Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Matrices y Determinantes – 24/03/2023	

EJERCICIO 1: [3]

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) [0,5] Demuestra es $A^3 = -I$.

b) [0,75] Justifica que A es invertible y halla su inversa. (Sugerencia: úsese el apartado anterior)

c) [1] Halla la matriz X que satisface $XA = B^t$.

d) [0,75] Calcula razonadamente A^{125}.

EJERCICIO 2: [2,5]

Sea la matriz

$$C = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -m & -1 & m \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determine para qué valores del parámetro m existe C^{-1}.

b) [1] Calcule C^{-1} para $m = 0$.

c) [0,75] Estudie el rango según los valores de m .

EJERCICIO 3: [2,25]

El determinante de cierta matriz cuadrada D es -4, y sus respectivas columnas son k_1 , k_2 , k_3 , k_4.

a) [0,75] Calcula razonadamente el determinante de la matriz $2D^{-1}$.

b) [0,75] Averigua, indicando los pasos dados, el determinante cuyas columnas son

$$4k_3 \ , \ 2k_2 - 5k_3 \ , \ k_1 \ , \ k_4$$

c) [0,75] Consideremos la ecuación matricial $YDY^t = 2\mathrm{I}_4$. Demuestra que Y debería ser cuadrada pero que no hay solución.

EJERCICIO 4: [2,25]

Determina el rango de la siguiente matriz:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -a \\ a+2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & a & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 1:

a) Simplemente calculamos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathrm{I}$$

b) Obtenemos la inversa usando la igualdad anterior:

$$A^2 \cdot A = -\mathrm{I} \;\rightarrow\; -A^2 \cdot A = \mathrm{I} \;\rightarrow\; A^{-1} = -A^2 \;\rightarrow\; A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

c) De nuevo con la relación del primer apartado, pues $125 : 3 \rightarrow \{c = 41\,, r = 2\} \rightarrow 125 = 3 \cdot 41 + 2$

$$A^{125} = \left(A^3\right)^{41} \cdot A^2 = (-\mathrm{I})^{41} \cdot A^2 = -\mathrm{I} \cdot A^2 = -A^2$$

d) Despejemos la matriz X ya que A tiene inversa:

$$XA = B^t \;\rightarrow\; X = B^t \cdot A^{-1}$$

Operando y como ya tenemos la inversa:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(C) = 2m^2 - 4m + 2 \;\rightarrow\; 2m^2 - 4m + 2 = 0 \;\rightarrow\; m = 1$$

De ahí deducimos:

$$\text{Si } \; m = 1 \quad\rightarrow\quad \det(C) = 0 \quad\rightarrow\quad \text{No existe } C^{-1}$$

$$\text{Si } \; m \neq 1 \quad\rightarrow\quad \det(C) \neq 0 \quad\rightarrow\quad \text{Sí existe } C^{-1}$$

b) Según lo anterior, para $m = 1$ es C invertible.

$$\left.\begin{array}{l} \det(D) = 2 \\ \\ \mathrm{Adj}(C) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow\; C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Vamos a usar el apartado (a), claro.

$$\text{Si } \; m \neq 1 \quad\rightarrow\quad \Delta_3 = \det(C) \neq 0 \quad\rightarrow\quad \mathrm{rg}\,(C) = 3$$

$$\text{Si } \; m = 1 \quad\rightarrow\quad \Delta_2 = 0 \text{ (todos)} \quad\rightarrow\quad \mathrm{rg}\,(C) = 1$$

EJERCICIO 3:

a) El determinante de la inversa es:

$$D \cdot D^{-1} = \mathrm{I} \to |D| \cdot |D^{-1}| = |\mathrm{I}| \to |D^{-1}| = \frac{1}{-4}$$

Y sacando ahora el factor 2 de cada línea del determinante pedido quedaría:

$$\det\left(2\,D^{-1}\right) = 2^4 \cdot \det\left(D^{-1}\right) = 16 \cdot \frac{1}{-4} = -4$$

b) Escribamos los determinantes por columnas:

$\Delta = \det[\ 4k_3\ ,\ 2k_2 - 5k_3\ ,\ k_1\ ,\ k_4\ \ ] = 4\det[\ k_3\ ,\ 2k_2 - 5k_3\ ,\ k_1\ ,\ k_4\ \ ] =$
$= 4\det[\ k_3\ ,\ 2k_2\ ,\ k_1\ ,\ k_4\ \ ] = 8\det[\ k_3\ ,\ k_2\ ,\ k_1\ ,\ k_4\ \ ] = -8 \cdot (-4) =$
$= 32$

Hemos sacado 4 de la primera columna, sumado a la segunda columna el quíntuple de la primera, sacado 2 de la segunda columna y, finalmente, hemos permutado las columnas primera y tercera.

c) Si es Y una matriz $m \times n$ debemos tener en cuenta:

$$(m \times n)(4 \times 4)(n \times m) \to 4 \times 4 \Rightarrow n = 4 \text{ y } (m \times m) \to 4 \times 4 \Rightarrow n = 4 \text{ y } m = 4$$

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto es el producto de los determinantes y que el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta debería ser:

$$|Y|\,|D|\,|Y| = |2\mathrm{I}_4| \to |Y| \cdot (-4)\,|Y| = 16 \to |Y|^2 = -4 \to \text{ Imposible}$$

EJERCICIO 4:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -a \\ a+2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & a & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos primero que hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden tres de ese menor con las columnas primera y cuarta:

$$\Delta_3^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a+2 & 2 & 1 \\ 3 & a & a \end{vmatrix} = -a^2 - 2a + 3 = 0 \to a = -3\,,1$$

$$\Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 2 & 1 & 0 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = 0 \to a = -1\,,1$$

Observando que <u>todos</u> los orlados son cero <u>sólo</u> cuando $a = 1$:

$$a \neq 1 \quad \to \quad \Delta_3^1 \neq 0 \text{ ó } \Delta_3^2 \neq 0 \quad \to \quad \mathrm{rg}(E) = 3$$

$$a = 1 \quad \to \quad \Delta_3^1 = \Delta_3^2 = 0 \text{ y } \Delta_2 \neq 0 \quad \to \quad \mathrm{rg}(E) = 2$$