Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Geometría del espacio – 23/05/2023	

EJERCICIO 1:

Sean r y s las rectas dadas por

$$r : \begin{cases} z = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = b \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

a) [1,25] Estudia la posición relativa de ambas rectas según el valor de b.

b) [0,5] Obtén su punto de intersección cuando sean secantes.

c) [0,75] Halla la ecuación del plano que contiene a r y a s cuando $b = 3$.

EJERCICIO 2:

Consideremos el plano dado por

$$\pi : 2x + y - 2z + 4 = 0$$

a) [1,25] Obtén el área del triángulo que determina el plano π con los ejes de coordenadas.

b) [1,25] ¿Qué punto del eje Z dista 2 unidades del plano?

EJERCICIO 3:

Consideremos los puntos y el plano

$$A\,(1\,,2\,,0) \quad , \quad B\,(a\,,3\,,-3) \quad , \quad \pi : 4x + 3y + z + 16 = 0$$

a) [1,25] Averigua las coordenadas del simétrico del punto A respecto del plano.

b) [0,75] Para $a = 0$, obtén la medida del ángulo (en grados, minutos y segundos) que forman la recta AB y el plano.

c) [0,5] ¿Para qué valores de a son secantes la recta AB y el plano?

EJERCICIO 4:

Consideremos el punto y la recta siguientes

$$P\,(6\,,0\,,1) \quad , \quad r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{0}$$

a) [1,25] Determina el punto de r más próximo a P.

b) [0,5] Halla la ecuación de la recta secante perpendicular a r trazada desde P.

c) [0,75] Escribe la ecuación de la recta s paralela a r por el punto P. ¿Qué distancia separa ambas rectas?

EJERCICIO 1:

Pasemos primero r a paramétricas:

$$r:\left\{\begin{array}{r} z=4 \\ x+y=3 \end{array}\right. \xrightarrow{y=\mu} \left\{\begin{array}{lcr} x & = & 3-\mu \\ y & = & \mu \\ z & = & 4 \end{array}\right.$$

a) Para estudiar su posición relativa primero veamos si son proporcionales los vectores directores de ambas:

$$\vec{v}_r=(-1\,,1\,,0)\ ,\ \vec{v}_s=(1\,,0\,,-1)\ \rightarrow\ ¿\frac{-1}{1}=\frac{1}{0}=\frac{0}{-1}?\ \text{no}\ \rightarrow\ \vec{v}_r \not\parallel \vec{v}_s$$

Así que las rectas o son secantes o se cruzan. Tomamos $P_r=(3\,,0\,,4)$ y $P_s=(1\,,b\,,3)$ y calculamos

$$\Delta=\det[\overrightarrow{P_rP_s}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s]=\begin{vmatrix} 2 & -b & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-3+b\ \rightarrow\ -3+b=0\ \rightarrow\ b=3$$

Tenemos así:

Si es $b\neq 3$ entonces las rectas se cruzan.

Si es $b=3$ entonces las rectas son secantes (en un punto, claro).

b) Podemos obtener que son secantes y el punto a la vez sustituyendo s en r:

$$r:\left\{\begin{array}{rcl} 3-\lambda=4 & \rightarrow & \lambda=-1 \\ 1+\lambda+b=3 & \rightarrow & b=+3 \end{array}\right| \xrightarrow{s} P=(0\,,5\,,4)$$

c) Por lo anterior, sabemos que para $b=3$ ambas rectas están en un mismo plano π. Tomaremos el punto y $P_r=(3\,,0\,,4)$ como vectores directores $\vec{v}_r=(-1\,,1\,,0)\ ,\ \vec{v}_s=(1\,,0\,,-1)$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \xrightarrow{operando} -x-y-z+7=0\ \rightarrow\ \pi: x+y+z=7$$

EJERCICIO 2:

a) Primero obtengamos las coordenadas de los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas:

Corte eje X: $y=z=0\ \rightarrow\ x=-2\ \rightarrow\ A\,(-2\,,0\,,0)\,.$

Corte eje Y: $x=z=0\ \rightarrow\ y=-4\ \rightarrow\ B\,(0\,,-4\,,0)\,.$

Corte eje Z: $x=y=0\ \rightarrow\ z=+2\ \rightarrow\ C\,(0\,,0\,,2)\,.$

Calculemos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-8\,,-4\,,8)$$

Porque el área pedida es

$$A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2+(-4)^2+8^2}=6\ \text{u}^2$$

b) El punto tendrá coordenadas $P = (0\,,0\,,\lambda)$

Ahora, usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano, obtendremos el parámetro:

$$\mathrm{d}\,(P\,,\pi) = \frac{|-2\lambda+4|}{\sqrt{4+1+4}} = 2 \ \rightarrow\ |-2\lambda+4| = 6$$

Para que un valor absoluto resulte ser 6, su argumento debe ser 6 o -6. Por lo tanto:

$$|-2\lambda+4| = 6 \ \rightarrow \left|\begin{array}{lll} -2\lambda+4=+6 & \rightarrow & \lambda=-1 \\ -2\lambda+4=-6 & \rightarrow & \lambda=+5 \end{array}\right.$$

Los puntos son:

$$P_1 = (0\,,0\,,-1)\ ,\ P_2 = (0\,,0\,,5)$$

c) Observemos que $r \parallel \pi \iff \vec{v}_r \perp \vec{n}$. Veamos cuándo ocurre:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow 4\,(a-1)+3\cdot 1+1\cdot(-1) = 0 \rightarrow a = 1$$

Luego son secantes sólo para $a \neq 1$.

EJERCICIO 3:

a) Calcularemos la ecuación de la recta r que pasa por el punto P y que es perpendicular al plano π. El punto Q intersección de r con π es el pie de la perpendicular o proyección de P en π.

La recta r pasa por $P\,(1\,,2\,,0)$ y tiene la dirección del vector normal al plano $\vec{n} = (4\,,3\,,1)$:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x = 1+4\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = \qquad \lambda \end{array}\right.$$

Ahora hallamos a intersección de esa recta con el plano, que es el punto proyección Q:

$$r \ \mapsto\ \pi: 4+16\lambda+6+9\lambda+\lambda+16 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = -1$$

Sustituyendo en las paramétricas de la recta:

$$Q = (-3\,,-1\,,-1)$$

El punto P y su simétrico P' tienen como punto medio a Q:

$$\frac{P+P'}{2} = Q \rightarrow P' = 2Q-P = (-7\,,-4\,,-2)$$

b) Aplicamos la condición de paralelismo de recta y plano:

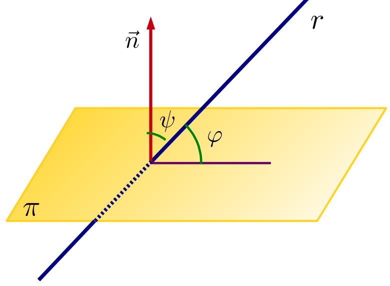
$$r \parallel \pi \ \leftrightarrow\ \vec{v}_r\cdot\vec{n} = 0 \ \rightarrow\ (2\,,1\,,m)\cdot(1\,,2\,,-2) = 0 \ \rightarrow\ 4-2m = 0 \ \rightarrow\ m = 2$$

Tenemos así que

Si es $m \neq 2$ entonces s y π son secantes (en un punto).

Si es $m = 2$ la recta es paralela o está contenida en el plano.

c) Para hallar el ángulo que forman la recta con el plano calcularemos primero el que forman el vector director de la recta $\vec{v} = \overrightarrow{BA} = (1\,,-1\,,3)$ con el vector normal del plano $\vec{n} = (4\,,3\,,1)$:



$$\cos\psi = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}||\vec{n}|} = \frac{4}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{26}} \ \rightarrow\ \psi = \arccos\frac{4}{3\sqrt{286}} \approx 76^\circ 19' 6''$$

Luego el ángulo formado entre r y π:

$$\varphi = 90^\circ - \psi \approx 13^\circ 40' 54''$$

EJERCICIO 4:

a) Vamos a usar el procedimiento del punto genérico. Usamos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = \quad -t \\ z = 3 \end{array} \right| \longrightarrow Q = (1 + 2t \, , -t \, , 3)$$

Debe ser $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_r$:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \rightarrow (2t - 5 \, , -t \, , 2) \cdot (2 \, , -1 \, , 0) = 0 \rightarrow 4t - 10 + t = 0 \rightarrow t = 2$$

Sustituyendo en las paramétricas de la recta:

$$Q = (5 \, , -2 \, , 3)$$

NOTA: Otro procedimiento es obtener la ecuación del plano π perpendicular a la recta que pasa por el punto. El punto buscado es la intersección de la recta con este plano.

b) La recta pedida (la persecante) es la recta PQ. Como $\overrightarrow{PQ} = (-1 \, , -2 \, , 2)$:

$$PQ : \frac{x - 6}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z - 1}{2}$$

c) La recta pasa por pasa por $P\,(4 \, , 1 \, , 1)$ y tiene la misma dirección que r:

$$s : \frac{x - 6}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{0}$$

La distancia que separa las dos rectas paralelas es la que separa el punto P de su proyección Q:

$$d\,(r \, , s) = \left| \overrightarrow{PQ} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ u}$$