Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Cálculo Diferencial – 27/11/2023

EJERCICIO 1: [2]

Consideremos la función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax+b & \text{si} \quad x\leq 0 \\[2mm] \dfrac{1-\cos(3x)}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Halla a y b si ha de tener un extremo relativo para $x=-2$.

EJERCICIO 2: [2,5]

Considera la función f definida por

$$f(x)=\frac{4x^2-10x+13}{2x-4} \quad , \quad x\neq 2$$

a) Averigua cuáles son sus asíntotas.

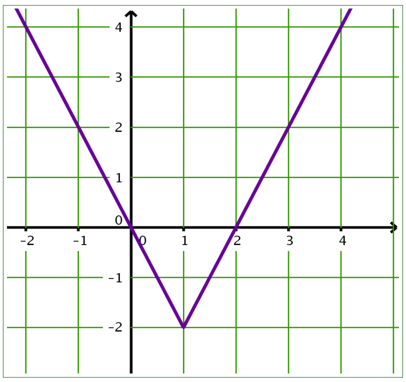
b) Obtén los extremos de la función en el intervalo $[3\,,6]$.

EJERCICIO 3: [2]

Calcula la función polinómica, de grado 3, cuya gráfica tiene un punto de inflexión en $P\,(0\,,-6)$ y a la recta de ecuación $2x-y=10$ como tangente para $x=2$.

EJERCICIO 4: [1,5]

Aquí vemos la gráfica de la derivada de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.



a) [0,5] Averigua en qué intervalos crece y decrece $y=f(x)$, señalando las abscisas en que se alcanzan los extremos relativos.

b) [0,5] Estudia la curvatura de $y=f(x)$, indicando dónde se alcanzan los puntos de inflexión.

c) [0,5] ¿Dónde hay que trazar la tangente a la gráfica de f para que sea paralela a la recta $2x-y=0$?

EJERCICIO 5: [2]

El alcalde de un pueblo quiere cercar un recinto rectangular cerrado para celebrar las fiestas. Para ello aprovecha una tapia existente como uno de los lados y dispone de 200 metros de tela metálica para hacer los otros tres.

a) ¿Podrías indicar las dimensiones del recinto acotado de esa forma cuya área es la mayor posible?

b) La comisión de fiestas del pueblo ha calculado que para montar las atracciones, pista de baile, etc., necesitan 10000 m^2. Teniendo en cuenta los cálculos realizados en el apartado anterior, ¿será suficientemente grande el recinto que quiere preparar el alcalde?

EJERCICIO 1:

Continuidad: observemos que f sólo podría ser discontinua para $x=0$ (separa-fórmulas). Veamos:

Valor: $f(0)=0+0+b=b$

Límites: $f(0-)=\lim\limits_{x\to 0-}\left(x^2+ax+b\right)=b$

$$f(0+)=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{3\operatorname{sen}(3x)}{2e^{2x}-2e^{-2x}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{9\cos(3x)}{4e^{2x}+4e^{-2x}}=\frac{9}{8}$$

Es continua sólo cuando todo coincide:

$$b=\frac{9}{8}$$

Por otro lado, si $x<0$ es $f'(x)=3x^2+a$. Si para $x=-2$ hay un extremo debe ser:

$$f'(-2)=0\to 3\cdot 2^2+a=0\to a=-12$$

Obtenemos:

$$a=-12\,,\ b=\frac{9}{8}$$

EJERCICIO 2:

a) <u>Asíntotas verticales</u>: al ser una función racional, sólo es discontinua en los ceros del denominador:

$$2x-4=0\ \to\ x=2$$

Comprobemos si hay salto infinito:

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-10x+13}{2x-4}=\left[\frac{9}{0}\right]=\pm\infty$$

Concluimos que hay una asíntota vertical: $x=2$.

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito (con la regla de los grados).

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-10x+13}{2x-4}\overset{*}{=}\pm\infty$$

Concluimos que no hay asíntotas horizontales.

<u>Asíntotas oblicua</u>: puede haber una oblicua $y=mx+n$. Calculamos con la regla de los grados [*]:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-10x+13}{2x^2-4x}\overset{*}{=}2$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x^2-10x+13}{2x-4}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x+13}{2x-4}\overset{*}{=}-1$$

Concluimos que hay una asíntota oblicua:

$$y=2x-1 \text{ para } x\to\pm\infty$$

b) La función es continua en $I=[3\,,6]$ y por ello alcanza sus extremos absolutos. Al ser derivable, los candidatos son los puntos inicial, final y aquellos en que la derivada se anula:

$$f'(x)=\frac{8x^2-32x+14}{(2x-4)^2}=0\to 4x^2-16x+7=0\to x=0.5\,,x=3.5$$

Vamos a construir una tabla de variación de la función en el intervalo compacto dado:

x	3		3.5		6
y	9.5	↘	9	↗	12.125

Vemos que es $(3.5\,,9)$ el mínimo absoluto y $(6\,,12.125)$ el máximo absoluto.

EJERCICIO 3:

Será

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \;\rightarrow\; f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \;\rightarrow\; f''(x) = 6ax + 2b$$

a) Hay inflexión en $(0\,,-6)$. De ahí se deducen dos cosas:

Para $x = 0$ hay inflexión así: $f''(0) = 0 \;\rightarrow\; 0 + 2b = 0 \;\rightarrow\; b = 0$

El punto $(0\,,-6)$ está en la gráfica: $f(0) = -6 \;\rightarrow\; 0 + d = -6 \;\rightarrow\; d = -6$

b) Para $x = 2$ la tangente es $y = 2x - 10$; de ahí se deducen dos cosas:

Es $x = 2 \rightarrow y = 2 \cdot 2 - 10 = -6$: $f(2) = -6 \;\rightarrow\; 8a + 2c - 6 = -6 \;\rightarrow\; 4a + c = 0$

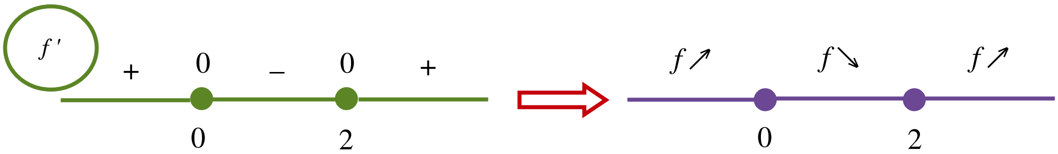
La pendiente es igual a la derivada: $f'(2) = 2 \;\rightarrow\; 12a + c = 2$

Resolviendo el sistema que hemos obtenido resulta $a = \dfrac{1}{4}\,, c = -1$. Luego:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x - 6$$

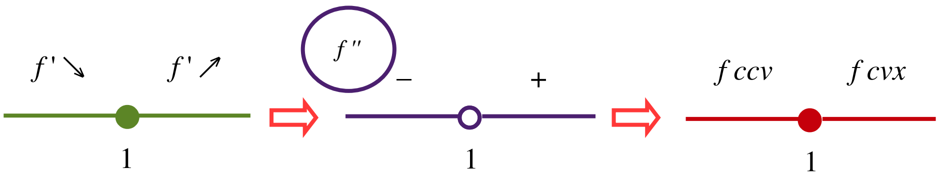
EJERCICIO 4:

a) Con la gráfica determinamos directamente el signo de la derivada, y de ahí la monotonía de la función:



Para $x = 0$ la función f tiene máximo relativo y para $x = 2$ un mínimo relativo.

b) De la monotonía de f' deducimos el signo de la derivada segunda, y de aquí la curvatura de f:



Concluimos que f presenta una inflexión para $x = 1$.

c) La tangente es paralela a la recta $y = 2x$ cuando tiene la misma pendiente:

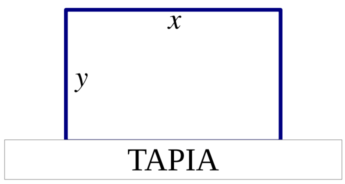
$$m = 2 \rightarrow f'(x) = 2 \xrightarrow{gráfica} x = -1\,, x = 3$$

EJERCICIO 5:

[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Llamamos x a la base (paralelo tapia) e y a la altura (perpendicular) de esa parcela rectangular. Tenemos que maximizar la superficie:

$$S = x \cdot y$$



[Ligadura]

Como hay 200 metros de tala metálica:

$$2x + y = 200 \rightarrow y = 200 - 2x$$

[Función]

Queremos maximizar

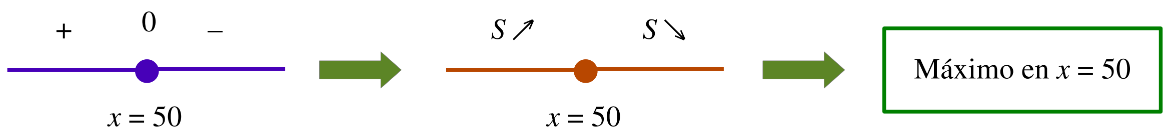
$$S = x \cdot (200 - 2x) = 200x - 2x^2$$

[Derivada / Extremo]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S' = 200 - 4x = 0 \to x = 50$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de S:



Luego la parcela rectangular tiene 50 m de ancho (paralelo a la tapia) y tiene 200 – 2 · 50 = 100 m de largo (perpendicular a la tapia).

La superficie máxima es

$$S = 50 \cdot 100 = 5000\, m^2 < 10000\, m^2$$

Luego no es suficientemente grande.