Nombre:____ ***Curso***:_____
Matemáticas II – Sistemas de Ecuaciones – 30/03/2023

EJERCICIO 1: [2]

Escribe y resuelve matricialmente el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\left.\begin{aligned} (1+\lambda)\,x + \lambda\,y &= 5 \\ 3\,x + \lambda\,y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

sabiendo que la inversa de la matriz de coeficientes es:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el valor de λ?

EJERCICIO 2: [4]

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & my & + & mz & = & 1 \\ x & + & 2my & + & (m+1)\,z & = & m+1 \\ 2x & + & my & + & mz & = & 2 \end{array}\right\}$$

a) [2,5] Discuta el sistema según los valores del parámetro m.

b) [1] Resuélvalo para para $m = 0$.

c) [0,5] Para este valor del parámetro: ¿Existe alguna solución en la que x se anule? ¿Y en la que se anule y?

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\left.\begin{aligned} bx + 3y + \ \ z &= 2 \\ 4x - 6y + bz &= b \end{aligned}\right\}$$

a) [1,5] Discuta el sistema comparando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

b) [0,5] ¿Qué interpretación geométrica tiene en cada caso el sistema y su solución?

c) [0,5] Razone si para cierto valor de b es $(1\,,1\,,0\,)$ una solución.

EJERCICIO 4: [1,5]

Plantee razonadamente (identificando <u>claramente</u> las incógnitas y <u>mostrando</u> el origen de cada ecuación) un sistema de ecuaciones lineales que permita dar respuesta al siguiente problema:

“Un estado compra 140000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que lo venden a 30, 40 y 50 dólares respectivamente. La factura total asciende a cinco millones trescientos mil dólares.

Si del primer suministrador recibe el 75% de lo que adquiere a los otros dos juntos, ¿cuál es la cantidad comprada a cada suministrador?”

EJERCICIO 1:

Llamemos C a la matriz de coeficientes, X a la de incógnitas y B a la matriz columna de términos independientes. Expresemos matricialmente y despejemos la matriz de incógnitas

$$CX = B \to X = C^{-1}B \to X = MB$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Podemos hallar λ sustituyendo en la ecuación segunda, por ejemplo:

$$3 \cdot (-3) + \lambda \cdot 11 = 2 \to 11\lambda = 11 \to \lambda = 1$$

EJERCICIO 2:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m & 1 \\ 1 & 2m & m+1 & m+1 \\ 2 & m & m & 2 \end{array}\right)$$

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -m^2 + m \xrightarrow{|C|=0} m\,(-m+1) = 1 \to m = 0\,,1$$

<u>Caso 1</u>: $m \neq 0$ y $m \neq 1$.

Como $\Delta_3 = \det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $m = 0$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

<u>Caso 3</u>: $m = 1$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 2 \neq \mathrm{rg}(A) = 3$$

b) Del estudio previo deducimos que para $m = 0$ y que S equivale al sistema formado con las primera y la tercera ecuaciones (filas del menor principal), con x y z como incógnitas principales (columnas del menor principal) e y como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{r} x + z = 1 \\ 2x = 2 \end{array} \right.$$

Poniendo $y = t$ y resolviendo (por sustitución, pues de la segunda ecuación sale directo $x = 1$):

$$(x\,, y\,, z) = (1\,, t\,, 0)$$

c) No es posible que x se anule, pues en todas las soluciones es $x = 1$. Pero sí puede anularse y (tomando $t = 0$) y sería:

$$t = 0 \xrightarrow{obtenemos} (x\,, y\,, z) = (1\,, 0\,, 0)$$

EJERCICIO 3:

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} b & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & b & b \end{array} \right)$$

a) Partamos de un menor de orden 1 distinto de cero

$$\Delta_1 = |4| \neq 0$$

Sus orlados de orden 2 son:

$$\Delta_2^1 = \left| \begin{array}{rr} b & 3 \\ 4 & -6 \end{array} \right| = -6b + 12\ ,\ \Delta_2^2 = \left| \begin{array}{rr} b & 1 \\ 4 & b \end{array} \right| = b^2 - 4\ ,\ \Delta_2^3 = \left| \begin{array}{rr} b & 2 \\ 4 & b \end{array} \right| = b^2 - 8$$

Veamos cuándo es nulo el primer orlado:

$$-6b + 12 = 0 \rightarrow b = 2$$

Caso 1: $b = 2$

Todos los orlados en C son cero pero el orlado en A no ($\Delta_2^1 = \Delta_2^2 = 0\,, \Delta_2^3 = -4 \neq 0$):

$$\mathrm{rg}(C) = 1 \neq \mathrm{rg}(A) = 2$$

Es incompatible.

Caso 2: $b \neq 2$

El primer orlado es distinto de cero ($\Delta_2^1 \neq 0$), por ello:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce:

Si $b = 2$ se trata de dos planos paralelos en el espacio.

Si $b \neq 2$ se trata de dos planos secantes en una línea recta. Esta recta es la solución del sistema (cada punto de la recta es una de las infinitas soluciones).

c) Pongamos $x = y = 1\,, z = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} b + 3 = 2 \rightarrow b = -1 \\ 4 - 6 = b \rightarrow b = -2 \end{array} \right.$$

Como vemos, es imposible que se cumplan ambas simultáneamente. Así que no hay ningún valor de b que cumpla dichas condiciones. Por ello, no puede ser solución del sistema en ningún caso.

EJERCICIO 4:

Sean x , y, z las respectivas cantidades de barriles que compra a los distintos suministradores.

Compra un total de 140 000 barriles:	$x + y + z = 140000$
Factura total es cinco millones trescientos mil dólares:	$30x + 40y + 50z = 5300000$
Recibe del primero el 75% de los otros dos juntos:	$x = 0.75\,(y + z)$

Obtenemos el siguiente sistema:

$$\{x + y + z = 140000\,, 30x + 40y + 50z = 5300000\,, x = 0.75\,(y + z)\}$$

Resolviendo:

$$(x\,, y\,, z) = (60000\,, 50000\,, 30000)$$

Así, al primer suministrador compra 60000 barriles, al segundo 50000 barriles y al tercero 30000 barriles.