) = 5 \xrightarrow{e^{-\infty}=0} 0 + a = 5 \;\rightarrow\; a = 5 \xrightarrow{susti} b = 7$$

Definitivamente nos queda

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{x/2} + 5 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2}\,\operatorname{sen}(2x) + 7 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 5:

a) Es una integral compuesta de tipo cotangente con $u = 3x$:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{3}{\operatorname{sen}^2(3x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cot(3x) + C$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-seno con $u = 5x$:

$$I = \frac{2}{5}\int \frac{5}{\sqrt{1 - (5x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\operatorname{arc\,sen}(5x) + C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u = \cos 3x$:

$$I = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + C$$

d) Es una integral compuesta de tipo potencial con $u = x^3 + 1$:

$$I = \frac{1}{3}\int 3x^2\left(x^3 + 1\right)^5\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(x^3 + 1\right)^6}{6} + C = \frac{1}{18}\left(x^3 + 1\right)^6 + C$$