Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Ampliación Derivadas – 31/10/2023	

EJERCICIO 1: [2,5]

Se considera la función continua definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{x-1} & \text{si} \quad x < -1 \\ ax+b & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 2x\,\mathrm{e}^{-x+1}+3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

a) [1] Calcula a y b.

b) [1,5] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de la función.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$y = x\,|x-2| + 1$$

a) [1,5] Estudia su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$ para todos aquellos valores x en los que exista.

b) [1] Obtén la ecuación de la normal a la curva para $x = 0$.

EJERCICIO 3: [2,5]

Obtengamos los coeficientes de la función polinómica de tercer grado

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

para que la recta tangente a su gráfica en $x = 0$ sea $y = 3x + 2$ y tenga un extremo relativo en $(-2\,,1)$.

EJERCICIO 4: [2,5]

Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\,\mathrm{sen}\,x + x\ln(x+1) + bx^2}{x^3+x^2} = 2$$

EJERCICIO 1:

a) Sólo podría ser discontinua para $x = \pm 1$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo del dominio. Veamos detenidamente en estos puntos:

$\boxed{x=-1}$

Valor: $f(-1) = \dfrac{2}{-2} = -1$

Límites: $\lim_{x \to -1} f(x) \begin{cases} f(-1_-) = -1 \\ f(-1_+) = -a + b \end{cases}$

Para que sea continua debe ser $-a + b = -1$ [ec 1].

$\boxed{\text{x=+1}}$

Valor: $f(1) = 2 + 3 = 5$

Límites: $\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} f(1_-) = a + b \\ f(1_+) = 2 + 3 = 5 \end{cases}$

Para que sea continua debe ser $a + b = 5$ [ec 2].

Sumando $[ec1]$ y $[ec2]$ obtenemos fácilmente que $b = 2$. Y sustituyendo esto en cualquiera $a = 3$.

b) <u>Asíntotas verticales</u>: no hay pues no tiene saltos infinitos al ser continua.

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x-1} \overset{[grados]}{=} -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2x\mathrm{e}^{-x+1} + 3\right) = [+\infty \cdot 0] + 3 = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\mathrm{e}^{x-1}} + 3 = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] + 3 \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^{x-1}} + 3 = \left[\frac{2}{\infty}\right] + 3 = 0 + 3 = 3$$

Concluimos que hay una asíntota horizontal $y = 3$ para $x \to +\infty$

<u>Asíntotas oblicua</u>: puede haber una oblicua $y = mx + n$ para $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} \overset{[grados]}{=} 2$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x\right) \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x-1} \overset{[grados]}{=} 2$$

Concluimos que hay una asíntota oblicua: $y = 2x + 2$ para $x \to -\infty$.

EJERCICIO 2:

a) Es $x - 2 = 0 \to x = 2$. Podemos ver fácilmente que es $x - 2$ positivo si $x > 2$ y negativo si $x < 2$.

Queda entonces:

$$f(x) = x\,|x-2| + 1 = \begin{cases} x(-x+2) + 1 = -x^2 + 2x + 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ x(x-2) + 1 = x^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Como es una función polinómica a trozos, sólo puede ser discontinua para el separa-fórmulas $x = 2$. Pero es muy fácil observar que:

$$f(2) = f(2-) = f(2+) = 1$$

Así que es continua para $x = 2$ y, por consiguiente, para todo valor.

En cuanto a la derivabilidad, derivando directamente para $x \neq 2$ (con las reglas de derivación):

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+2 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para $x = 2$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales D.L. $\begin{cases} f'(2_-) = -2 \\ f'(2_+) = +2 \end{cases}$

Concluimos, al no ser iguales, que f no es derivable para $x = 2$ (es un punto *anguloso*).

b) La normal pedida es:

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x-0) \rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}x \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$$

EJERCICIO 3:

Primero, derivemos la función:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \rightarrow \ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

a) La pendiente es igual a la derivada (en el punto de tangencia):

$$f'(0) = m \ \rightarrow \ c = 3$$

El punto de tangencia es $x = 0 \longmapsto y = 3 \cdot 0 + 2 = 2$, luego:

$$f(0) = 2 \ \rightarrow \ d = 2$$

b) Por otra parte, hay extremo en $(-2\,,1)$; de ahí se deducen dos cosas:

Para $x = -2$ hay extremo y así:

$$f'(-2) = 0 \ \rightarrow \ 12a - 4b + 3 = 0 \quad [\text{ec1}]$$

El punto $(-2\,,1)$ está en la gráfica:

$$f(-2) = 1 \ \rightarrow \ -8a + 4b - 6 + 2 = 1 \quad [\text{ec2}]$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene rápidamente que $a = \dfrac{1}{2}$. Y sustituyendo este valor en cualquiera de ellas dos vemos que $b = \dfrac{9}{4}$.

EJERCICIO 4:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a \operatorname{sen} x + x \ln(x+1) + bx^2}{x^3 + x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[L'H]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{a \cos x + \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} + 2bx}{3x^2 + 2x} = \left[\frac{a}{0}\right] = L$$

Si $a \neq 0$ eso es un límite infinito:

$$L = \left[\frac{a}{0}\right] = \pm\infty$$

Si $a = 0$ eso es una indeterminación:

$$L = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[L'H\hat{o}p]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + 2b}{6x+2} = \frac{2+2b}{2}$$

Debe ser:

$$\frac{2+2b}{2} = 2 \rightarrow 2b = 2 \rightarrow b = 1$$

Concluimos que debe ser $a = 0\,, b = 1$ para que sea $L = 2$.

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1\cdot(x+1)-1\cdot x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\left[x\ln(x+1)\right]' = 1\cdot\ln(x+1) + x\cdot\frac{1}{x+1} = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$